

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ANATOLE DE CALIGNY

**Expériences sur une nouvelle espèce d'ondes liquides à double
mouvement oscillatoire et orbitaire**

Journal de mathématiques pures et appliquées 1^{re} série, tome 13 (1848), p. 91-110.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1848_1_13__91_0

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

EXPÉRIENCES
SUR UNE NOUVELLE ESPÈCE D'ONDES LIQUIDES
A DOUBLE MOUVEMENT OSCILLATOIRE ET ORBITAIRE;

PAR M. ANATOLE DE CALIGNY.

Objet de ces recherches.

La plupart des auteurs qui ont écrit sur les ondes ayant trop généralisé leurs idées, il en est résulté des discussions intéressantes, mais qui laissent des doutes sur des points essentiels. Je crois qu'on ne saurait avoir trop de prudence en abordant un sujet aussi vaste, et je me borne en ce moment à décrire, parmi les phénomènes que j'ai étudiés dans des canaux factices, quelques-uns de ceux qui peuvent se coordonner avec des expériences faites plus en grand par d'autres observateurs. La plupart des lois de l'hydraulique, qui ont été vérifiées sur une très-grande échelle, avaient été d'abord établies au moyen d'expériences assez en petit, par la raison même qu'il est alors beaucoup plus facile d'étudier et surtout de varier convenablement les phénomènes. Je crois que ce moyen de recherche est bon quand on ne l'emploie qu'avec réserve.

On a cru longtemps que les molécules oscillaient à l'intérieur des flots comme dans des siphons, c'est-à-dire d'une manière plus ou moins analogue, en un mot, se mouvaient dans des courbes ouvertes. C'est effectivement ce qui se présente, du moins lorsque l'eau n'étant pas courante, un système particulier d'ondes arrive à l'une des extrémités d'un canal rectangulaire, où ces ondes se balancent sans conserver leur mouvement de transport *apparent* avant de revenir sur leurs pas.

Gerstner a publié en 1804, à Prague, un travail sur les ondes, reproduit en 1825 dans un ouvrage des frères Weber. Il décrit, à ce qu'il paraît, selon un extrait donné en anglais par M. Russell, un système particulier d'ondes où les mouvements se font dans des espèces d'*orbites* ou courbes fermées. Des expériences de M. Russell, publiées en 1844 par l'*Association britannique*, ont confirmé les recherches de ce savant [*]. On sait que M. Russell est particulièrement connu, d'ailleurs, par ses nombreuses expériences sur l'onde dite *solitaire*.

L'*onde solitaire* est une intumescence qui se propage à des distances très-considérables du point d'application de la cause qui l'a produite, sans être nécessairement précédée ou suivie de creux ou d'ondes d'une hauteur analogue. Il y a dans cette onde un mouvement de transport *réel*, c'est-à-dire que lorsqu'elle passe sur un point donné d'un canal, on la voit balayer le fond de ce canal; puis la masse d'eau qu'elle a mise en mouvement revient au repos, pendant que la masse suivante est à son tour transportée à la surface et au fond de l'eau. Ce phénomène est produit par l'action d'un premier gonflement résultant, soit d'une introduction d'eau subite, soit du mouvement *horizontal* d'un corps d'une section assez grande par rapport à celle du canal.

Quand on traîne un rouleau sur un tapis, la ride qui en résulte semble marcher avec ce corps, mais, en définitive, la masse entière du tapis ne s'est déplacée que d'une petite quantité, fonction des dimensions de cette ride. Cette comparaison paraît très-propre à faire concevoir comment les choses se passent, quant au transport définitif,

[*] Il y a dans les *Annales des Ponts et Chaussées*, depuis 1835, une discussion intéressante sur cette matière, ainsi que dans un ouvrage de M. le colonel Emy, intitulé : *Du mouvement des ondes et des travaux hydrauliques maritimes*, in-4, 1831, où se trouvent des développements du système du mouvement *orbitaire*, que je regarde comme très-intéressants, bien que je ne les adopte pas tous. On peut voir, dans les planches de cet ouvrage et dans celles des *Annales des Ponts et Chaussées*, la limite des courbes du profil de l'ondulation, en supposant successivement les ondes produites par le *siphonnement* ou par le mouvement *orbitaire*. Ce dernier mouvement n'étant que la conséquence d'un siphonnement dans l'onde particulière que j'ai étudiée, il n'est pas étonnant que la courbure observée paraisse se confondre, comme pour l'hypothèse du siphonnement, avec la courbe dite des *sinus*.

dans le phénomène dont il s'agit, si l'on considère toute l'étendue du canal.

De quelque manière que soient engendrées dans le canal les autres espèces d'ondes où le transport réel est à peu près nul, il est difficile qu'il n'en résulte pas des gonflements particuliers, et, par suite, des ondes *solitaires* qui modifient plus ou moins les premières. Cela complique singulièrement la question et peut servir, selon moi, à expliquer des phénomènes qui semblent d'abord se contredire, quoiqu'on ne puisse douter de leur existence après le témoignage des savants ingénieurs qui se les sont opposés.

M. Aimé a publié en 1842, dans les *Annales de Physique et de Chimie*, des expériences tout à fait nouvelles sur les mouvements intérieurs des flots dans la rade d'Alger. Il a conclu des empreintes symétriques laissées sur un plateau, fixé au fond de la mer, par une sorte de toupie armée de pointes, que le mouvement était oscillatoire sur ce fond. Ce genre d'observations ne me paraît pas entièrement suffisant pour établir cette conséquence, car elles pourraient résulter, au moins jusqu'à un certain point dans diverses localités, d'ondes *solitaires successives* qui marcheraient dans des sens opposés, comme je l'expliquerai plus loin.

Le même auteur a fait aussi des expériences très-intéressantes sur les mouvements qui se présentent entre le fond et la surface de la mer, au moyen des courbes serpentantes décrites par des fluides moins denses que l'eau, qui s'échappaient au fond de la mer du sommet d'un vase conique. Il ne tire aucune conséquence positive de la forme de ces courbes, quant à la nature des mouvements entre la surface et le fond de l'eau, en un mot, quant à la discussion entre les partisans du *siphonnement* et ceux du mouvement *orbitaire*; il dit seulement qu'il n'en résulte nullement que le mouvement oscillatoire du fond se présente dans les régions supérieures. En 1839, dans une Lettre à M. Arago, il avait d'abord tiré de ses expériences une conclusion plus tranchée: il pensait que le mouvement était *orbitaire* dans les régions supérieures; que les *orbites* étaient de plus en plus aplaties au-dessous, et finissaient par être sur le fond de simples lignes droites. Mais cette *conséquence*, insérée dans le *Compte rendu de l'Académie*

des Sciences, n'a été reproduite par M. Aimé ni dans son Mémoire de 1842, ni dans le Mémoire avec quelques additions sur le même sujet, qu'il a inséré en 1845 dans son grand ouvrage sur l'Algérie. Il est, de plus, à remarquer que, dans ce dernier ouvrage, il a supprimé la phrase qui renvoyait à un travail ultérieur sur les trajectoires des molécules liquides entre la surface de la mer et le fond, où il regarde le mouvement comme essentiellement oscillatoire.

Il doit être, en effet, extrêmement difficile, surtout dans un bateau lui-même agité par les vagues, d'étudier *directement* ces trajectoires, du moins à de grandes profondeurs : et même pour de moindres profondeurs on n'a pas de point de repère fixe; s'il y en avait, la question serait éclaircie depuis longtemps. Mais si mes expériences dans un canal factice représentent parfaitement le phénomène que M. Aimé avait entrevu, tout en l'indiquant seulement à titre de *conséquence* qu'il n'a même osé reproduire dans deux Mémoires postérieurs, à plusieurs années d'intervalle, alors ces expériences perdront le caractère d'observations trop en petit pour qu'on en puisse tirer des conséquences utiles. Les observations faites en grand dans la rade d'Alger, et celles que j'ai faites sur un canal factice, se prêteront un mutuel appui, et ne seront pas inutiles aux ingénieurs qui reprendront ultérieurement ces recherches pour l'étude des travaux hydrauliques maritimes.

J'ai d'ailleurs été frappé des points de ressemblance de cette *espèce particulière* d'ondes avec les ondes dites *solitaires*. Or, si je prouve que ces dernières, non-seulement ne sont pas sensibles, mais ne peuvent pas s'engendrer quand le corps qui les occasionne s'enfonce à une profondeur très-petite par rapport à celle d'un canal, c'est une raison de plus pour penser que les phénomènes dont il s'agit doivent se présenter au moins dans les rades peu profondes. Cependant il ne faut voir principalement dans ces recherches qu'une étude scientifique de faits nouveaux destinés à coordonner, à concilier les hypothèses et les faits recueillis jusqu'à ce jour, en attendant que les méthodes d'observations directes puissent être perfectionnées par les ingénieurs; ce qui sera d'ailleurs très-difficile.

I.

Expériences sur la nouvelle espèce d'ondes à translation apparente.

Pour éviter les reproches faits aux expériences sur le mouvement *orbitaire* des ondes, citées par M. Emy, décrites dans l'ouvrage des frères Weber [*], je me suis servi d'un canal ayant à peu près 24 mètres de long, 0^m,72 à 0^m,73 de large et 0^m,42 de profondeur. Ce canal rectangulaire en bois est doublé intérieurement en zinc; j'y ai étudié les ondes pour diverses hauteurs d'eau, surtout depuis 0^m,35 jusqu'à 0^m,10.

Je soulevais périodiquement un cylindre en bois vertical. Il suffisait de le disposer au milieu de la largeur du canal pour que chaque onde s'étendît sur toute cette largeur comme une seule *barre* horizontale à axe rectiligne. Le cylindre était, en général, assez gros par rapport à la largeur du canal, dont il occupait la moitié ou les deux tiers. Mais un cylindre d'un diamètre de 0^m,10, et même bien au-dessous, suffisait pour que la *barre* dont je viens de parler s'étendît régulièrement sur toute la largeur du canal, et perpendiculairement à son axe.

La courbure des flots et leur longueur apparente dépendaient de l'intervalle de temps qui séparait chaque oscillation du cylindre. Les flots étaient d'autant plus aigus par rapport aux creux, que cet intervalle était plus long. Quand les oscillations étaient trop rapides, le milieu du canal était alternativement concave et convexe, jusqu'à une certaine distance du cylindre sur la longueur de plusieurs ondes, et les ondes n'étaient pas formées assez régulièrement. Mais il y avait une vitesse d'oscillation du cylindre que j'obtenais par tâtonnement, chaque période étant d'environ 1 seconde, pour laquelle la courbure des flots ne paraissait pas différer sensiblement de celle des creux, je m'en suis d'ailleurs assuré en y plongeant alternativement une planche verticale et parallèle aux parois longitudinales, la profondeur de l'eau dans le canal dépassant 0^m,30.

[*] Le peu de profondeur d'un petit canal a été considéré par les partisans du *siphonnement* comme pouvant donner lieu à un mouvement *orbitaire* dans des circonstances exceptionnelles. On verra que cela paraît être précisément une cause particulière de mouvement oscillatoire. Le canal décrit dans l'ouvrage des frères Weber était beaucoup plus profond que celui dont je me suis servi.

La courbure des flots était d'autant plus aiguë, et leur longueur était d'autant plus diminuée que la profondeur de l'eau était relativement moindre. Pour une hauteur d'eau de $0^m,30$, j'ai surtout étudié les ondes quand elles avaient environ $0^m,10$ de haut au-dessus du creux.

Après avoir répandu du sable ou des grains de raisin bien sphériques sur le fond du canal, j'ai remarqué très-distinctement un mouvement de *va-et-vient* sur ce fond. Mais en observant les corps légers tenus en suspension dans l'intérieur du liquide, et considérant les mouvements de chacun d'eux en particulier, en les rapportant, bien entendu, à des *points fixes*, ce qui eût été à peu près impossible en mer, d'après ce qui m'a été dit par des voyageurs expérimentés, je les ai vus très-distinctement décrire des espèces d'ellipses dont, en général, dans les régions supérieures les axes verticaux paraissaient plus grands que les axes horizontaux. Chaque flot ou bourrelet liquide semble s'avancer d'un mouvement uniforme sans perdre rien de sa hauteur. Son aspect est analogue à celui d'une onde *solitaire*.

A l'époque où le gonflement du flot pousse en avant le liquide du côté du creux subséquent, il y a un mouvement de bas en haut dans le sens du mouvement apparent de l'onde. Les tranches d'eau s'entassant les unes sur les autres, il en résulte que l'écartement dans le sens vertical est d'autant plus grand, que le point est plus élevé au-dessus du fond. Il se présente un phénomène inverse dans le mouvement de retour vers le creux précédent. On voit à ces deux époques, même à la surface comme à l'intérieur, un mouvement de *va-et-vient horizontal*. Il y a aussi, comme je viens de le dire, un mouvement vertical de *va-et-vient*. On conçoit donc comment il en résulte un mouvement *orbitaire* dans les régions supérieures; mais ce n'est pas une raison pour qu'il y en ait un bien sensible sur le fond, où l'on ne voit, en effet, qu'un mouvement de *va-et-vient horizontal* dans le sable.

L'espèce de contre-courant *orbitaire* qui se présente dans cette onde donne cependant lieu à un phénomène singulier. Ayant répandu des grains de raisin vert bien sphériques sur le fond horizontal du canal, en choisissant les parties les mieux polies de ce fond, j'ai constamment remarqué qu'ils étaient, après le passage de l'onde, très-sensiblement plus repoussés en arrière qu'ils ne l'avaient été en avant par le mouvement direct dans le sens de la translation apparente de cette onde.

Ayant aussi répandu du sable ou des grains de raisin à une extrémité du canal, j'ai produit un système d'ondes en agitant le cylindre verticalement à l'autre extrémité, et j'ai toujours trouvé qu'après le retour de ces ondes, ces corps étaient bien plus repoussés en arrière qu'en avant.

En disposant le cylindre oscillant qui produisait les ondes près d'une des parois latérales du canal, je faisais naître un système d'ondes en zigzag qui avait constamment pour effet de ramener dans l'axe du canal les grains de raisin que j'avais disposés sur le fond, près des parois.

Ces divers effets dépendent des phénomènes qu'on pourrait appeler de *protection*, provenant des *matelas liquides*, phénomènes peu connus et qu'il serait utile d'apprécier dans leurs rapports avec les machines hydrauliques.

Le recul s'est présenté même sur un ressaut brusque disposé loin des extrémités, et dont la surface horizontale était à peu près à la moitié de la profondeur de l'eau dans le canal qui était alors de 0^m,26, et dont la longueur de 1^m,50 ne différait pas beaucoup du double de celle d'une onde. La longueur de l'onde n'était pas, du reste, nécessairement précise, puisqu'elle dépendait de la vitesse d'oscillation du cylindre que je faisais fonctionner *à la main*. Ce ressaut, formé de trois planches, dont celle de dessus occupait les trois quarts de la largeur du canal, était appuyé latéralement et fixé au moyen de coins de pierre. Quand il survenait une onde *solitaire* provenant d'une accumulation occasionnée par quelque mouvement horizontal dans la manœuvre du cylindre, les petits corps répandus sur le ressaut étaient repoussés en avant, sans revenir sur leurs pas, comme par une onde *solitaire* quelconque. Mais quand il n'y avait pas d'onde *solitaire*, il se présentait, en définitive, un mouvement de recul plus sensible que celui de progression dans le sens de l'onde.

On donne généralement le nom d'*ondes courantes* à celles qui n'ont qu'un mouvement de transport réel si faible par rapport au mouvement apparent, qu'on l'a même révoqué en doute. Il y a cependant un transport réel sensible dans les ondes de la mer, et les marins en tiennent compte dans le calcul de leur route, comme l'a remarqué M. de Tesson dans son ouvrage sur le voyage de *la Vénus*. Sans cela il serait assez difficile d'expliquer le mouvement de translation apparente. Celui qui se présente sur un champ de blé n'est pas tout à fait dans

le même cas. Le vent se transporte si le blé ne change pas de place, et fait naître des mouvements, en général, successifs qui subsistent un certain temps. Si l'on conçoit qu'un mouvement de transport apparent puisse résulter, par exemple, de la rotation d'une vis dont l'axe n'avance ni ne recule, comment pourrait-il se faire que, dans le canal dont je me suis servi, un système d'ondes s'avancât *en ne laissant derrière lui que des ondes incomparablement plus faibles*, si quelque chose ne se transportait pas avec ce système? Quand on observe la trace laissée par le liquide le long des parois verticales, on ne voit sur toute la longueur qu'une ligne horizontale; mais, aux extrémités du canal, les traces des ondes qui s'y resserrent en se balançant sont généralement plus élevées. Il est vrai que cet effet provient surtout du phénomène particulier de raccourcissement et de balancement qui, à cette extrémité, fait quelquefois même venir les sommets à la place des creux. Mais enfin s'il n'y avait point une accumulation d'eau quelconque, il n'y aurait pas de raison pour que les ondes revinssent sur leurs pas. Quant aux mouvements observés directement dans le sens des ondes, ils étaient peu sensibles tant qu'il n'y avait pas d'onde *solitaire*. Il arrivait même quelquefois qu'un corps flottant glissait un peu en arrière sur le flanc postérieur de la dernière onde. A l'extrémité du canal, il se présente un phénomène intéressant. Les ondes principales dont le nombre est, en général, du moins avant la réflexion à l'autre extrémité, analogue à celui des oscillations du cylindre qui les a engendrées, se pressent, et même à une assez grande distance de l'extrémité du canal, on voit très-distinctement se rétrécir les espèces d'orbites décrites par les petits corps en suspension dans l'eau. Bientôt il n'y a plus qu'un véritable *siphonnement* dans les flots. La première onde semble coupée par la moitié, à l'extrémité du canal, et le long du parement vertical le mouvement de va-et-vient est vertical dans la région supérieure des ondes, tandis qu'il est horizontal dans les creux; de sorte que c'est un mouvement horizontal qui tend à renverser le parement. Lorsque ensuite les ondes raccourcies s'allongent de nouveau pour revenir sur leurs pas, on voit très-distinctement les trajectoires redevenir graduellement des orbites elliptiques, et le mouvement elliptique est précisément en sens contraire de celui qui existait quand les ondes avaient un mouvement apparent venant de l'autre extrémité du canal.

On voit combien il doit être indispensable d'étudier ces phénomènes

à d'assez grandes distances des rivages, si l'on ne veut pas s'exposer à des erreurs graves. Or, comme à de grandes distances des rivages on n'a plus de points de repère fixes, voilà précisément ce qui fait la difficulté de ce genre d'observations et l'utilité de celles que l'on peut étudier dans un canal factice, où il est facile d'isoler chacun des phénomènes que l'on y peut produire, sans toutefois se permettre de leur attribuer trop de généralité avant de connaître en grand quelque chose de suffisamment analogue.

J'ai essayé de mesurer la vitesse de cette espèce d'ondes courantes. J'avais d'abord cru y parvenir, mais j'ai reconnu que, pour un seul observateur, il y avait une cause d'incertitude assez difficile à éviter complètement dans un canal de cette longueur, à cause du temps pendant lequel les flots se balancent à chaque extrémité, même quand ils sont peu nombreux à l'origine de leur mouvement. Or il serait à désirer, pour prendre cette mesure, que l'on pût considérer plusieurs traversées du système, comme cela est facile pour l'onde *solitaire*. Ce qu'il y a de certain, c'est que l'onde *solitaire*, lancée d'une extrémité du canal, où a d'abord été engendré le système d'ondes courantes, atteint ce système, quoiqu'elle soit partie longtemps après. Il est essentiel de remarquer que la rencontre se fait quand la vitesse de la crête des ondes courantes paraît encore sensiblement uniforme.

Deux systèmes d'ondes courantes de cette espèce peuvent se traverser, ou plutôt se réfléchir sans se détruire. Le balancement horizontal des bourrelets, dans le phénomène du *clapotage* qui en résulte d'abord, est conforme aux observations sur le clapotage de la mer, si bien décrites dans l'ouvrage de M. le colonel Emy.

Quand un système est lancé d'une extrémité à l'autre du canal, et ensuite abandonné à lui-même, il traverse toujours le canal sensiblement dans le même temps, pourvu que les ondes conservent encore une hauteur bien visible. Elles conservent toujours à peu près la même longueur en s'affaiblissant de plus en plus.

Quand on dispose un cylindre vertical fixe dans l'axe du canal, sa présence diminue la force des ondes, parce qu'elles se brisent en l'enveloppant; elles se reforment bientôt en barre rectiligne derrière lui, par suite d'un balancement latéral. Mais lorsqu'un obstacle vertical est disposé *latéralement*, il en résulte des ondes en zigzag analogues à

celles dont j'ai déjà parlé. Je ne m'étendrai pas ici sur ces phénomènes particuliers, n'ayant pour but, dans ce Journal, que d'exposer les principes fondamentaux de mes recherches.

II.

Expériences sur la formation de l'onde solitaire.

Cette onde étant en mouvement, comme je l'ai indiqué ci-dessus, elle traversait le canal un certain nombre de fois, et sa vitesse moyenne, c'est-à-dire en y comprenant les instants très-courts de repos aux extrémités, calculée au moyen de plusieurs traversées, était, pour chaque profondeur d'eau dans ce canal, assez sensiblement exprimée au moyen de la loi trouvée par M. Russell. Elle était proportionnelle à peu près à la racine carrée de la profondeur de cette eau et égale à la vitesse d'un corps grave tombé de la moitié de cette profondeur. Cela n'était plus vrai pour les profondeurs très-faibles, ainsi que l'auteur anglais est le premier à en convenir. La question de la vitesse, combinée avec celle du bateau qui l'engendre, a été, comme on sait, traitée par M. Russell, et depuis par M. Morin. Mon but, ici, n'est pas d'approfondir cette matière, mais seulement de montrer en quoi consiste principalement la formation du phénomène, en le considérant, surtout comme détaché du bateau qui l'accompagne dans les cas ordinaires de la pratique des canaux où la navigation se fait à grandes vitesses.

Un cylindre dont le diamètre était environ les deux tiers de celui du canal, étant plongé jusqu'au fond, et s'élevant toujours d'ailleurs au-dessus de la surface de l'eau qui était à 0^m,20 au-dessus de ce fond, ne produisait pas cette onde de la même manière que lorsqu'il était enfoncé à une profondeur moindre. Quand il était plongé jusqu'au fond, et qu'on le traînait le long du canal avec un mouvement à peu près uniforme, en marchant au pas ordinaire, ce n'était pas immédiatement devant le cylindre qu'il fallait regarder pour voir se former l'onde, mais à une certaine distance en avant. Lorsqu'il n'était enfoncé qu'à une profondeur intermédiaire, on voyait l'onde se détacher immédiatement du cylindre au moment de son apparition en aval. Enfin, quand il était enfoncé seulement à une profondeur très-faible, de 2 ou 3 centimètres environ, cette onde ne paraissait pas du tout en avant du cylindre, où l'on ne voyait que quelques rides. Quand elle y apparaissait

par suite d'un enfoncement un peu plus profond, ce n'était qu'à la fin de la course, lorsqu'on arrivait à l'autre extrémité du canal, en marchant toujours d'un pas ordinaire. Dans le premier cas, celui de l'enfoncement maximum, lorsqu'on arrive à la moitié de la longueur du canal, l'onde *solitaire* atteint déjà l'autre extrémité, tandis que dans le second, celui de l'enfoncement intermédiaire, elle commence seulement à se détacher du cylindre.

On voit combien la profondeur de la partie plongée influe sur le mode de production de l'onde *solitaire*. Mais de quelque manière que cette onde ait d'abord été formée, quand elle arrive à l'autre extrémité du canal, elle s'y élève et semble coupée par la moitié. Elle revient ensuite sur ses pas, et, en définitive, la vitesse avec laquelle elle traverse plusieurs fois le canal ne paraît dépendre que de la profondeur d'eau; sa formation ne devant plus être, en effet, considérée que comme provenant d'une masse de liquide amoncelée à une des extrémités. Au moment où les deux systèmes d'ondes étudiées dans cette Note arrivent à chaque extrémité, on entend une espèce de coup de bélier qu'ils donnent contre le fond du parement vertical.

Ces faits s'accordent avec la manière suivante de considérer l'onde *solitaire*. Concevons deux tubes formant une sorte de grand T renversé, la branche horizontale étant remplie d'eau et la branche verticale n'en contenant pas encore; on les suppose très-minces pour n'avoir à s'occuper que d'un filet d'eau, abstraction faite des résistances passives. La partie de la colonne liquide en amont du tube vertical est supposée d'abord seule en mouvement. En vertu de ce mouvement, il monte de l'eau dans le tube vertical; la pression latérale de cette eau ascendante engendre graduellement de la vitesse dans la portion en aval, et diminue la vitesse en amont. Il y a un instant où la vitesse est la même en amont qu'en aval; puis la colonne verticale, en redescendant, achève d'éteindre graduellement la vitesse en amont, tandis qu'elle l'augmente en aval jusqu'à ce que la colonne d'amont ait, en définitive, perdu son mouvement. Ces effets supposent, bien entendu, certaines proportions dans les longueurs, les vitesses, etc. Mais, dans certaines hypothèses, on conçoit que la force vive peut être *passée* dans la colonne d'aval sans percussion proprement dite, et cependant d'une manière analogue à ce qui se présente dans le choc de deux corps élastiques, dont l'un est en mouvement et l'autre

au repos au moment du choc. Si l'on conçoit divers systèmes de ce genre convenablement disposés les uns par rapport aux autres, on aura une idée de la manière dont les choses se passent dans l'onde *solitaire*. C'est ainsi que l'intumescence se propage d'une extrémité du canal à l'autre, en faisant alternativement naître et éteindre le mouvement sur toute la hauteur du canal en chaque lieu où elle passe, de façon que chaque prisme liquide est à son tour transporté dans le sens du mouvement, et s'arrête ensuite sans retour bien sensible en arrière. Le chemin parcouru dépend évidemment de la grandeur de l'intumescence qui semble se transporter d'une manière continue, quoique la progression de chaque point soit, comme je l'ai dit, analogue à celle d'un tapis sur lequel se promène un rouleau.

Il est facile de voir, d'après ce qui précède, pourquoi l'onde *solitaire*, non-seulement n'est pas *sensible*, comme on le disait, quand la section du corps qui l'engendre est trop petite par rapport à celle du canal, mais pourquoi *elle ne peut pas même se produire*. En effet, s'il faut qu'elle s'appuie sur du mouvement pour se porter en avant d'une manière convenable, il faut que ce mouvement soit déjà propagé à une certaine profondeur, à moins que l'onde ne puisse s'appuyer sur un obstacle fixe, comme le fait le gonflement à chaque extrémité du canal.

L'assimilation du phénomène à celui des oscillations dans un tuyau ou système de tuyaux recourbés peut servir à concevoir comment il se fait que la vitesse de l'onde est d'autant plus grande que le canal est plus profond. S'il y a plus de *masse* à mouvoir dans la tranche verticale liquide, il y a bien moins de *force vive* à engendrer. C'est par la même raison que, dans les tuyaux de conduite recourbés verticalement, les oscillations de la colonne liquide sont d'autant plus rapides, que la section du tuyau horizontal est plus grande par rapport à celle de la partie verticale. La durée de chaque oscillation est proportionnelle, en général, pour les longs tuyaux de conduite, à la racine carrée du rapport de la seconde section à la première, conformément aux expériences et aux calculs que j'ai publiés dans les tomes III et VI de ce Journal. Or la première section est ici représentée, jusqu'à un certain point, par la section du prisme d'eau proportionnelle à la profondeur. Sans attacher à ce rapprochement plus d'importance qu'il n'en mérite, j'ai pensé qu'il n'était pas sans quelque

intérêt, du moins comme une sorte de représentation physique d'un résultat de calculs et d'expériences. Il y a lieu de penser que si l'onde est trop faible par rapport à la profondeur de l'eau, le mouvement n'a pas le temps de se distribuer jusqu'au fond du canal selon la même loi que pour une onde plus forte; de sorte que les choses peuvent se passer, jusqu'à un certain point, comme si la profondeur du canal était moindre. Aussi les très-petites ondes *solitaires* sont, comme on sait, atteintes par les plus grandes. Enfin, quand les profondeurs de l'eau sont très-petites; les résistances passives sont relativement beaucoup plus fortes; les ondes ne vont pas même jusqu'à l'autre extrémité du canal, et elles s'évanouissent en arrondissant leurs *barres*, comme un arc qui se courbe de plus en plus, à mesure que le mouvement s'éteint.

Je ne m'étendrai pas ici sur des considérations faciles aujourd'hui à obtenir par l'analyse. Depuis le commencement de 1842, j'ai fait à la Société philomathique diverses communications sur les matières objet de cette Note, et il suffit de lire les écrits publiés avant cette époque pour voir en quoi j'ai contribué à éclairer des questions sur lesquelles on était loin d'être d'accord.

Il n'est pas vrai, comme on le croit généralement, qu'il n'y ait jamais de mouvement rétrograde dans l'onde *solitaire*; il y en a quelquefois quand la profondeur d'eau dans le canal est assez petite par rapport à la hauteur de l'onde, dont la vitesse n'est plus même permanente.

Le curieux phénomène de la rencontre des courants qui semblent se traverser, et qui dans la réalité se réfléchissent, comme Léonard de Vinci l'a remarqué il y a quatre siècles, trouve ici son application immédiate dans l'explication de la rencontre des ondes *solitaires* de hauteurs égales ou inégales, lancées des deux extrémités opposées du canal, et qui se traversent en apparence, mais dont on voit très-bien la réflexion à l'intérieur.

III.

Points de ressemblance de deux espèces d'ondes.

Quand une onde *solitaire* arrive à l'extrémité du canal où elle s'élève avant de revenir sur ses pas, elle fait reculer, comme les ondes dont j'ai parlé ci-dessus, le sable et les corps légers répandus sur le

fond à cette extrémité. Pour des ondes *solitaires* de hauteurs diverses, j'ai toujours observé que la distance de plus de 1 mètre du parement vertical à laquelle les grains de raisin étaient repoussés, le canal ayant une profondeur d'eau de 0^m,30, était sensiblement double de celle à laquelle ils étaient repoussés par les ondes *courantes*, aussi de hauteurs diverses. Je dois ajouter que je n'attache pas beaucoup d'importance à la mesure numérique, parce que le fond n'était pas assez rigoureusement horizontal en tous ses points; c'est la constance de ce rapport pour diverses profondeurs qui est intéressante. Le rapport des vitesses des deux espèces d'ondes m'a aussi paru sensiblement constant pour chaque profondeur d'eau dans le canal, autant qu'il m'a été possible de l'observer avec les chances d'erreur dont j'ai parlé ci-dessus pour le cas des ondes courantes. C'est un point de comparaison de plus entre les deux systèmes.

Je ferai surtout remarquer que M. Russell a depuis longtemps décrit dans ses Mémoires les chemins parcourus par les petits corps en suspension dans le liquide à l'intérieur de l'onde *solitaire*, tels qu'il les a observés au moyen de parois latérales transparentes. Or il a trouvé que sur le fond de l'eau les trajectoires étaient rectilignes, et se courbaient de plus en plus d'une manière analogue à des demi-ellipses, à mesure qu'on s'approchait de la surface. J'avais été tellement frappé de cette analogie, que je m'attendais à retrouver dans son Mémoire de 1844 plus de détails que je n'en avais donné moi-même à la Société philomathique sur l'espèce d'ondes *courantes* dont je m'étais occupé depuis plusieurs années. Cependant, non-seulement il ne l'avait point vue, mais il la révoquait même en doute.

En définitive, les divers points de ressemblance que j'ai remarqués entre les ondes *solitaires* et cette espèce d'ondes *courantes* sont une raison de soupçonner que leurs causes, sans être identiques, ont nécessairement beaucoup de rapports. Les ondes *solitaires* ne peuvent pas se présenter, d'après ce que j'ai dit de leur formation, dans les mers très-profondes, à moins qu'il ne s'agisse des ondes de la marée, dont je ne m'occupe pas ici. Ce n'est donc point à l'étude des phénomènes de ces mers que l'on doit se permettre, à priori, d'appliquer l'espèce peut-être particulière d'ondes courantes dont j'ai donné la description. Mais l'hypothèse de M. Aimé se trouvant confirmée directement par les recherches précédentes, il y a lieu de penser

que ce phénomène est celui qui doit se présenter pour les ondes courantes dans les mers peu profondes, un de ceux, en un mot, qu'il est le plus intéressant d'étudier à cause de son action vers les côtes.

Il ne faut pas oublier d'ailleurs que les ondes *solitaires*, qui apparaissent souvent quand les profondeurs ne sont pas trop grandes, changent notablement l'action du phénomène. Ainsi, dans un système d'ondes courantes que l'on croyait bien réglé, il arrivait quelquefois, dans mes expériences, une onde *solitaire* qui faisait courber les sommets des flots en volutes. Si cette onde est faible, elle se perd bientôt dans les creux. Mais si l'on produit une onde assez puissante, elle passe sur tout le système d'ondes *courantes*, elle comble les creux, et survit à ce système en se promenant d'une extrémité à l'autre du canal.

On peut faire arriver plusieurs ondes *solitaires* qui se suivent d'assez près pour que des personnes encore peu au courant de ces phénomènes les confondent avec des ondes *courantes*, l'espace qui les sépare ressemblant à des creux. Alors le sable répandu au fond du canal peut être porté en avant comme par plusieurs soubresauts, et reporté en arrière d'une façon analogue, ainsi que je l'ai souvent observé. C'est ce genre particulier de translation multiple qui pourrait faire naître des doutes quant à l'action des ondes *courantes* sur l'interprétation du résultat des expériences de M. Aimé, faites au moyen de son ingénieux système de toupies plongées au fond de la mer, si mes expériences *directes* ne confirmaient point cette interprétation, et si les raisonnements ci-dessus ne montraient pas qu'en effet, les choses doivent se passer d'une manière analogue. La forme des courbes serpentantes qu'il a dessinées ne serait pas non plus suffisante pour établir le mouvement *orbitaire*, si mes observations directes ne venaient pas à l'appui de ses conclusions. Il devait être extrêmement difficile, surtout sans points de repère fixes, de bien observer cette courbe serpentante, à cause des mouvements du bateau et des effets de lumière. C'est pour cela, sans doute, qu'il a attribué dans ses dessins, aux sinuosités, une régularité qu'elles ne pouvaient point avoir, selon sa première hypothèse, pour de grandes différences de profondeur, etc.

Si cet ingénieux auteur, qui est mort victime de la science, avait

employé d'autres moyens d'observation, il serait intéressant d'en retrouver la trace, quelque vague qu'elle pût être, maintenant que mes expériences *directes* et les raisonnements au moyen desquels je les ai confirmées ne laissent aucun doute sur l'existence de l'onde qu'il avait d'abord annoncée, au moins dans des circonstances particulières que je suis parvenu à produire.

Quant aux expériences que j'ai faites sur la formation de l'onde *solitaire*, elles me semblent pouvoir servir à concilier jusqu'à un certain point les hypothèses que d'autres auteurs ont faites sur leurs vitesses dans des circonstances qui ne devaient pas être tout à fait identiques. Ces vitesses, au moins dans les premiers temps de la formation de l'onde, dépendent essentiellement du rapport de la section du canal à celle des corps qui les a engendrées; de sorte que si ce rapport est assez grand, on ne voit que les ondes de translation qui accompagnent les corps flottants d'une manière analogue aux rides sur lesquelles MM. Poncelet et Lesbros ont fait depuis longtemps de nombreuses expériences. Les phénomènes des rides ont été depuis étudiés par M. Russell. Je m'en suis occupé moi-même; mais je n'en parlerai point dans cette Note, où il est entendu qu'il ne s'agit que des ondes d'une certaine grandeur par rapport à la profondeur de l'eau, et ayant de l'analogie avec les vagues proprement dites.

Je réserve aussi pour un travail ultérieur mes recherches sur les remous, et, en général, sur les ondes que j'ai observées dans les cours d'eau permanents. J'ajouterai seulement ici qu'en plongeant alternativement une planche transversale dans un canal rectangulaire, où l'eau a un mouvement permanent, cela suffit, si la planche est assez large, pour faire naître une onde *solitaire* dont la forme est semblable à celles que l'on a spécialement étudiées dans ces derniers temps. De sorte qu'il y a lieu de penser qu'elle ne diffère que par le nom de quelques remous particuliers signalés plus vaguement, il est vrai, depuis bien plus longtemps par Bidone [*].

[*] On sait parfaitement aujourd'hui qu'en général, le mouvement des ondes *courantes* décroît à mesure que la profondeur augmente, du moins quand les profondeurs sont assez grandes par rapport à la hauteur de l'onde. Pour étudier ce phénomène, avant d'en observer directement les effets, j'ai inventé un appareil dont j'ai même exé-

Conclusions.

Il est extrêmement difficile, pour ne pas dire impossible, dans l'état actuel de nos connaissances, de faire des observations *directes* sur les chemins parcourus par les molécules à l'intérieur des flots de la mer, surtout à des profondeurs considérables, du moins avant de bien connaître les phénomènes qui se présentent dans des canaux factices d'une grandeur convenable. Aussi la discussion très-intéressante qui a eu lieu entre MM. Emy et Virla, dans les *Annales des Ponts et*

cuté en 1840 un modèle fonctionnant, et dont il n'est peut-être pas inutile de conserver la trace.

Tout le monde sait que si l'on enfonce brusquement dans un réservoir rempli d'eau un entonnoir renversé, on produit une ascension brusque par un véritable coup de *canne hydraulique*. Mais on n'avait pas remarqué que si, au contraire, on soulève l'entonnoir ainsi plongé, il en résulte, en général, un jet d'eau plus fort, toutes choses égales d'ailleurs. L'ascension des parois de l'entonnoir donne lieu à une sorte de *vide conique annulaire*, et, par suite, à une baisse notable au-dessous du niveau du réservoir. Il en résulte une oscillation remontante et un coup de bélier assez fort. J'en ai conclu que, si le mouvement d'ondulation dans le sens vertical était moindre à une certaine profondeur qu'à la surface du réservoir, le mouvement d'ondulation supérieure soulevant l'entonnoir renversé au moyen d'un flotteur posé sur la vague, il en résulterait un effet parfaitement analogue à ce qui vient d'être dit. C'est, en effet, ce qui arrive : l'eau s'élève dans un tube vertical cylindrique au bas duquel est lié l'entonnoir renversé à une aussi grande profondeur qu'on le veut, elle atteint alternativement des hauteurs égales à plusieurs fois celle des vagues du réservoir où l'appareil est abandonné à lui-même, et constitue une nouvelle espèce de machines à élever l'eau par le moyen des vagues.

M. Russell dit, dans son Mémoire de 1844, qu'il ne connaissait pas le travail des frères Weber quand il a commencé le sien, qu'il ne l'aurait peut-être pas entrepris s'il avait connu le premier, et qu'en définitive, ses résultats n'en sont pas moins nouveaux. Il m'est arrivé la même chose pour le travail de M. Aimé, dont M. Russell ne fait pas non plus mention, et, de plus, je suis parvenu à établir d'une manière définitive une conséquence que ce physicien n'a pas reproduite ultérieurement, faute de preuves positives. Ce genre de remarque n'aurait aucun intérêt pour le public si la concordance des résultats obtenus séparément, l'un comme une sorte d'hypothèse, l'autre comme un fait, n'était pas une présomption en faveur de leur utilité, les échelles des observations étant d'ailleurs extrêmement différentes. Le résultat définitif est dû à l'ensemble des recherches de M. Aimé et des miennes.

Chaussées, jusqu'à la publication des expériences de M. Russell semblait rester sans solution définitive. Les expériences en petit, décrites dans l'ouvrage des frères Weber, ne paraissaient pas à M. Virla assez développées. Quant aux observations de M. Aimé dans la rade d'Alger, elles n'étaient pas suffisantes pour établir l'hypothèse qu'il avait d'abord présentée et qu'il n'avait pas reproduite, faute de preuves assez positives.

La longueur du canal sur lequel j'ai fait mes observations est beaucoup plus grande que celle du canal sur lequel ont été faites les observations décrites dans l'ouvrage des frères Weber. L'échelle de mes expériences est analogue à celles des diverses expériences au moyen desquelles on a successivement établi les lois de l'hydraulique avant de les vérifier très en grand. Je suis cependant le premier à convenir que ce travail aurait beaucoup moins de chances d'être utile, si les phénomènes qui y sont décrits ne pouvaient pas se coordonner avec ceux qui ont été observés beaucoup plus en grand par des auteurs connus.

Le phénomène du *clapotage* est conforme à des observations faites très en grand par M. Emy. Celui du *siphonnement*, à l'époque où les ondes n'ont plus de mouvement de translation même apparent, est conforme à des observations faites par M. Virla à Cherbourg, d'après les détails que M. le colonel Courtois a bien voulu me communiquer. La non-apparition de l'onde *solitaire* dans les profondeurs relativement considérables s'accorde avec ce que l'on voit tous les jours dans la navigation des grandes rivières, et avec les observations de M. Poncelet sur les rides. Quant à la différence des vitesses de l'onde *solitaire* provenant de la différence d'enfoncement des corps qui l'ont fait naître, elle paraît pouvoir mettre sur la voie d'une explication des dissidences d'opinion sur les vitesses de l'onde *solitaire*. Le phénomène est, d'après ce fait, bien moins compliqué peut-être qu'on n'avait d'abord été porté à le croire.

La courbure de l'onde *courante* semble parfaitement analogue à celle de l'onde *solitaire*, pour une profondeur d'eau suffisante dans le canal. Mais ce qu'il y a de plus caractéristique, c'est l'espèce de ressemblance qui se présente entre les *orbites* [*] parcourues par les molécules dans

[*] Quand je dis que les molécules parcourent des *orbites* ou *courbes fermées*, je

ce genre particulier d'ondes *courantes* que j'ai étudiées, et les chemins *demi-orbitaires*, si l'on peut s'exprimer ainsi, étudiés directement par M. Russell dans l'onde *solitaire*. Or celle-ci est produite seulement, comme je l'ai dit, pour les profondeurs qui ne sont pas trop considérables, relativement au corps qui les occasionne.

En définitive, la *conséquence* indiquée par M. Aimé avec une défiance qui la lui a même fait supprimer plus tard dans deux Mémoires publiés à plusieurs années d'intervalle devient beaucoup plus positive, maintenant que des observations directes, faites sur un canal factice où d'autres phénomènes des ondes de grandes dimensions se reproduisent assez fidèlement, montrent que non-seulement la combinaison de mouvements soupçonnée par ce physicien est *possible*, mais qu'elle *existe* bien réellement, au moins dans des cas particuliers. Les expériences de M. Aimé ont été faites précisément dans une rade où le mouvement produisait encore sur le fond des effets très-sensibles. Il y a donc lieu de penser que cette espèce d'ondes *courantes* dont la connaissance est due à l'ensemble des recherches de deux observateurs malheureusement étrangers l'un à l'autre, si toutefois elle ne constitue qu'un phénomène particulier, est du moins au nombre de ceux dont il sera utile de vérifier autant que possible les effets dans les rades, et, en général, dans les mers d'une profondeur assez peu considérable pour que le mouvement subsiste et soit obligé de devenir horizontal près du fond.

Ce qu'il y a, au reste, de plus intéressant dans mes expériences, c'est que le mouvement de recul au fond du canal est plus fort que le mouvement de progression dans le sens du mouvement de translation

veux seulement parler de l'aspect général du système; car si le mouvement était rigoureusement analogue à celui des anneaux d'une chaîne, il est clair qu'il se présenterait des *nœuds* qui modifieraient à chaque instant les *orbites*, comme l'a remarqué M. Virla. La génération *géométrique* des *orbites* est encore loin d'être connue. Les ondes *courantes* principales sont même précédées d'ondes *courantes* plus faibles, mais de longueur analogue; et quand elles parviennent à l'autre extrémité du canal, on commence par voir se balancer les plus faibles avant que les plus fortes arrivent jusqu'au *parement* de cette extrémité. La longueur des ondes est assez difficile à mesurer pour un seul observateur, tant qu'elles sont *courantes*. Si, par exemple, on y enfonce alternativement une planche, la trace laissée par l'onde est toujours nécessairement plus longue que cette onde.

A. C.

apparente de ces ondes, même sur un ressaut. L'excès du recul est d'ailleurs bien moindre que la translation *apparente* de la surface des ondes.

Mes conséquences n'ont rien d'exclusif. Le système d'ondulation à *tourbillons*, connu sous le nom de mouvement *orbitaire*, paraissait *impossible* à des ingénieurs très-distingués. M. Russell l'a cependant de nouveau constaté, au moins dans des circonstances particulières, même sans l'oscillation horizontale, que je regarde comme le principe le plus essentiel du mouvement dans les circonstances où se présente l'espèce d'ondes que j'ai spécialement étudiée dans cette Note. Aussi, malgré la peine que j'ai à concevoir le mouvement apparent de translation dans des ondes *courantes* où il n'y aurait pas de mouvement *orbitaire* bien sensible, sauf le petit mouvement de translation réelle admis par les marins, je ne me prononcerai pas sur la possibilité de ces ondes. Il n'y a à proprement parler qu'un mouvement de siphonnement dans les premiers instants où les ondes *courantes* à translation apparente, après s'être balancées à une des extrémités du canal, tendent à revenir sur leurs pas. Or le mouvement *orbitaire* s'est présenté, selon moi, dans ces ondes comme une conséquence de l'espèce particulière de *siphonnement* occasionné par la réaction du fond du canal. Il est à remarquer que le phénomène des ondes solitaires résout, en partie du moins, les objections que se faisaient les partisans exclusifs du mouvement *orbitaire* et ceux du *siphonnement*.

Il est, en définitive, bien entendu que je me borne à présenter les phénomènes particuliers que je *décris* sans prétendre exclure les hypothèses plus générales auxquelles donnera lieu ultérieurement, sans doute, un sujet si vaste et si peu connu.