JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ROGER

Thèse sur les brachystochrones

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 13 (1848), p. 41-71.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1848_1_13__41_0>

THÈSE

SUR LES BRACHYSTOCHRONES;

PAR M. ROGER,

Élève Ingénieur des Mines.

Le problème des brachystochrones a été autrefois l'objet des recherches d'un grand nombre de géomètres, parmi lesquels nous citerons Jean Bernoulli et Euler. En prenant ce problème pour sujet de thèse, nous avons dû naturellement reproduire beaucoup de résultats connus; mais nous pensons du moins avoir présenté quelques détails nouveaux, quant à ce qui concerne les brachystochrones sur une surface donnée.

I.

Des brachystochrones dans le cas de la pesanteur.

1. Le point mobile peut être libre ou assujetti à se mouvoir sur une surface donnée.

Dans le premier cas, la brachystochrone (que nous nommerons alors *brachystochrone absolue*) est, de toutes les courbes que l'on peut faire suivre au mobile pour qu'il se transporte (sous l'influence de la pesanteur) d'un point de l'espace à un autre point, la courbe pour laquelle le temps total du mouvement est un minimum.

Dans le second cas, le temps de la descente sur la brachystochrone est simplement un minimum relativement au temps que mettrait le mobile à descendre sur une autre courbe tracée aussi sur la surface donnée.

Dans les deux cas, le point de départ et le point d'arrivée peuvent être ou donnés de position, ou seulement assujettis à se trouver sur des courbes ou des surfaces déterminées; nous les supposerons toujours par la suite donnés de position.

Considérons d'abord le cas où le mobile est libre.

On aura pour la vitesse de ce mobile à un instant quelconque,

$$v \text{ ou } \frac{ds}{dt} = \sqrt{2g(z-z_0)},$$

z_0 étant l'ordonnée du point de départ; et l'intégrale qu'il faudra rendre un minimum sera la suivante :

$$\int_{z_0}^{z_1} \frac{ds}{\sqrt{2g(z-z_0)}}.$$

En appliquant les règles du calcul des variations, on arrive sans peine aux deux équations

$$\frac{dx}{ds\sqrt{z-z_0}} = C, \quad \frac{dy}{ds\sqrt{z-z_0}} = C_1;$$

d'où l'on déduit une équation de la forme

$$\frac{dy}{dx} = a,$$

équation d'un plan vertical. Le mobile devra donc se mouvoir dans le plan vertical qui passe par le point de départ et le point d'arrivée; la brachystochrone sera donc la même courbe que si le mobile était assujetti à rester sur un plan vertical donné, cas que nous examinons ci-après (n° **2**).

Supposons, en second lieu, que le mobile doive rester sur une surface, dont nous représenterons l'équation par

$$\text{(A)} \qquad F(x, y, z) = 0;$$

cette équation sera l'une des équations de la brachystochrone. La seconde équation, donnée sans difficulté par le calcul des variations, est la suivante :

$$\text{(B)} \qquad \frac{d\,\dfrac{dx}{ds\sqrt{z-z_0}}}{\dfrac{dF}{dx}} = \frac{d\,\dfrac{dy}{ds\sqrt{z-z_0}}}{\dfrac{dF}{dy}}.$$

Au moyen de l'équation (A) on pourra réduire l'équation (B) à une équation différentielle du second ordre entre deux variables. L'intégrale de cette équation du second ordre contiendra deux constantes arbitraires qui permettront de se donner arbitrairement le point de départ et le point d'arrivée.

Je vais maintenant étudier les propriétés des brachystochrones considérées sur certaines surfaces en particulier.

Cas où la surface donnée est un plan vertical.

2. Nous prendrons ce plan pour plan des xz; son équation sera donc $y = 0$; et, par suite, on aura

$$\frac{dF}{dx} = 0, \quad \frac{dF}{dy} = 1.$$

L'équation (B) nous donnera donc

$$d\,\frac{dx}{ds\sqrt{z - z_0}} = 0,$$

d'où

$$(1) \qquad \frac{dx}{ds\sqrt{z - z_0}} = \text{constante},$$

ce qui est l'équation différentielle de la cycloïde.

3. Je n'ai pas à examiner ici les propriétés géométriques de la brachystochrone, qui sont celles de de la cycloïde; j'indiquerai seulement quelques propriétés en quelque sorte *mécaniques*, fournies par la considération de son équation différentielle.

1°. *La brachystochrone est, au point de départ, tangente à la verticale.*

En effet, si l'on fait $z = z_0$, on a $\frac{dx}{ds} = 0$, et, par suite, $\frac{dx}{dz} = 0$.

2°. *La vitesse du mobile, en un point quelconque, est égale à la projection sur la tangente en ce point, de la vitesse au point le plus bas.*

En effet, si l'on remarque que la vitesse, à chaque instant, est donnée par la formule

$$v = \sqrt{2g(z - z_0)},$$

et que l'angle de la tangente avec l'horizontale a pour cosinus

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds},$$

l'équation (1) donnera

$$\frac{\cos\alpha}{v} = \text{constante} = \frac{1}{V},$$

d'où

$$v = V\cos\alpha.$$

Or on voit par cette équation que V n'est autre chose que la valeur de v pour $\alpha = 0$, c'est-à-dire au point où la tangente est horizontale; ce qui démontre le théorème énoncé.

3°. *Lorsque le point de départ et le point d'arrivée sont sur la même verticale, la brachystochrone n'est autre chose que cette verticale.*

En effet, l'équation différentielle (1) donne

$$dx = C ds\sqrt{z - z_0}.$$

Le point de départ et celui d'arrivée étant sur la même verticale, leur abscisse est la même; il faudra donc que la somme des accroissements du second membre, c'est-à-dire l'intégrale $C\int_{z_0}^{z_1} ds\sqrt{z - z_0}$, soit nulle, ce qui ne peut avoir lieu qu'en faisant $C = 0$. L'intégrale de l'équation ci-dessus est alors simplement

$$x = x_0 = x_1,$$

équation de la verticale qui contient à la fois le point de départ et le point d'arrivée.

4. Déterminons maintenant pour chaque instant t la position du mobile sur la brachystochrone. En mettant l'origine des coordonnées au point de départ, nous aurons pour cela les trois équations

$$x = r(u - \sin u), \quad z = r(1 - \cos u), \quad \frac{ds}{dt} = \sqrt{2gz},$$

dont les deux premières sont celles de la cycloïde. Ces deux équations donnent

$$ds = du\sqrt{2rz};$$

la troisième deviendra donc

$$\frac{du}{dt} = \frac{\sqrt{2gz}}{\sqrt{2rz}} = \sqrt{\frac{g}{r}},$$

d'où

$$u = t\sqrt{\frac{g}{r}},$$

en supposant que le temps soit compté à partir de l'origine du mouvement.

La loi du mouvement sera donc donnée par les deux équations

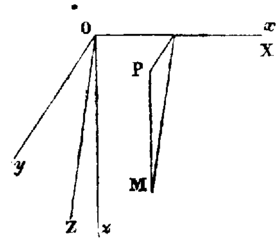
$$x = r\left(t\sqrt{\frac{g}{r}} - \sin t\sqrt{\frac{g}{r}}\right),$$

$$z = r\left(1 - \cos t\sqrt{\frac{g}{r}}\right).$$

Ces équations montrent que le mouvement du point sera le même que si ce point était sur un cercle de rayon r, roulant sur une droite horizontale, avec une vitesse constante convenable.

Cas où la surface donnée est un plan incliné.

5. Nous rapporterons la courbe cherchée à l'ancien axe Ox ou OX, supposé placé dans le plan incliné, et à un nouvel axe OZ qui sera la ligne de plus grande pente de ce plan.



Soit θ l'angle du plan incliné avec le plan horizontal. L'équation de ce plan, savoir,

$$(1) \qquad F(x, y, z) = z - y \tang \theta = 0,$$

donnera

$$\frac{dF}{dx} = 0, \quad \frac{dF}{dy} = - \tang \theta.$$

L'équation (1) est la première des équations de la brachystochrone, et la seconde sera

$$d \frac{dx}{ds\sqrt{z - z_0}} = 0,$$

d'où

$$\frac{dx}{ds\sqrt{z - z_0}} = C.$$

D'ailleurs, les formules de transformation propres à passer du système (x, y, z) au système (X, Z) sont

$$x = X, \quad y = Z\cos\theta, \quad z = Z\sin\theta,$$

et l'équation de la même courbe, dans le système (X, Z), sera

$$\frac{dX}{dS\sqrt{Z - Z_0}} = C_1.$$

Cette équation montre que la courbe suivie par le mobile doit être toujours la même dans le plan incliné, quelle que soit la position de ce plan autour de l'horizontale Ox, pourvu que les points de départ et d'arrivée gardent relativement la même position. Il est, du reste, évident *à priori* qu'il doit en être ainsi. Car on peut décomposer la pesanteur qui agit à chaque instant sur le mobile dans la direction de la verticale, en deux forces, l'une normale au plan incliné et qui n'aura aucune influence sur le mouvement du point, l'autre suivant la ligne de plus grande pente et qui sera représentée par $g \sin \theta$. On pourra donc regarder le mobile comme étant soumis à chaque instant à une force constante en grandeur, et constamment parallèle à la même direction (celle des lignes de plus grande pente); ce qui ramène le cas du plan incliné à celui d'un plan vertical quelconque.

On peut remarquer que si le point de départ et celui d'arrivée se trouvent sur une ligne de plus grande pente, la brachystochrone, d'après ce qui a été établi au n° 5, n'est autre chose que cette ligne de plus grande pente elle-même.

Cas des surfaces de révolution.

6. Nous supposerons, dans ce qui va suivre, que la surface est de révolution autour d'un axe vertical.

L'équation générale de ces sortes de surfaces,

$$x^2 + y^2 = \varphi(z), \tag{1}$$

donnera

$$\frac{dF}{dx} = 2x, \quad \frac{dF}{dy} = 2y;$$

et, par suite, on aura, pour la seconde des équations de la brachystochrone,

$$\frac{d\dfrac{dx}{ds\sqrt{z-z_0}}}{x} = \frac{d\dfrac{dy}{ds\sqrt{z-z_0}}}{y},$$

d'où

$$yd\frac{dx}{ds\sqrt{z-z_0}} - xd\frac{dy}{ds\sqrt{z-z_0}} = 0,$$

et en intégrant,

$$ydx - xdy = Cds\sqrt{z-z_0}. \tag{2}$$

On peut interpréter géométriquement cette équation différentielle du premier ordre; en effet, si l'on adopte dans le plan des xy des coordonnées polaires; qu'on appelle r le rayon vecteur de la projection M, θ l'angle que ce rayon OM fait avec l'axe des x, on sait que l'on aura

$$ydx - xdy = r^2 d\theta.$$

De plus, on a pour la vitesse du mobile à chaque instant,

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2g(z-z_0)};$$

l'équation (2) pourra donc se mettre sous la forme

$$(3) \qquad r^2\frac{d\theta}{dt} = \mathrm{A}v^2, \quad \text{d'où} \quad r^2 d\theta = \mathrm{A}v^2 dt.$$

Ainsi, *l'aire décrite à chaque instant par la projection du rayon vecteur est proportionnelle au carré de la vitesse du mobile.*

Dans le cas du cylindre circulaire, que nous examinerons spécialement ci-après, le rayon r est constant. D'ailleurs, $\frac{d\theta}{dt}$ représente la vitesse angulaire de la projection du rayon vecteur; par conséquent:

Lorsqu'un point matériel descend sur un cylindre circulaire, en suivant une brachystochrone, la vitesse angulaire de la projection du rayon vecteur est proportionnelle au carré de la vitesse effective du mobile.

A l'origine du mouvement, la vitesse v est supposée nulle; $\frac{d\theta}{dt}$ est donc nulle, en vertu de l'équation (3), pour une surface de révolution quelconque; par conséquent, le mobile reste, pendant le premier instant, dans le plan vertical qui passe par le rayon vecteur. Ainsi :

Toute brachystochrone sur une surface de révolution est tangente au méridien qui passe par le point de départ.

L'équation (2) peut se mettre sous la forme

$$(4) \qquad d\frac{x}{y} = \mathrm{C}y^2 ds\sqrt{z - z_0},$$

et l'on voit que le second membre a toujours le même signe: il est positif ou négatif suivant le signe de C.

Cela posé, supposons que le point d'arrivée $(x_1 y_1 z_1)$ soit sur le méridien du point de départ $(x_0 y_0 z_0)$, on aura

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_0}{y_0};$$

il faudra donc que la somme des accroissements du rapport $\frac{x}{y}$ soit nulle, c'est-à-dire que

$$\mathrm{C}\int_{z_0}^{z_1} y^2 ds\sqrt{z - z_0} = 0,$$

ce qui ne peut avoir lieu qu'autant que $C = 0$. Alors l'équation (4) se réduit à

$$d\frac{x}{y} = 0,$$

d'où

$$\frac{x}{y} = \frac{x_0}{y_0} = \frac{x_1}{y_1},$$

équation du méridien qui passe à la fois par le point de départ et le point d'arrivée.

Ainsi, *quand le point de départ et le point d'arrivée sont situés sur un même méridien, la brachystochrone entre ces deux points n'est autre chose que ce méridien lui-même.*

7. L'équation générale des brachystochrones sur une surface de révolution,

$$(1) \qquad r^2 \frac{d\theta}{dt} = A v^2,$$

peut être intégrée dans tous les cas. Car on en tire

$$r^2\, d\theta = A ds \sqrt{z - z_0}.$$

On a d'ailleurs

$$r = F(z), \quad dr = F'(z)\, dz,$$

et

$$ds = \sqrt{dz^2 + dr^2 + r^2\, d\theta^2} = \sqrt{dz^2 [1 + F'(z)^2] + F(z)^2\, d\theta^2};$$

l'équation (1) pourra donc se mettre sous la forme

$$F(z)^4\, d\theta^2 = A^2 (z - z_0) \{ dz^2 [1 + F'(z)^2] + d\theta^2\, F(z)^2 \},$$

d'où

$$d\theta = \frac{A dz}{F(z)} \sqrt{\frac{[1 + F'(z)^2](z - z_0)}{F(z)^2 - A^2 (z - z_0)}};$$

d'où l'intégrale

$$\theta - \theta_0 = A \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{F(z)} \sqrt{\frac{[1 + F'(z)^2](z - z_0)}{F(z)^2 - A^2 (z - z_0)}}.$$

Cas du cylindre circulaire droit, à axe vertical.

8. En faisant, dans la formule que nous venons d'établir,

$$F(z) = \text{constante} = a,$$

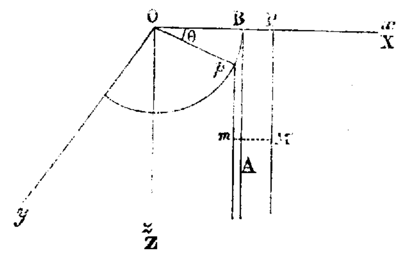
il serait aisé d'achever l'intégration indiquée, et l'on aurait l'équation de la brachystochrone sur le cylindre circulaire droit à axe vertical; mais nous préférons y arriver au moyen du théorème suivant que nous allons d'abord démontrer :

Si l'on développe le cylindre donné sur un plan vertical, autour de la verticale qui passe par le point de départ, et qu'on trace sur ce plan vertical la brachystochrone passant par les deux points donnés, cette courbe, en enroulant le plan sur le cylindre, deviendra la brachystochrone cherchée.

Pour le démontrer, remontons aux équations de la brachystochrone sur le cylindre,

$$\left\{\begin{array}{l} y \dfrac{dx}{ds\sqrt{z - z_0}} - x \dfrac{dy}{ds\sqrt{z - z_0}} = \mathrm{C}, \\ \text{avec} \\ \qquad x^2 + y^2 = a^2, \end{array}\right.$$

et cherchons l'équation en (X, Z) de la transformée de cette courbe, en supposant qu'on développe le cylindre sur le plan des XZ, de part et d'autre de l'arête AB qui passe par le point de départ B.



Soit $m(x, y, z)$ un point quelconque du cylindre; ce point prendra une position telle que M (X, Z), et l'on aura, entre les coordonnées des points m et M, les relations suivantes :

$$z = \mathrm{Z}, \quad x = a\cos\theta, \quad y = a\sin\theta, \quad \mathrm{X} = a(1 + \theta),$$

θ pouvant avoir toutes les valeurs comprises entre o et + 180 degrés et o et — 180 degrés. De là on déduit

$$x = a \cos \frac{X - a}{a}, \quad y = a \sin \frac{X - a}{a},$$

et

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{dX^2 + dZ^2} = dS;$$

l'équation de la transformée sera donc

$$a \left(\sin^2 \frac{X - a}{a} + \cos^2 \frac{X - a}{a}\right) \frac{dX}{dS \sqrt{Z - Z_0}} = \text{constante},$$

ou simplement,

$$\frac{dX}{dS \sqrt{Z - Z_0}} = \text{constante}.$$

La transformée n'est donc autre chose que la brachystochrone entre les nouvelles positions des deux points donnés sur le cylindre; et de là, réciproquement, résulte le théorème énoncé.

Ce théorème peut aussi être démontré synthétiquement de la manière suivante.

Imaginons qu'on ait tracé une courbe quelconque sur le cylindre; cette courbe se transformera, par le développement du cylindre, en une courbe *isochrone*, c'est-à-dire qu'un point matériel mettrait, à descendre d'un point à un autre de la courbe cylindrique, le même temps qu'il mettrait, sur la transformée, à parcourir l'espace compris entre les deux points correspondants.

En effet, si l'on partage en éléments égaux la courbe cylindrique et sa transformée, on voit bien que l'intégrale $\int_{z_0}^{z_1} \frac{ds}{\sqrt{2g(z - z_0)}}$ aura exactement la même valeur, parce que, dans le développement du cylindre, les éléments (ds) conservent la même grandeur, et les points correspondants gardent la même hauteur (z). Or cette intégrale représente le temps total de la descente; ce temps est donc le même pour la courbe cylindrique et pour sa transformée.

De là il résulte évidemment que la courbe cylindrique pour laquelle le temps de la descente est minimum donnera une transformée jouissant de la même propriété; et réciproquement.

Les formules de transformation propres au développement du cylindre permettent d'obtenir, au moyen du théorème précédent, et des équations connues de la cycloïde, les équations de la brachystochrone cylindrique en coordonnées (x, y, z).

On a, pour les équations de la cycloïde,

$$Z = r(1 - \cos u), \quad X = r(u - \sin u).$$

D'ailleurs, on a

$$X = a(1 + \theta), \quad Z = z, \quad x = a\cos\theta, \quad y = a\sin\theta;$$

éliminant Z et X, on aura

$$\left\{\begin{aligned} z &= r(1 - \cos u), \\ a(1 + \theta) &= r(u - \sin u), \\ x &= a\cos\theta, \\ y &= a\sin\theta. \end{aligned}\right.$$

II.

Des brachystochrones en général.

9. Supposons qu'un point mobile soit soumis à l'action d'un système donné de forces variables avec la position du mobile; parmi toutes les courbes assujetties ou non à se trouver sur une surface donnée, que le mobile pourra suivre pour se rendre d'un point de l'espace à un autre point, la brachystochrone sera la courbe pour laquelle le temps total du mouvement sera moindre que pour toutes les courbes voisines.

S'il existe une certaine fonction $\varphi(x, y, z)$ dont les forces appliquées (X, Y, Z) soient les dérivées respectivement par rapport à x, y et z, on sait, par le principe des forces vives, que l'on aura

$$X = v\frac{dv}{dx}, \quad Y = v\frac{dv}{dy}, \quad Z = v\frac{dv}{dz}.$$

C'est seulement ce cas que nous considérerons dans tout ce qui va suivre.

On a toujours

$$v = \frac{ds}{dt},$$

et, par suite,

$$dt = \frac{ds}{v}.$$

Il faut donc rendre minimum la valeur de l'intégrale $\int \frac{ds}{v}$, considérée depuis le point de départ jusqu'au point d'arrivée.

Le calcul des variations conduit sans difficulté aux équations différentielles de la brachystochrone; à savoir. si le point est tout à fait libre,

$$\left\{\begin{aligned} &ds\,\frac{d\,\frac{1}{v}}{dx} - d\,\frac{dx}{v\,ds} = 0,\\ &ds\,\frac{d\,\frac{1}{v}}{dx} - d\,\frac{dy}{v\,ds} = 0,\end{aligned}\right.$$

et, s'il est assujetti à se mouvoir sur une surface,

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{ds\,\dfrac{d\,\frac{1}{v}}{dx} - d\,\dfrac{dx}{v\,ds}}{\dfrac{dF}{dx}} = \frac{ds\,\dfrac{d\,\frac{1}{v}}{dy} - d\,\dfrac{dy}{v\,ds}}{\dfrac{dF}{dy}}.\\ &F(x, y, z) = 0.\end{aligned}\right.$$

Dans les deux cas, le mouvement du point sera entièrement déterminé en joignant aux équations précédentes la relation qui résulte du principe des forces vives, et que nous écrirons ainsi :

$$v = f(x, y, z).$$

10. Considérons d'abord le cas où le point est libre. On aura, dans ce cas, pour les équations de la *brachystochrone absolue*,

$$v = f(x, y, z),$$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\frac{1}{v}}{dx} &= \frac{d\frac{dx}{vds}}{ds}, \\ \frac{d\frac{1}{v}}{dy} &= \frac{d\frac{dy}{vds}}{ds}. \end{aligned}\right.$$

A ces équations on peut joindre celle-ci :

$$\frac{d\frac{1}{v}}{dz} = \frac{d\frac{dz}{vds}}{ds}.$$

En effet, en multipliant ces trois dernières équations respectivement par dx, dy, dz, et ajoutant les produits, on a

$$\begin{aligned} d\frac{1}{v} &= \frac{dxd\frac{dx}{vds} + dyd\frac{dy}{vds} + dzd\frac{dz}{vds}}{ds} \\ &= \frac{\frac{1}{vds}(dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z) + d\frac{1}{vds}(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{ds} \\ &= \frac{\frac{1}{vds}dsd^2s + ds^2 d\frac{1}{vds}}{ds} = \frac{1}{vds}d^2s + dsd\frac{1}{vds} \\ &= d\left(\frac{1}{vds}ds\right) = d\frac{1}{v}, \end{aligned}$$

équation identique : la troisième des équations ci-dessus peut donc être regardée comme une conséquence des deux autres.

11. Convenons de nommer *lignes de plus grande pente absolues* les courbes dont la tangente en chaque point est perpendiculaire à la surface de niveau $v =$ constante, qui passe par ce point, ou, si l'on veut, l'enveloppe des directions successives de la force appliquée en chaque point.

Une pareille courbe aura pour équations

$$(1) \qquad \frac{dx}{\dfrac{dv}{dx}} = \frac{dy}{\dfrac{dv}{dy}} = \frac{dz}{\dfrac{dv}{dz}}.$$

Cela posé, je dis que, si la vitesse initiale est nulle, la brachystochrone absolue est, en son point de départ, tangente à la ligne de plus grande pente absolue.

En effet, les équations de la brachystochrone donnent

$$\frac{d\dfrac{dx}{vds}}{\dfrac{d\frac{1}{v}}{dx}} = \frac{d\dfrac{dy}{vds}}{\dfrac{d\frac{1}{v}}{dy}} = \frac{d\dfrac{dz}{vds}}{\dfrac{d\frac{1}{v}}{dz}},$$

ou bien

$$\frac{dv\dfrac{dx}{ds} - vd\dfrac{dx}{ds}}{\dfrac{dv}{dx}} = \frac{dvd\dfrac{dy}{ds} - dvd\dfrac{dy}{ds}}{\dfrac{dv}{dy}} = \frac{dvd\dfrac{dz}{ds} - vd\dfrac{dz}{ds}}{\dfrac{dv}{dz}},$$

équations qui, pour $v = 0$, donnent, pour le premier élément de la brachystochrone, la même direction que celle assignée par les équations (1) pour l'élément de la ligne de plus grande pente absolue.

12. Considérons maintenant le cas où le mobile se trouve toujours sur une surface

$$F(x, y, z) = 0.$$

Alors, les équations de la brachystochrone peuvent être mises sous la forme d'une équation à trois membres parfaitement symétriques,

$$(1) \qquad \frac{\dfrac{d\frac{1}{v}}{dx} - \dfrac{d\frac{dx}{vds}}{ds}}{\dfrac{dF}{dx}} = \frac{\dfrac{d\frac{1}{v}}{dy} - \dfrac{d\frac{dy}{vds}}{ds}}{\dfrac{dF}{dy}} = \frac{\dfrac{d\frac{1}{v}}{dz} - \dfrac{d\frac{dz}{vds}}{ds}}{\dfrac{dF}{dz}}.$$

Pour le prouver, écrivons cette équation comme il suit :

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{d\frac{1}{v}}{dx} - \frac{d\frac{dx}{vds}}{ds} &= \chi\frac{dF}{dx},\\
\frac{d\frac{1}{v}}{dy} - \frac{d\frac{dy}{vds}}{ds} &= \chi\frac{dF}{dy},\\
\frac{d\frac{1}{v}}{dz} - \frac{d\frac{dz}{vds}}{ds} &= \chi\frac{dF}{dz};
\end{aligned}\right.$$

il suffira de faire voir que ces trois équations se réduisent a deux équations distinctes.

Ajoutons ces équations membre à membre, après les avoir respectivement multipliées par dx, dy, dz; il viendra, en remarquant que $F(x, y, z) = 0$, que, par suite, $\frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dy}dy + \frac{dF}{dz}dz = 0$, et que $\frac{d\frac{1}{v}}{dx}dx + \frac{d\frac{1}{v}}{dy}dy + \frac{d\frac{1}{v}}{dz}dz = d\frac{1}{v}$,

$$\begin{aligned}
d\frac{1}{v} &= \frac{dxd\frac{dx}{vds} + dyd\frac{dy}{vds} + dzd\frac{dz}{vds}}{ds}\\
&= \frac{\frac{1}{vds}(dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z) + (dx^2 + dy^2 + dz^2)\,d\frac{1}{vds}}{ds}\\
&= \frac{\frac{1}{vds}dsd^2s + ds^2d\frac{1}{vds}}{ds} = \frac{1}{vds}d^2s + dsd\frac{1}{vds}\\
&= d\left(\frac{1}{vds}ds\right) = d\frac{1}{v}.
\end{aligned}$$

On voit donc que l'une quelconque des trois équations ci-dessus pourrait se déduire des deux autres.

Ainsi, l'on pourra, suivant les cas particuliers que l'on aura à considérer, adopter pour les équations de la brachystochrone avec

$$F(x, y, z) = 0 \quad \text{et} \quad v = f(x, y, z),$$

l'une quelconque des trois équations que fournit l'équation à trois membres ci-dessus.

On peut déduire de ce qui précède les équations générales de la brachystochrone absolue; en effet, il est évident, par la nature même de la brachystochrone absolue, que cette courbe est aussi une brachystochrone sur toute surface $F = 0$ qui la contiendrait. Par conséquent, l'équation (1) doit être satisfaite pour un point quelconque de la brachystochrone absolue, quels que soient $\frac{dF}{dx}$, $\frac{dF}{dy}$, $\frac{dF}{dz}$; ce qui ne peut avoir lieu que si les trois numérateurs sont simultanément nuls, ou, ce qui revient au même, si $\chi = 0$. On retombe ainsi sur les équations trouvées directement au nº **10**.

13 Supposons d'abord que le mobile ait reçu une certaine vitesse initiale, et qu'il ne soit ensuite soumis à l'action d'aucune force; la brachystochrone se réduira à la ligne géodésique, laquelle sera représentée par les équations :

$$\left\{\begin{array}{l} F(x, y, z) = 0, \\ \dfrac{d\frac{dx}{ds}}{\frac{dF}{dx}} = \dfrac{d\frac{dy}{ds}}{\frac{dF}{dy}} = \dfrac{d\frac{dz}{ds}}{\frac{dF}{dz}}, \end{array}\right.$$

qu'il est aisé, du reste, de trouver directement.

14. On arrive encore aux équations de la ligne géodésique en supposant que le mobile est assujetti à rester sur une des surfaces de niveau $v =$ constante; car on aura

$$\frac{\frac{d\frac{1}{v}}{dx} - \frac{d\frac{dx}{vds}}{ds}}{\frac{dv}{dx}} = \frac{-\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} - \frac{d\frac{dx}{vds}}{ds}}{\frac{dv}{dx}} = -\frac{1}{v^2} - \frac{\frac{d\frac{dx}{vds}}{ds}}{\frac{dv}{dx}}.$$

Et comme le terme $-\frac{1}{v^2}$ sera commun aux trois membres de l'équation de la brachystochrone, cette équation deviendra

$$\frac{d\frac{dx}{vds}}{\frac{dv}{dx}} = \frac{d\frac{dy}{vds}}{\frac{dv}{dy}} = \frac{d\frac{dz}{vds}}{\frac{dv}{dz}};$$

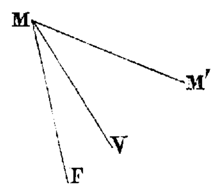
et comme v doit être regardé comme constant dans les différentielles totales indiquées ci-dessus, l'équation prendra la forme

$$\frac{d\frac{dx}{ds}}{\frac{dv}{dx}} = \frac{d\frac{dy}{ds}}{\frac{dv}{dy}} = \frac{d\frac{dz}{ds}}{\frac{dv}{ds}}.$$

équation de la géodésique sur la surface $v(x, y, z) =$ constante.

15. Convenons de nommer *lignes de plus grande pente* sur la surface $F(x, y, z) = 0$ les lignes de cette surface dont la tangente en chaque point fait le plus petit angle possible avec la normale à la surface de niveau qui passe par ce point, ou, ce qui revient au même, la ligne qui est, en chaque point, perpendiculaire à la courbe de niveau correspondante; ou encore l'enveloppe des projections sur la surface de la direction de la force en chaque point.

Soient $(\alpha\beta\gamma)$, $(\alpha'\beta'\gamma')$, $(\alpha''\beta''\gamma'')$ les angles formés respectivement avec les axes par les directions MV de la normale à la surface de niveau, MM′ de la ligne de plus grande pente, MF de la normale à la surface donnée. Soient, de plus, μ et μ' les angles que MV fait



respectivement avec MM′ et MF; le caractère géométrique de la direction MM′ sur la surface donnée sera

$$\mu + \mu' = \frac{\pi}{2}.$$

Cela posé, je dis que *la brachystochrone est en son point de départ,* ou plus généralement, *aux points où la vitesse du mobile se trouvera nulle, tangente à la ligne de plus grande pente.*

Et d'abord, en remarquant que l'on a

$$d\frac{dx}{v\,ds} - ds\frac{d\frac{1}{v}}{dx} = -\frac{dv}{v^2}\frac{dx}{ds} + \frac{1}{v}d\frac{dx}{ds} + ds\frac{\frac{dv}{dx}}{v^2},$$

les équations de la brachystochrone pourront se mettre sous la forme

$$\chi = \frac{-\dfrac{dx}{ds}\dfrac{dv}{ds} + v\,\dfrac{d\dfrac{dx}{ds}}{ds} + \dfrac{dv}{dx}}{\dfrac{d\mathrm{F}}{dx}} = \frac{-\dfrac{dy}{ds}\dfrac{dv}{ds} + v\,\dfrac{d\dfrac{dy}{ds}}{ds} + \dfrac{dv}{dy}}{\dfrac{d\mathrm{F}}{dy}} = \frac{-\dfrac{dz}{ds}\dfrac{dv}{ds} + v\,\dfrac{d\dfrac{dz}{ds}}{ds} + \dfrac{dv}{dz}}{\dfrac{d\mathrm{F}}{dz}};$$

et l'on voit que, pour les points où la vitesse sera nulle, la direction de la tangente sera déterminée par des équations de la forme

$$(1) \qquad \chi_0 = \frac{\dfrac{dv}{dx} - \dfrac{dx}{ds}\dfrac{dv}{ds}}{\dfrac{d\mathrm{F}}{dx}} = \frac{\dfrac{dv}{dy} - \dfrac{dy}{ds}\dfrac{dv}{ds}}{\dfrac{d\mathrm{F}}{dy}} = \frac{\dfrac{dv}{dz} - \dfrac{dz}{ds}\dfrac{dv}{ds}}{\dfrac{d\mathrm{F}}{dz}}.$$

Or je vais démontrer que ce sont là précisément les équations générales des lignes de plus grande pente.

En effet, si nous posons

$$\mathrm{V} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dz}\right)^2}$$

et

$$\mathrm{V}_1 = \sqrt{\left(\frac{d\mathrm{F}}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\mathrm{F}}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\mathrm{F}}{dz}\right)^2};$$

nous aurons

$$\cos\alpha = \frac{\dfrac{dv}{dx}}{\mathrm{V}}, \quad \cos\beta = \frac{\dfrac{dv}{dy}}{\mathrm{V}}, \quad \cos\gamma = \frac{\dfrac{dv}{dz}}{\mathrm{V}},$$

$$\cos\alpha' = \frac{dx}{ds}, \quad \cos\beta' = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\gamma' = \frac{dz}{dz};$$

$$\cos\alpha'' = \frac{\dfrac{d\mathrm{F}}{dx}}{\mathrm{V}_1}, \quad \cos\beta'' = \frac{\dfrac{d\mathrm{F}}{dy}}{\mathrm{V}_1}, \quad \cos\gamma'' = \frac{\dfrac{d\mathrm{F}}{dz}}{\mathrm{V}_1},$$

et enfin

$$\cos\mu = \frac{\dfrac{dv}{dx}\dfrac{dx}{ds} + \dfrac{dv}{dy}\dfrac{dy}{ds} + \dfrac{dv}{dz}\dfrac{dz}{ds}}{\mathrm{V}} = \frac{\dfrac{dv}{ds}}{\mathrm{V}}.$$

Alors les équations (1) deviendront

$$\chi_0 = \frac{\cos\alpha - \cos\mu\cos\alpha'}{\cos\alpha''} = \frac{\cos\beta - \cos\mu\cos\beta'}{\cos\beta''} = \frac{\cos\gamma - \cos\mu\cos\gamma'}{\cos\gamma''}.$$

De là on déduit

$$\chi_0 = \frac{\sqrt{(\cos\alpha - \cos\mu\cos\alpha')^2 + (\cos\beta - \cos\mu\cos\beta')^2 + (\cos\gamma - \cos\mu\cos\gamma')^2}}{\sqrt{\cos^2\alpha'' + \cos^2\beta'' + \cos^2\gamma''}}$$

$$= \frac{\sqrt{1 + \cos^2\mu - 2\cos^2\mu}}{1} = \sin\mu;$$

mais on a aussi

$$\chi_0 = \frac{(\cos\alpha - \cos\mu\cos\alpha')\cos\alpha + (\cos\beta - \cos\mu\cos\beta')\cos\beta + (\cos\gamma - \cos\mu\cos\gamma')\cos\gamma}{\cos\alpha''\cos\alpha + \cos\beta''\cos\beta + \cos\gamma''\cos\gamma}$$

$$= \frac{1 - \cos^2\mu}{\cos\mu'} = \frac{\sin^2\mu}{\cos\mu'} = \sin\mu\,\frac{\sin\mu}{\cos\mu'}.$$

En rapprochant l'une de l'autre ces deux valeurs de la même fonction χ_0, on en conclut

$$\sin\mu = \cos\mu',$$

et, par suite,

$$\mu + \mu' = \frac{\pi}{2},$$

ce qui est la propriété caractéristique des lignes de plus grande pente.

Les équations (1) peuvent donc être regardées comme les équations des lignes de plus grande pente; et, par suite, on voit que la brachystochrone est tangente à la ligne de plus grande pente qui passe par le point où la vitesse du mobile est nulle.

16. Les équations générales des brachystochrones peuvent, d'après ce qui précède, être mises sous la forme

$$\frac{v\,d\dfrac{dx}{ds}}{\dfrac{dF}{dx}} + \frac{\dfrac{dv}{dx} - \dfrac{dx}{ds}\dfrac{dv}{ds}}{\dfrac{dF}{dx}} = \frac{v\,d\dfrac{dy}{ds}}{\dfrac{dF}{dy}} + \frac{\dfrac{dv}{dy} - \dfrac{dy}{ds}\dfrac{dv}{ds}}{\dfrac{dF}{dy}} = \frac{v\,d\dfrac{dz}{ds}}{\dfrac{dF}{dz}} + \frac{\dfrac{dv}{dz} - \dfrac{dz}{ds}\dfrac{dv}{ds}}{\dfrac{dF}{dz}};$$

et l'on voit que l'on aura satisfait à ces équations si l'on a en même temps

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d\dfrac{dx}{ds}}{\dfrac{dF}{dx}} = \dfrac{d\dfrac{dy}{ds}}{\dfrac{dF}{dy}} = \dfrac{d\dfrac{dz}{ds}}{\dfrac{dF}{dz}}, \\ \text{et} \\ \dfrac{\dfrac{dv}{dx} - \dfrac{dx}{ds}\dfrac{dv}{ds}}{\dfrac{dF}{dx}} = \dfrac{\dfrac{dv}{dy} - \dfrac{dy}{ds}\dfrac{dv}{ds}}{\dfrac{dF}{dy}} = \dfrac{\dfrac{dv}{dz} - \dfrac{dz}{ds}\dfrac{dv}{ds}}{\dfrac{dF}{dz}}: \end{array}\right.$$

c'est-à-dire qu'une courbe qui, sur une surface donnée, pourra être à la fois ligne géodésique et ligne de plus grande pente, sera, par suite, une brachystochrone.

Ou, plus généralement, en considérant les lignes géodésiques, les brachystochrones et les lignes de plus grande pente sur une surface, on voit qu'une ligne qui jouirait des propriétés des courbes appartenant à deux de ces genres, jouirait aussi des propriétés des courbes du troisième genre.

Tels sont, dans le cas de la pesanteur, les méridiens sur une surface de révolution; les arêtes d'un cylindre droit quelconque, etc. (n^{os} **3**, **5**, **6**).

17. *La résultante* N *des forces appliquées, estimée suivant la direction du rayon de courbure, est égale, en grandeur absolue, dans les brachystochrones planes, et dans les brachystochrones absolues, à la force centrifuge* $\frac{v^2}{r}$.

Calculons d'abord la résultante N.

En remarquant que le rayon de courbure

$$r = \frac{ds}{\sqrt{\left(d\dfrac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\dfrac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d\dfrac{dz}{ds}\right)^2}},$$

et que les trois angles que sa direction fait avec les trois axes ont respectivement pour cosinus

$$r\frac{d\dfrac{dx}{ds}}{ds},\quad r\frac{d\dfrac{dy}{ds}}{ds},\quad r\frac{d\dfrac{dz}{ds}}{ds},$$

on aura

$$\mathrm{N} = vr\left\{\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds}\frac{dv}{dx} + \frac{d\frac{dy}{ds}}{ds}\frac{dv}{dy} + \frac{d\frac{dz}{ds}}{ds}\frac{dv}{dz}\right\}.$$

Maintenant, dans l'équation générale des brachystochrones

$$\chi = \frac{v\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds} - \frac{dv}{ds}\frac{dx}{ds} + \frac{dv}{dx}}{\frac{d\mathrm{F}}{dx}} = \frac{v\frac{d\frac{dy}{ds}}{ds} - \frac{dv}{ds}\frac{dy}{ds} + \frac{dv}{dy}}{\frac{d\mathrm{F}}{dy}} = \frac{v\frac{d\frac{dz}{ds}}{ds} - \frac{dv}{ds}\frac{dz}{ds} + \frac{dv}{dz}}{\frac{d\mathrm{F}}{dz}},$$

multiplions les deux termes de chaque rapport respectivement par $\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds}$, $\frac{d\frac{dy}{ds}}{ds}$, $\frac{d\frac{dz}{ds}}{ds}$, et ajoutons terme à terme. Remarquons, d'ailleurs, qu'en appelant θ l'angle que la normale à la surface fait avec la direction du rayon de courbure, on a

$$\cos\theta = \frac{\frac{d\mathrm{F}}{dx}d\frac{dx}{ds} + \frac{d\mathrm{F}}{dy}d\frac{dy}{ds} + \frac{d\mathrm{F}}{dz}d\frac{dz}{ds}}{\sqrt{\left(\frac{d\mathrm{F}}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\mathrm{F}}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\mathrm{F}}{dz}\right)^2}\sqrt{\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dz}{ds}\right)^2}},$$

ou bien

$$\cos\theta = \frac{\frac{d\mathrm{F}}{dx}d\frac{dx}{ds} + \frac{d\mathrm{F}}{dy}d\frac{dy}{ds} + \frac{d\mathrm{F}}{dz}d\frac{dz}{ds}}{\mathrm{A}},$$

en désignant, pour abréger, le dénominateur par A. Il viendra, après quelques réductions,

$$\chi = \frac{v\left[\left(\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\frac{dy}{ds}}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\frac{dz}{ds}}{ds}\right)^2\right] + \frac{d\frac{dx}{ds}}{ds}\frac{dv}{dx} + \frac{d\frac{dy}{ds}}{ds}\frac{dv}{dy} + \frac{d\frac{dz}{ds}}{ds}\frac{dv}{dz}}{\mathrm{A}\cos\theta},$$

ou bien

$$\chi = \frac{v\frac{1}{r^2} + \mathrm{N}\frac{1}{vr}}{\mathrm{A}\cos\theta} = \frac{1}{\mathrm{A}vr}\,\frac{\mathrm{N} + \frac{v^2}{r}}{\cos\theta}.$$

Or, pour les brachystochrones planes, on a évidemment

$$\cos\theta = 0;$$

d'autre part, ainsi qu'il a été dit au dernier paragraphe du n° **12**, on a, pour les brachystochrones absolues,

$$\chi = 0.$$

Dans les deux cas, on aura donc

$$-\mathrm{N} = \frac{v^2}{r},$$

ce qui démontre le théorème énoncé [*].

18. *Supposons, sur une surface* F $(x, y, z) = 0$, *une série de brachystochrones issues d'un même point* A; *soient* AM, AM',... *des arcs parcourus dans le même temps, la vitesse initiale étant supposée la même; le lieu des points* M, M',... *sera une trajectoire normale à chaque brachystochrone* [**].

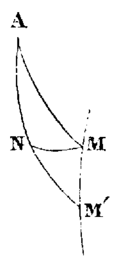
Caractérisons chaque brachystochrone, par exemple par l'angle φ qu'elle fait, au point de départ, avec une brachystochrone particulière, ou par une fonction de cet angle; un point particulier M d'une brachystochrone pourra être caractérisé par le temps t de la

---

[*] Ce théorème, en ce qui concerne les brachystochrones planes, est dû à Euler, qui l'a regardé comme exprimant la propriété caractéristique de ces courbes. (*Mechanica*, tome II.)

[**] Ce théorème m'a été communiqué par M. J. Bertrand, qui le démontre ainsi qu'il suit :

Si l'angle en M' est aigu, on peut faire en M un angle NMM' > NM'M ; on aura



alors MN < M'N : alors le mobile, arrivé en N avec une certaine vitesse, pourra parcourir (sa vitesse ne changeant pas sensiblement) l'élément NM en moins de temps qu'il n'en mettrait à parcourir l'élément NM', d'où il résulterait que la ligne ANM serait parcourue en moins de temps que la ligne ANM' ou AM ; ce qui est absurde.

descente de A en M. On pourra donc se représenter les coordonnées de chaque point M de la surface, comme fonctions de deux variables indépendantes (t, φ).

Cela étant, si l'on pose

$$S = \frac{dx}{dt}\frac{dx}{d\varphi} + \frac{dy}{dt}\frac{dy}{d\varphi} + \frac{dz}{dt}\frac{dz}{d\varphi},$$

S sera une fonction qui deviendra nulle en même temps que le cosinus de l'angle que font en M la brachystochrone AM et la trajectoire MM'; or on aura, en différentiant par rapport à t,

$$\frac{dS}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{d\varphi} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{d\varphi} + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{dz}{d\varphi} + \frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{d\varphi\, dt} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{d^2y}{d\varphi\, dt} + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{d^2z}{d\varphi\, dt}.$$

ou bien

$$\frac{dS}{dt} = \left(\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{d\varphi} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{d\varphi} + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{dz}{d\varphi}\right) + v\frac{dv}{d\varphi}.$$

Rappelons-nous, maintenant, les équations de la brachystochrone, et remarquons qu'en mettant en évidence la variable t, l'expression

$$\frac{d\frac{dx}{vds} - ds\frac{d\frac{1}{v}}{dx}}{\frac{dF}{dx}}$$

peut être mise sous la forme

$$\frac{d\frac{1}{v^2}\frac{dx}{dt} - vdt\frac{d\frac{1}{v}}{dx}}{\frac{dF}{dx}},$$

ou bien

$$\frac{\left(\frac{1}{v^2}\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{2}{v^3}\frac{dv}{dt}\frac{dx}{dt} + \frac{1}{v}\frac{dv}{dx}\right)dt}{\frac{dF}{dx}}.$$

Les équations de la brachystochrone deviendront alors

$$\frac{\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{2}{v}\frac{dv}{dt}\frac{dx}{dt} + v\frac{dv}{dx}}{\frac{dF}{dx}} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{2}{v}\frac{dv}{dt}\frac{dy}{dt} + v\frac{dv}{dy}}{\frac{dF}{dy}} = \frac{\frac{d^2z}{dt^2} - \frac{2}{v}\frac{dv}{dt}\frac{dz}{dt} + v\frac{dv}{dz}}{\frac{dF}{dz}},$$

et elles donneront, en multipliant respectivement les termes de chaque rapport par $\frac{dx}{d\varphi}$, $\frac{dy}{d\varphi}$, $\frac{dz}{d\varphi}$, et remarquant que la somme des dénominateurs est alors nulle, et que, par suite, la somme des numérateurs doit l'être,

$$0 = \left(\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{d\varphi} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{d\varphi} + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{dz}{d\varphi}\right) - \frac{2}{v}\frac{dv}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\frac{dx}{d\varphi} + \frac{dy}{dt}\frac{dy}{d\varphi} + \frac{dz}{dt}\frac{dz}{d\varphi}\right)$$
$$+ v\left(\frac{dv}{dx}\frac{dx}{d\varphi} + \frac{dv}{dy}\frac{dy}{d\varphi} + \frac{dv}{dz}\frac{dz}{d\varphi}\right),$$

ou bien

$$0 = \left(\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{d\varphi} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{d\varphi} + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{dz}{d\varphi}\right) - \frac{2}{v}\frac{dv}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\frac{dx}{d\varphi} + \frac{dy}{dt}\frac{dy}{d\varphi} + \frac{dz}{dt}\frac{dz}{d\varphi}\right) + v\frac{dv}{d\varphi},$$

$$0 = \frac{dS}{dt} - \frac{2}{v}\frac{dv}{dt}S,$$

et, par suite,

$$\frac{\frac{dS}{dt}}{S} = 2\frac{\frac{dv}{dt}}{v}.$$

L'intégration de cette équation donnera, en représentant par K une certaine fonction de φ seulement,

$$(1) \qquad S = Kv^2.$$

Supposons maintenant que les mobiles partent tous du même point avec la même vitesse initiale v_0, dans des directions différentes; il est clair alors que les arcs infiniment petits AM, AM',..., parcourus dans le même temps avec une même vitesse, auront même longueur, et que, par suite, la trajectoire MM',... sera un cercle décrit dans le plan tangent en A, et ayant son centre en A. On aura donc, pour $v = v_0$, $S_0 = 0$, quel que soit φ; ce qui exige que K soit nul, quel que soit φ. Et comme d'ailleurs K ne dépend pas du temps, on aura identiquement $K = 0$, et, par suite, $S = 0$, pour toutes les trajectoires; ce qui démontre le théorème énoncé.

Si la vitesse initiale v_0 était nulle, les brachystochrones seraient, au point de départ, tangentes entre elles et à la ligne de plus grande pente. Dans ce cas, la trajectoire MM'... est un arc infiniment petit (du second ordre) d'un cercle d'un rayon infiniment petit (du premier ordre), ayant le point A pour centre; et le théorème énoncé s'applique encore.

19. Le théorème précédent peut s'étendre à des brachystochrones non issues du même point, toutes les fois qu'il existe une trajectoire qui rencontre normalement ces courbes en des points où les mobiles parcourants ont la même vitesse v_0; les arcs AM, AM',... étant alors remplacés par les arcs parcourus dans le même temps à partir de la trajectoire orthogonale.

Il est, en effet, aisé de voir que les raisonnements qui conduisent à l'équation (1) s'appliquent encore ici; seulement la variable φ désignerait alors, par exemple, la longueur de l'arc de la trajectoire compris entre un point déterminé de cette courbe et le point où elle est rencontrée par la brachystochrone que l'on veut caractériser. Cela posé, S devant être nul pour la valeur particulière v_0, K sera nul identiquement, et l'on aura toujours $S = 0$ pour une valeur quelconque de v.

20. Si l'on suppose que la vitesse du mobile soit constante (n° **13**) les brachystochrones deviendront des lignes géodésiques, et il est évident que les théorèmes que nous venons de démontrer auront leurs correspondants relativement à ce nouveau genre de lignes [*].

21. Supposons maintenant que l'on mène, à partir d'une certaine surface, toutes les brachystochrones absolues normales à cette surface; les extrémités M, M',... des arcs parcourus dans le même temps formeront une surface dont chaque élément, tel que MM', sera normal à la brachystochrone correspondante AM.

Donc chaque brachystochrone sera normale à la surface lieu des trajectoires.

Pour les lignes géodésiques, cela revient à dire qu'en prolongeant d'une même longueur toutes les normales à une surface donnée, on obtient de nouvelles surfaces ayant les mêmes normales.

---

[*] Ces théorèmes, dans le cas des lignes géodésiques, ont été établis par M. Gauss, dans ses recherches sur la Théorie générale des surfaces. (*Mémoires de la Société de Gottingue*, tome VI, 1823-1827.)

22. Revenons au cas où la force donnée est la pesanteur.

On a

$$v = \sqrt{2g(z - z_0)}, \quad \frac{d\frac{1}{v}}{dx} = 0, \quad \frac{d\frac{1}{v}}{dy} = 0,$$

et l'équation générale des brachystochrones devient

$$\frac{d\dfrac{dx}{ds\sqrt{z - z_0}}}{\dfrac{dF}{dx}} = \frac{d\dfrac{dy}{ds\sqrt{z - z_0}}}{\dfrac{dF}{dy}} = \frac{d\dfrac{dz}{ds\sqrt{z - z_0}} - \dfrac{ds}{dz}\,d\dfrac{1}{\sqrt{z - z_0}}}{\dfrac{dF}{dz}}.$$

Si la surface $F(x, y, z) = 0$ est supposée être un plan vertical, par exemple $y = 0$, on a alors les deux équations

$$d\frac{dx}{ds\sqrt{z - z_0}} = 0, \quad d\frac{dz}{ds\sqrt{z - z_0}} - \frac{ds}{dz}\,d\frac{1}{\sqrt{z - z_0}} = 0.$$

La première de ces deux équations représente, ainsi qu'on l'a déjà vu, une cycloïde; la seconde doit donc évidemment représenter la même courbe.

Si la surface $F(x, y, z) = 0$ est un cylindre droit

$$F(x, y) = \text{constante},$$

l'une des équations de la brachystochrone sera

$$d\frac{dz}{ds\sqrt{z - z_0}} - \frac{ds}{dz}\,d\frac{1}{\sqrt{z - z_0}} = 0, \tag{1}$$

et cette équation ne changera pas quand on développera le cylindre sur le plan des xz. Or, sous cette forme, et sur le plan des xz, elle représente, comme on vient de le voir, la brachystochrone plane: ainsi, la brachystochrone cylindrique se développe suivant la brachystochrone plane.

Il est clair, d'ailleurs, que la démonstration synthétique donnée (n° **8**) pour un cylindre circulaire s'applique à un cylindre droit quelconque.

23. Considérons maintenant le cas particulier où la force qui sol-

9..

licite le mobile est constamment dirigée vers un centre fixe, cette force étant supposée une certaine fonction de la distance r.

La vitesse v sera alors une fonction connue de la distance; soit

$$\frac{1}{v} = \varphi(r). \tag{1}$$

Or on a, en prenant le centre d'attraction pour origine des coordonnées,

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

d'où

$$\frac{dr}{dx} = \frac{x}{r}, \quad \frac{dr}{dy} = \frac{y}{r}, \quad \frac{dr}{dz} = \frac{z}{r};$$

les équations de la brachystochrone absolue seront donc, avec l'équation (1), et en observant que $\frac{d\frac{1}{v}}{dx} = \frac{d\varphi(r)}{dx} = \varphi'(r)\frac{x}{r}$,

$$\left\{\begin{aligned} \varphi'(r)\frac{x}{r} &= \frac{d\frac{dx}{vds}}{ds}, \\ \varphi'(r)\frac{y}{r} &= \frac{d\frac{dy}{vds}}{ds}, \\ \varphi'(r)\frac{z}{r} &= \frac{d\frac{dz}{vds}}{ds}, \end{aligned}\right.$$

d'où

$$\frac{x}{y} = \frac{d\frac{dx}{vds}}{d\frac{dy}{vds}},$$

et, par suite,

$$xd\frac{dy}{vds} - yd\frac{dx}{vds} = 0,$$

et en intégrant,

$$\left\{\begin{aligned} &xdy - ydx = c''vds, \\ &\text{on aurait de même,} \\ &ydz - zdy = c\,vds, \\ &zdx - xdz = c'vds. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Multipliant ces trois équations respectivement par z, x, y, et ajoutant les produits, il viendra

$$o = v ds\,(c''z + cx + c'y),$$

ou

$$cx + c'y + c''z = o,$$

équation d'un plan qui passe par l'origine des coordonnées. Ainsi, la courbe est tout entière dans le plan qui passe par le point de départ, le point d'arrivée et le centre d'attraction; ce qu'il était facile de prévoir.

En prenant ce plan pour plan des zx, la courbe sera représentée par les deux équations

$$v \text{ ou } \frac{ds}{dt} = \frac{1}{\varphi(r)},$$

$$zdx - xdz = \mathrm{A} v ds;$$

en coordonnées polaires (r, θ), cette équation devient

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = \mathrm{A} v^2, \tag{3}$$

et elle montre que, lorsqu'un point mobile est assujetti à suivre la brachystochrone sous l'influence d'une force émanée du point O, *l'aire décrite par le rayon vecteur dans un temps infiniment petit est proportionnelle au carré de la vitesse.*

Il est clair que la projection de la même aire sur un plan quelconque suit la même loi; ce qu'on pourrait d'ailleurs démontrer aisément au moyen des équations (2).

Nous supposerons que la vitesse initiale soit nulle. Dans ce cas, on voit, par l'équation (3), que *la brachystochrone est tangente au rayon vecteur qui passe par le point de départ.* En effet, cette équation donne $\frac{d\theta}{dt} = o$, à l'origine du mouvement.

On peut voir aussi que, *lorsque les points de départ et d'arrivée sont situés sur une même droite passant par l'origine, la brachystochrone n'est autre chose que cette droite.*

Car on a

$$\frac{d\theta}{dt} = \mathrm{A}\,\frac{v^2}{r^2},$$

et l'équation (1) deviendra

$$\lambda = A\nu.$$

d'où

$$\theta_1 - \theta_0 = A\int_{r_0}^{r_1} \frac{\nu^2}{r^2}\, dt,$$

l'intégrale étant prise depuis le point de départ jusqu'au point d'arrivée. Or ici $\theta_1 = \theta_0$, donc $A = 0$; et l'équation de la brachystochrone se réduit à

$$\frac{d\theta}{dt} = 0,$$

d'où

$$\theta = \theta_0 = \theta_1,$$

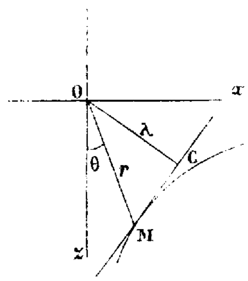
équation de la droite sur laquelle se trouvent, d'après l'hypothèse, le point de départ et celui d'arrivée.

On remarquera que ce théorème est un cas particulier de celui qui a été démontré (n° **16**).

24. L'équation

(1) $$r^2 \frac{d\theta}{dt} = A\nu^2$$

peut être mise sous une autre forme.



Soit $OC = \lambda$ la perpendiculaire abaissée du centre sur la tangente MC; on aura

$$\lambda = r \sin OMC.$$

Mais on sait que

$$\sin OMC = r\frac{d\theta}{ds};$$

par suite,

$$\lambda = r^2 \frac{d\theta}{ds},$$

On voit donc que *la vitesse en chaque point est proportionnelle à la longueur de la perpendiculaire abaissée du centre d'attraction sur la tangente* [*].

25. Sans pousser plus loin l'étude des différents cas particuliers qui peuvent se présenter, nous nous bornerons à déduire ici le cas de la pesanteur de celui que nous venons d'examiner.

Il suffit de supposer que le centre d'attraction C est à l'infini, et que la force est constante.

Adoptons d'abord une origine fixe O, et soit c l'ordonnée verticale du centre d'attraction supposé placé sur l'axe des z. Un calcul analogue à celui du n° **23** conduirait à l'équation suivante pour la brachystochrone,

$$(z - c)\,dx - xdz = \mathrm{A}v\,ds.$$

D'ailleurs, si la force est constante et égale à g, on aura

$$\mathrm{X} = g\,\frac{x}{r},\quad \mathrm{Z} = g\,\frac{z-c}{r};$$

et, par suite,

$$v = \sqrt{2g\,(r_0 - r)},$$

et l'équation de la brachystochrone deviendra

$$(z - c)\,dx - xdz = \mathrm{A}'ds\sqrt{r_0 - r},$$

dans laquelle A′ est une certaine fonction de c.

A la limite, cette équation devient

$$(1)\qquad dx = \mathrm{A}''ds\sqrt{z - z_0},$$

en posant $-\mathrm{A}'' =$ limite de $\frac{\mathrm{A}'}{c}$ pour $c = \infty$, et en remarquant que $\sqrt{r_0 - r}$ a pour limite $\sqrt{z - z_0}$.

Or l'équation (1) n'est autre chose que l'équation différentielle de la cycloïde.

[*] Ce théorème a été démontré par Euler dans le second volume de sa *Mécanique*.