JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

JOACHIMSTHAL

Sur les normales infiniment voisines d'une surface courbe

Journal de mathématiques pures et appliquées 1^{re} série, tome 13 (1848), p. 415-422.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1848_1_13__415_0>

SUR LES

NORMALES INFINIMENT VOISINES D'UNE SURFACE COURBE;

PAR M. JOACHIMSTHAL (DE BERLIN).

I.

En désignant par f et g deux points infiniment proches, mais d'ailleurs quelconques d'une surface, par F et G les normales à la surface en ces points, je vais déterminer :

1°. La plus courte distance entre F et G;

2°. Le point o où cette distance rencontre la normale F;

3°. La distance of.

Je nommerai o le pôle et of la distance polaire de l'élément fg; pour un élément tangent à une ligne de courbure, le pôle et la distance polaire deviendront le centre et le rayon de courbure de la section principale qui passe par fg et la normale F.

Soient d'abord f et g deux points dans deux plans quelconques A et B, et F et G les perpendiculaires sur ces plans en ces points; la plus courte distance λ entre ces droites sera donnée par la formule

$$\lambda = \overline{fg}.\cos(\lambda, \overline{fg}).$$

Mais la plus courte distance λ étant parallèle aux plans A et B sera de même parallèle à leur intersection, et l'angle $(\lambda, \overline{fg})$ sera égal à l'angle entre cette droite d'intersection et $\overline{fg}$.

Soient A et B deux plans tangents à une surface en deux points infiniment proches f et g; l'intersection de A et B sera la tangente conjuguée à l'élément fg, et la plus courte distance λ entre deux normales infiniment voisines l'une de l'autre s'exprimera par

(1) $$\lambda = \cos\omega\, ds,$$

ω étant l'angle entre l'élément ds déterminé par les pieds des normales et sa direction conjuguée.

D'après les beaux théorèmes de M. Dupin, les directions des tangentes conjuguées au point f d'une surface courbe coïncident avec les directions des diamètres conjugués de la conique

$$\frac{\xi^2}{P} + \frac{\eta^2}{Q} = 1,$$

P et Q étant les rayons de courbure de la surface en f, et ayant pris les tangentes aux lignes de courbure pour les axes de ξ et η.

Donc, l'angle de l'élément ds et de l'une des lignes de courbure étant égal à a, on aura, par les formules connues sur les diamètres conjugués,

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \cos\omega &= \pm \cos a \sin a \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{Q}\right) \frac{1}{\left(\frac{\cos^2 a}{P^2} + \frac{\sin^2 a}{Q^2}\right)^{\frac{1}{2}}}, \\ \sin\omega &= \left(\frac{\cos^2 a}{P} + \frac{\sin^2 a}{Q}\right) \frac{1}{\left(\frac{\cos^2 a}{P^2} + \frac{\sin^2 a}{Q^2}\right)^{\frac{1}{2}}}, \end{aligned}\right.$$

d'où vient

$$(3)\quad \lambda = \pm \cos a \sin a \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{Q}\right) \frac{ds}{\left(\frac{\cos^2 a}{P^2} + \frac{\sin^2 a}{Q^2}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Pour les lignes de courbure, l'angle a est ou égal à zéro, ou égal à un angle droit; donc on aura $\lambda = 0$, c'est-à-dire les normales aux extrémités d'un élément d'une ligne de courbure se rencontrent.

Pour obtenir les valeurs maxima de λ, il faut différentier λ par rapport à a, et on obtient

$$0 = (\cos^2 a - \sin^2 a)\left(\frac{\cos^2 a}{P^2} + \frac{\sin^2 a}{Q^2}\right) - \cos a^2 \sin a^2 \left(\frac{1}{Q^2} - \frac{1}{P^2}\right),$$

ou, en réduisant,

$$0 = \frac{\cos^4 a}{P^2} - \frac{\sin^4 a}{Q^2},$$

ce qui revient à la formule

$$(4)\quad \operatorname{tang}^4 a = \frac{Q^2}{P^2}.$$

Si on suppose les rayons P et Q de même signe, on en conclut

(5) $$\operatorname{tang}^2 a = \frac{Q}{P},$$

donc

(6) $$\sin^2 a = \frac{Q}{P+Q}, \quad \cos^2 a = \frac{P}{P+Q}, \quad \frac{\cos^2 a}{P^2} + \frac{\sin^2 a}{Q^2} = \frac{1}{PQ}.$$

Soit ρ le rayon de courbure de la section normale faite suivant l'élément ds; on a, par le théorème d'Euler,

(7) $$\rho = \frac{1}{\frac{\cos^2 a}{P} + \frac{\sin^2 a}{Q}}.$$

Mais en substituant les valeurs de $\cos^2 a$ et de $\sin^2 a$ que nous venons de trouver, les formules (3) et (7) deviendront

(8) $$\left\{\begin{aligned} \lambda &= \pm \frac{Q-P}{Q+P} ds, \\ \rho &= \tfrac{1}{2}(P+Q). \end{aligned}\right.$$

Donc, la valeur maximum de λ correspond à l'élément d'une section normale dont le rayon de courbure est le moyen entre les rayons des principales.

Si les rayons P et Q sont de signe contraire, on déduit de l'équation (4),

$$\operatorname{tang}^2 a = -\frac{Q}{P}$$

et

$$\cos^2 a = \frac{P}{P-Q}, \quad \sin^2 a = -\frac{Q}{P-Q}.$$

Par la substitution de ces valeurs, on trouve

(9) $$\left\{\begin{aligned} \lambda &= ds, \\ \rho &= \text{à l'infini}. \end{aligned}\right.$$

Donc, pour les surfaces qui ont les courbures principales dirigées en sens contraire, le maximum de λ correspond aux sections normales dont la courbure s'évanouit, et, pour ce cas, la plus courte distance coïncide avec l'élément ds. En résumant ce que nous venons de démontrer, nous aurons le théorème suivant :

THÉORÈME. Étant décrite sur une surface autour d'un point f et avec le rayon infiniment petit B, la circonférence de cercle $gg'g''\ldots$, si en tous ces points on mène les normales à la surface F, G, G', G'',... et les plus courtes distances entre F et G, G', G'',..., que je désignerai par l, l', l'',....

1°. Une quelconque des distances l sera égale au rayon B multiplié par le cosinus de l'angle entre fg (le rayon) et la direction conjuguée;

2°. Les rayons principaux de la surface étant de même signe P et Q, les valeurs maxima des distances l correspondront aux directions suivant lesquelles le rayon de la section normale est égal à $\frac{1}{2}(P+Q)$, et la valeur maxima sera égale à $\pm B\frac{Q-P}{Q+P}$;

3°. Les rayons principaux étant de signe contraire, les valeurs maxima de l correspondront aux directions suivant lesquelles le rayon de la section normale est infini, et la plus courte distance coïncidera avec le rayon.

Je vais maintenant déterminer le pôle d'un élément ds.

II.

Soient

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{X-l}{a}=\frac{Y-m}{b}=\frac{Z-n}{c},\\ &\frac{X-l-l'}{a+a'}=\frac{Y-m-m'}{b+b'}=\frac{Z-n-n'}{c+c'},\end{aligned}\right.$$

les équations de deux droites quelconques; l'équation d'un plan parallèle à ces droites sera

$$(11)\qquad (bc'-cb')X+(ca'-ac')Y+(ab'-ba')Z=C,$$

et l'équation du plan perpendiculaire au plan (11) et qui passe par la seconde droite (10), sera

$$(12)\quad L(X-l-l')+M(Y-m-m')+N(Z-n-n')=0,$$

les rapports L, M, N étant donnés par les équations

$$(13)\quad \begin{cases} \mathrm{L}(a+a')+\mathrm{M}(b+b')+\mathrm{N}(c+c')=0, \\ \mathrm{L}(bc'-cb')+\mathrm{M}(ca'-ac')+\mathrm{N}(ab'-ba')=0. \end{cases}$$

Il en résulte

$$\begin{aligned} f\mathrm{L} &= a\,(a'^2+b'^2+c'^2+aa'+bb'+cc') \\ &\quad - a'(a^2+b^2+c^2+aa'+bb'+cc'), \\ f\mathrm{M} &= b\,(a'^2+b'^2+c'^2+aa'+bb'+cc') \\ &\quad - b'(a^2+b^2+c^2+aa'+bb'+cc'), \\ f\mathrm{N} &= c\,(a'^2+b'^2+c'^2+aa'+bb'+cc') \\ &\quad - c'(a^2+b^2+c^2+aa'+bb'+cc'), \end{aligned}$$

f étant un facteur indéterminé.

Le plan (12) et la plus courte distance des droites (10) couperont la première de ces droites au même point, dont je désignerai les coordonnées par X, Y, Z. On aura évidemment

$$(14)\quad \begin{cases} \mathrm{X}=l+a\sigma, \\ \mathrm{Y}=m+b\sigma, \quad \sigma=(a\mathrm{L}+b\mathrm{M}+c\mathrm{N})=l'\mathrm{L}+m'\mathrm{M}+n'\mathrm{N}, \\ \mathrm{Z}=n+c\sigma, \end{cases}$$

ou bien, en faisant

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2 &= h, \\ aa'+bb'+cc' &= i, \\ a'^2+b'^2+c'^2 &= k, \end{aligned}$$

$$(15)\quad \begin{cases} \sigma(hk-i^2)=(al'+bm'+cn')(i+k) \\ \qquad\qquad -(a'l'+b'm'+c'n')(h+i). \end{cases}$$

Supposons que les deux droites soient deux normales voisines de la surface représentées par l'équation différentielle

$$(16)\qquad dz=p\,dx+q\,dy;$$

il faut mettre

$$\begin{aligned} &a=p, && b=q, && c=-1, && l=x, && m=y, && n=z; \\ &a'=dp, && b'=dq, && c'=0, && l'=dx, && m'=dy, && n'=dz. \end{aligned}$$

Par ces valeurs, on obtient

$$\sigma = -\frac{(dp\,dx + dq\,dy)(1+p^2+q^2)}{dq^2+dp^2+(p\,dq-q\,dp)^2} = -\frac{(dp\,dx+dq\,dy)(1+p^2+q^2)}{(1+p^2)\,dq^2-2pq\,dp\,dq+(1+q^2)\,dp^2},$$

et, en mettant

$$dp = r\,dx + s\,dy,$$
$$dq = s\,dx + t\,dy,$$

on aura

$$(17)\qquad \begin{cases} X = x + p\sigma, \\ Y = y + q\sigma, \\ Z = z - \sigma, \\ \sigma = -(1+p^2+q^2)\dfrac{r\,dx^2+2s\,dx\,dy+t\,dy^2}{(1+p^2)\,dq^2-2pq\,dp\,dq+(1+q^2)\,dp^2}. \end{cases}$$

Telles sont les coordonnées du pôle d'un élément de la surface.

III.

Pour déterminer la distance polaire Δ ou la distance du pôle (X, Y, Z) au point de la surface (x, y, z), je ferai coïncider les axes des coordonnées z, x, y respectivement avec les normales et les deux tangentes des sections principales; on a, par cette supposition,

$$x=0,\quad y=0,\quad z=0,\quad p=0,\quad q=0,\quad s=0,$$

et

$$Z = \Delta = -\sigma,$$

ou bien

$$\Delta = \frac{r\,dx^2+t\,dy^2}{t^2\,dy^2+r^2\,dx^2} = \frac{r+t\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}{r^2+t^2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}.$$

Soient P et Q les rayons principaux de la surface, et a l'angle entre l'élément de la surface et l'axe des x; on aura

$$r = \frac{1}{P},\quad t = \frac{1}{Q},\quad \frac{dy}{dx} = \text{tang}\, a,$$

par conséquent

$$(18)\qquad \Delta = \frac{\dfrac{\cos^2 a}{P}+\dfrac{\sin^2 a}{Q}}{\dfrac{\cos^2 a}{P^2}+\dfrac{\sin^2 a}{Q^2}}.$$

En gardant les mêmes désignations que ci-dessus, on a, par les formules (2) et (7),

(19) $$\Delta = \rho \sin^2 \omega.$$

Soient Δ_1, ρ_1 les quantités analogues pour un élément de la surface perpendiculaire au premier, et Δ', ρ' pour l'élément conjugué au premier; on aura

$$\Delta = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{1}{\frac{\cos^2 a}{P^2} + \frac{\sin^2 a}{Q^2}},$$

donc

$$\frac{1}{\Delta\rho} = \frac{\cos^2 a}{P^2} + \frac{\sin^2 a}{Q^2},$$

et, par conséquent,

(20) $$\frac{1}{\Delta\rho} + \frac{1}{\Delta_1\rho_1} = \frac{1}{P^2} + \frac{1}{Q^2}.$$

Pour l'élément conjugué, on aura

$$\Delta' = \rho' \sin^2 \omega,$$

d'où vient

(21) $$\frac{\Delta}{\Delta'} = \frac{\rho}{\rho'},$$

c'est-à-dire que, pour deux éléments conjugués, les distances polaires sont entre elles comme les rayons des sections normales.

Comme ρ et ρ' sont égaux aux carrés des demi-diamètres conjugués de la conique

(21 *bis*) $$\frac{\xi^2}{P} + \frac{\eta^2}{Q} = 1,$$

on aura

(22) $$\begin{cases} \rho + \rho' = P + Q, \\ \rho\rho' \sin^2 \omega = PQ, \end{cases}$$

ou, en ayant égard à l'équation (19),

(23) $$\Delta = \frac{PQ}{P + Q - \rho},$$

relation très-simple entre la distance polaire et le rayon de la section normale qui passe par le même élément.

On a, pour deux directions conjuguées,

$$\frac{1}{\Delta} + \frac{1}{\Delta'} = \frac{1}{\rho \sin^2 \omega} + \frac{1}{\rho' \sin^2 \omega},$$

et, en réduisant au moyen des formules (22),

$$(24) \qquad \frac{1}{\Delta} + \frac{1}{\Delta'} = \frac{1}{P} + \frac{1}{Q}.$$

Donc, pour deux éléments conjugués la somme des valeurs réciproques des distances polaires reste constante.

Soient f un point de la surface, f' le quatrième point harmonique par rapport à f et aux deux centres de courbure; on aura

$$(25) \qquad \frac{2}{ff'} = \frac{1}{P} + \frac{1}{Q},$$

d'où vient

$$(26) \qquad \frac{2}{ff'} = \frac{1}{\Delta} + \frac{1}{\Delta'}:$$

ou bien :

Les points f et f' et les pôles de deux éléments conjugués sont quatre points harmoniques.

Il suit de là :

Les pôles de six éléments conjugués deux à deux sont six points en involution.

Soit d le demi-diamètre de la conique (21 *bis*) dont le carré est égal au rayon de courbure ρ; on aura

$$\Delta = d^2 \sin^2 \omega.$$

Mais, ω étant l'angle entre le diamètre $2d$ et la tangente à son extrémité, $d \sin \omega$ sera égal à la perpendiculaire abaissée du centre de la conique sur la tangente.

Donc :

La distance polaire est égale au carré de la perpendiculaire abaissée du centre de la conique (21 *bis*) sur la tangente à l'extrémité du demi-diamètre $\sqrt{\rho}$.