JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

A.-H. DESBOVES

Démonstration de deux théorèmes de M. Jacobi. - Application au problème des perturbations planétaires

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 13 (1848), p. 397-411.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1848_1_13__397_0>

Démonstration de deux théorèmes de M. Jacobi. — *Application au problème des perturbations planétaires;*

Par M. A.-H. DESBOVES.

(Thèse d'Astronomie présentée à la Faculté des Sciences de Paris, le 3 avril 1848.)

I.

Lorsque le principe des forces vives a lieu, les équations du mouvement d'un ou de plusieurs points libres peuvent se mettre sous la forme

$$\frac{d^2x}{dt^2} = m\frac{dU}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = m\frac{dU}{dy}, \quad \text{etc.} \tag{1}$$

Supposons qu'on ait obtenu les intégrales de ces équations avec le nombre $2n$ de constantes arbitraires double du nombre des variables indépendantes, et qu'on veuille avoir les intégrales des équations du mouvement troublé

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= m\frac{dU}{dx} + \frac{d\Omega}{dx}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= m\frac{dU}{dy} + \frac{d\Omega}{dy}, \quad \text{etc.} \end{aligned}\right. \tag{2}$$

D'après la théorie de la variation des constantes arbitraires, on peut supposer que, dans le mouvement primitif et dans le mouvement troublé, les coordonnées x, y, z,..., et les vitesses $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt},\ldots$ sont exprimées de la même manière, au moyen des éléments a_1, b_1, a_2, b_2,..., a_n, b_n; mais, dans le cas du mouvement troublé, on a à résoudre la question de trouver les variations de ces dernières quantités pour une époque quelconque du mouvement. Lagrange a donné une forme très-élégante aux équations qui servent à déterminer la variation des constantes arbitraires dans le cas qui nous occupe. Il a remarqué, en particulier, que si les éléments a_1, b_1, a_2, b_2,..., a_n, b_n sont les valeurs initiales des coordonnées et des vitesses, les équations du problème prennent la forme extrêmement simple

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{da_1}{dt} = -\dfrac{d\Omega}{db_1}, & \dfrac{da_2}{dt} = -\dfrac{d\Omega}{db_2},\ldots, & \dfrac{da_n}{dt} = -\dfrac{d\Omega}{db_n}, \\ \dfrac{db_1}{dt} = \dfrac{d\Omega}{da_1}, & \dfrac{db_2}{dt} = \dfrac{d\Omega}{da_2},\ldots, & \dfrac{db_n}{dt} = \dfrac{d\Omega}{da_n}. \end{array}\right.$$

Mais, en se fondant sur les travaux de M. Hamilton, M. Jacobi a donné un autre système de constantes dont les variations sont données par des équations de la forme des équations (3), et qui sont plus avantageuses dans le problème des perturbations planétaires. Voici comment sont données les constantes arbitraires de M. Jacobi :

Θ étant une fonction de x, y, z,..., α_1, α_2,... qui satisfait à l'équation aux différences partielles

$$\sum \frac{1}{m}\left[\left(\frac{d\Theta}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\Theta}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\Theta}{dz}\right)^2\right] = 2(\mathrm{U} + \mathrm{C}),$$

et les intégrales des équations (1) étant, comme on sait, les suivantes :

$$(3)\quad \frac{d\Theta}{d\alpha_1} = \beta_1,\quad \frac{d\Theta}{d\alpha_2} = \beta_2,\ldots,\quad \frac{d\Theta}{d\mathrm{C}} = t + \tau,$$

les $2n$ constantes arbitraires α_1, α_2,..., C, τ jouissent de la même propriété que les valeurs initiales des coordonnées et des vitesses, c'est-à-dire qu'on aura

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{d\alpha_1}{dt} = +\dfrac{d\Omega}{d\beta_1}, & \dfrac{d\alpha_2}{dt} = +\dfrac{d\Omega}{d\beta_2},\ldots, & \dfrac{d\mathrm{C}}{dt} = \dfrac{d\Omega}{d\tau}, \\ \dfrac{d\beta_1}{dt} = -\dfrac{d\Omega}{d\alpha_1}, & \dfrac{d\beta_2}{dt} = -\dfrac{d\Omega}{d\alpha_2},\ldots, & \dfrac{d\tau}{dt} = -\dfrac{d\Omega}{d\mathrm{C}}. \end{array}\right.$$

Le théorème que je viens de reproduire d'après M. Jacobi se trouve énoncé sans démonstration dans le cinquième volume des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*. Je me propose de le démontrer ici, en me servant comme lemme d'une autre proposition donnée aussi sans démonstration par M. Jacobi, à la suite de celle que je viens d'énoncer. Je démontrerai d'abord cette proposition, dont voici l'énoncé :

Soit donné le système

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{da_1}{dt} = -\dfrac{dH}{db_1}, & \dfrac{da_2}{dt} = -\dfrac{dH}{db_2},\ldots, \quad \dfrac{da_n}{dt} = -\dfrac{dH}{db_n}, \\ \dfrac{db_1}{dt} = \dfrac{dH}{da_1}, & \dfrac{db_2}{dt} = \dfrac{dH}{da_2},\ldots, \quad \dfrac{db_n}{dt} = \dfrac{dH}{da_n}, \end{cases}$$

H étant une fonction quelconque de t et des variables a_1, b_1, a_2, b_2,... a_n, b_n.

Soient α_1, β_1, α_2, β_2,..., α_n, β_n de nouvelles variables, et ψ une fonction quelconque des variables α_1, α_2,..., α_n, a_1, a_2,..., a_n seulement; supposons de plus les nouvelles variables liées aux anciennes par les équations suivantes :

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{d\psi}{d\alpha_1} = \beta_1, & \dfrac{d\psi}{d\alpha} = \beta_2,\ldots, \quad \dfrac{d\psi}{d\alpha_n} = \beta_n, \\ \dfrac{d\psi}{d\alpha_1} = -b_1, & \dfrac{d\psi}{d\alpha_2} = -b_2,\ldots, \quad \dfrac{d\psi}{d\alpha_n} = -b_n. \end{cases}$$

Si l'on exprime, au moyen des équations précédentes, la fonction H par t et les nouvelles variables α_1, α_2,..., α_n, β_1, β_2,..., β_n, on aura entre ces dernières des équations différentielles précisément de la même forme que les proposées, savoir :

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{d\alpha_1}{dt} = -\dfrac{dH}{d\beta_1}, & \dfrac{d\alpha_2}{dt} = -\dfrac{dH}{d\beta_2},\ldots, \quad \dfrac{d\alpha_n}{dt} = -\dfrac{dH}{d\beta_n}, \\ \dfrac{d\beta_1}{dt} = \dfrac{dH}{d\alpha_1}, & \dfrac{d\beta_2}{dt} = \dfrac{dH}{d\alpha_2},\ldots, \quad \dfrac{d\beta_n}{dt} = \dfrac{dH}{d\alpha_n}. \end{cases}$$

Démonstration. Si l'on ne suppose aucune forme particulière aux équations qui lient entre elles les nouvelles et les anciennes variables, on aura, en général, pour déterminer la variation des nouveaux éléments, les équations connues

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{dH}{d\alpha_1}\,dt = [\alpha_1, \beta_1]\,d\beta_1 + [\alpha_1, \alpha_2]\,d\alpha_2 + [\alpha_1, \beta_2]\,d\beta_1 + \ldots, \\ \dfrac{dH}{d\beta_1}\,dt = -[\alpha_1, \beta_1]\,d\alpha_1 + [\beta_1, \alpha_2]\,d\alpha_2 + [\beta_1, \beta_2]\,d\beta_2 + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

les symboles $[\alpha_1, \beta_1]$, $[\alpha_1, \alpha_2]$, etc., ayant leur signification ordinaire, c'est-à-dire qu'on a, par exemple,

$$[\alpha_1, \beta_1] = \frac{da_1}{d\alpha_1}\frac{db_1}{d\beta_1} - \frac{db_1}{d\alpha_1}\frac{da_1}{d\beta_1} + \frac{da_2}{d\alpha_1}\frac{db_2}{d\beta_1} - \frac{db_2}{d\alpha_1}\frac{da_2}{d\beta_1} + \dots$$

Nous avons maintenant à faire voir que si les nouvelles variables $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_n, \beta_n$ sont liées aux anciennes $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n$ par les équations (6), les équations (8) se réduiront à la forme des équations (7); or, pour cela, il suffit évidemment de prouver que l'on a les équations suivantes :

$$[\alpha_1, \beta_1] = 1, \quad [\alpha_2, \beta_2] = 1, \quad [\alpha_3, \beta_3] = 1, \dots,$$
$$[\alpha_1, \alpha_2] = 0, \quad [\alpha_1, \alpha_3] = 0, \quad [\alpha_1, \beta_2] = 0, \dots.$$

Prouvons, par exemple, que l'on a $[\alpha_1, \beta_1] = 1$.

Dans ce but, nous formerons d'abord les différentielles de ψ par rapport à α_1 et β_1. ψ est primitivement une fonction des variables $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, a_1, a_2, \dots, a_n$; mais nous supposons, en prenant les différentielles, qu'on regarde $a_1, a_2, \dots, a_n$ comme des fonctions de $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ données par les équations (6). En désignant par $\left(\frac{d\psi}{d\alpha_1}\right)$ la différentielle de ψ prise par rapport à la variable α_1, en tant qu'elle entre explicitement dans la fonction, nous aurons les deux équations

$$\frac{d\psi}{d\alpha_1} = \left(\frac{d\psi}{d\alpha_1}\right) + \frac{d\psi}{da_1}\frac{da_1}{d\alpha_1} + \frac{d\psi}{da_2}\frac{da_2}{d\alpha_1} + \dots + \frac{d\psi}{da_n}\frac{da_n}{d\alpha_1},$$
$$\frac{d\psi}{d\beta_1} = \frac{d\psi}{da_1}\frac{da_1}{d\beta_1} + \frac{d\psi}{da_2}\frac{da_2}{d\beta_1} + \dots + \frac{d\psi}{da_n}\frac{da_n}{d\beta_1}.$$

Mais, en vertu des équations (6), on a

$$\left(\frac{d\psi}{d\alpha_1}\right) = \beta_1, \quad \frac{d\psi}{da_1} = -b_1, \quad \frac{d\psi}{da_2} = -b_2, \dots, \quad \frac{d\psi}{d\alpha_n} = -b_n;$$

donc les équations précédentes deviennent

$$\frac{d\psi}{d\alpha_1} = \beta_1 - b_1\frac{da_1}{d\alpha_1} - b_2\frac{da_2}{d\alpha_1} - \dots - b_n\frac{da_n}{d\alpha},$$
$$\frac{d\psi}{d\beta_1} = -b_1\frac{da_1}{d\beta_1} - b_2\frac{da_2}{d\beta_1} - \dots - b_n\frac{da_n}{d\beta_1}.$$

Maintenant, si l'on différentie la première des équations précédentes par rapport à β_1, la seconde par rapport à α_1, et qu'on égale les deux résultats en effaçant les termes analogues à $\frac{b_1 d^2 a_1}{d\alpha_1 d\beta_1}$, $\frac{b_1 d^2 a_1}{d\beta_1 d\alpha_1}$, qui se détruisent dans les deux membres, il reste précisément $[\alpha_1, \beta_1] = 1$.

On prouverait de la même manière que l'on a

$$[\alpha_2, \beta_2] = 1, \quad [\alpha_3, \beta_3] = 1, \ldots$$

Si, d'un autre côté, on considère les quantités $[\alpha_1, \alpha_2]$, $[\beta_1, \beta_2]$,..., on voit tout de suite pourquoi, en appliquant le mode de démonstration précédent, ces quantités sont nulles et non pas égales à 1. C'est que, par exemple, dans les quantités $\frac{d\psi}{d\alpha_1}$, $\frac{d\psi}{d\alpha_2}$, qui doivent conduire à la quantité $[\alpha_1, \alpha_2]$, les termes β_1, β_2 étant différentiés par rapport à α_1, α_2 sont nuls, et dans $\frac{d\psi}{d\beta_1}$, $\frac{d\psi}{d\beta_2}$, qui doivent donner $[\beta_1, \beta_2]$, les termes analogues à β_1, β_2 ne se trouvent pas.

La proposition qui doit nous servir de lemme peut être considérée maintenant comme complétement démontrée.

Revenons au théorème, dont la démonstration est notre objet principal.

Lorsque les éléments variables sont les valeurs initiales des coordonnées a_1, a_2,..., a_n, et les valeurs initiales des quantités $\frac{mdx}{dt}$, $\frac{mdy}{dt}$,..., que nous désignerons par $-b_1$, $-b_2$,..., les équations qui déterminent les variations des éléments ont, comme nous l'avons déjà remarqué, la forme simple que Lagrange leur a donnée; ce sont, par exemple, les équations (5), dans lesquelles on aurait changé les signes de b_1, b_2,..., ou, ce qui revient au même, les signes des seconds membres.

Pour que le théorème que nous avons en vue soit démontré, il suffit, d'après le lemme, de faire voir que des équations semblables aux équations (6) lient les anciennes variables a_1, b_1, a_2, b_2,..., a_n, b_n, aux nouvelles α_1, β_1, α_2, β_2,..., α_n, β_n, obtenues comme il a été dit en commençant.

Or nous avons vu que les intégrales des équations (1) sont les suivantes :

$$\frac{d\Theta}{d\alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{d\Theta}{d\alpha_2} = \beta_2, \ldots, \quad \frac{d\Theta}{dC} = t + \tau,$$

et l'on sait, d'ailleurs, qu'on a les intégrales premières

$$\frac{d\Theta}{dx} = \frac{mdx}{dt}, \quad \frac{d\Theta}{dy} = \frac{mdy}{dt}, \quad \text{etc.}$$

Si l'on fait dans ces équations $t = 0$, on devra remplacer x, y, z, $\frac{mdx}{dt}, \frac{mdy}{dt}, \ldots$, par leurs valeurs initiales $a_1, a_2, \ldots, a_n, -b_1, -b_2, \ldots, -b_n$; Θ deviendra alors une fonction de $a_1, a_2, \ldots, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$, C, et l'on aura les équations

$$\frac{d\Theta}{d\alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{d\Theta}{d\alpha_2} = \beta_2, \ldots, \quad \frac{d\Theta}{dC} = \tau,$$
$$\frac{d\Theta}{da_1} = -b_1, \quad \frac{d\Theta}{da_2} = -b_2, \ldots, \quad \frac{d\Theta}{da_n} = -b_n,$$

c'est-à-dire précisément les équations (6).

Le théorème est donc démontré.

II.

Nous allons maintenant faire l'application du théorème de M. Jacobi au problème des perturbations planétaires.

La règle que nous avons donnée plus haut pour obtenir les constantes $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3, \beta_3$ est la suivante :

Déterminez une fonction Θ de x, y, z qui contienne, outre la constante qu'on peut toujours lui ajouter, les trois constantes A, B, C, et qui satisfasse identiquement à l'équation aux différences partielles

$$\left(\frac{d\Theta}{dx_1}\right)^2 + \left(\frac{d\Theta}{dx_2}\right)^2 + \left(\frac{d\Theta}{dx_3}\right)^2 = 2(U + C),$$

puis formez les équations

$$\frac{d\Theta}{dA} = A', \quad \frac{d\Theta}{dB} = B', \quad \frac{d\Theta}{dC} = t + \tau;$$

A, B, C, A', B', τ seront les six constantes demandées.

Supposons que, dans l'équation précédente, x, y, z soient remplacées par d'autres variables tellement choisies, que l'équation aux différences partielles ait une forme analogue à celle qu'elle avait d'abord, c'est-à-dire qu'elle soit de la forme

$$p_1\left(\frac{d\Theta}{d\rho_1}\right)^2 + p_2\left(\frac{d\Theta}{d\rho_2}\right)^2 + p_3\left(\frac{d\Theta}{d\rho_3}\right) = 2(\mathrm{U}+\mathrm{C}).$$

Si l'on obtient une fonction Θ de ρ_1, ρ_2, ρ_3 et des constantes arbitraires A, B, C satisfaisant identiquement à l'équation précédente, il est clair que si, dans l'expression de Θ, on met à la place de ρ_1, ρ_2, ρ_3 leurs valeurs en x, y, z, on aura une solution convenable de l'équation différentielle proposée. Mais, au lieu de remplacer d'abord dans Θ ρ_1, $\rho_2,\ldots$, par leurs valeurs en x, y, z, il est évident qu'on peut prendre immédiatement les différentielles par rapport à A, B, C, sauf à imaginer qu'ensuite, dans

$$\frac{d\Theta}{d\mathrm{A}} = \mathrm{A}', \quad \frac{d\Theta}{d\mathrm{B}} = \mathrm{B}', \quad \frac{d\Theta}{d\mathrm{C}} = t + \tau,$$

ρ_1, ρ_2, ρ_3 soient remplacées par leurs valeurs en x, y, z. Le dernier changement de variables que nous venons d'indiquer n'est point d'ailleurs nécessaire; nous n'en avons parlé que pour la clarté de l'exposition. Ce qui importe seulement, c'est de bien savoir quelle est la signification des constantes A, B, C, A′, B′, τ: c'est une question sur laquelle nous reviendrons bientôt.

Il nous faut maintenant choisir notre système de coordonnées. Celui qui se présente naturellement à l'esprit est le système des coordonnées polaires dans l'espace qui satisfait à cette condition, que l'équation aux différences partielles ait une forme analogue à celle qu'elle avait d'abord.

M. Liouville, dans un cas très-général de la fonction des forces, a fait connaître une solution Θ exprimée au moyen des coordonnées polaires dans l'espace. Dans son Mémoire, cette solution Θ est déduite d'une autre beaucoup plus complexe, qui est exprimée en coordonnées elliptiques. Mais comme, dans ma Thèse sur le mouvement d'un point matériel attiré par deux centres mobiles, j'ai obtenu, pour une certaine expression de la fonction des forces, une solution Θ exprimée en fonction des coordonnées elliptiques dans un plan et de l'angle de ce plan avec un plan fixe, il m'a paru convenable de déduire la fonction Θ, dans le cas des coordonnées polaires, de celle que j'avais déjà trouvée, et que je vais rappeler.

La fonction Θ dont il s'agit est la suivante :

$$\Theta = \int d\rho \sqrt{\frac{Ac^2 + B\rho^2 + 2C\rho^4 + 2f(\rho)}{\rho^2(\rho^2 - c^2)}} + \int d\mu \sqrt{\frac{-Ac^2 - B\mu^2 - 2C\mu^4 + 2F(\mu)}{\mu^2(c^2 - \mu^2)}}$$
$$+ \int d\psi \sqrt{A + \varpi(\psi)}.$$

Pour introduire dans Θ les coordonnées polaires, savoir, le rayon vecteur r, l'angle ψ du rayon vecteur avec l'axe de z, l'angle φ de l'axe des x et de la projection sur le plan des xy du rayon vecteur, il y a principalement à considérer le terme

$$\int d\mu \sqrt{\frac{-Ac^2 - B\mu^2 - 2C\mu^4 + 2F(\mu)}{\mu^2(c^2 - \mu^2)}},$$

sur lequel porte toute la difficulté.

En effet, pour passer du système de coordonnées dans lequel est exprimée la fonction Θ précédente au système des coordonnées polaires, il suffit de supposer que l'un des centres fixes auxquels se rapportent les quantités $\rho = \frac{r + r'}{2}$, $\mu = \frac{r - r'}{2}$ (r et r' étant les distances du point attiré aux deux centres) vienne se confondre avec l'autre : c'est ce qu'on exprime en faisant $\rho = r$, $\mu = 0$, $c = 0$.

Le premier terme de Θ devient alors, en y faisant $c = 0$, $\rho = r$,

$$\int \frac{dr}{r^2} \sqrt{2Cr^4 + Br^2 + 2f(r)},$$

et le dernier terme reste tel qu'il était. Pour calculer le second terme, écrivons-le sous la forme

$$\int \frac{d\frac{\mu}{c}}{\sqrt{1 - \frac{\mu^2}{c^2}}} \sqrt{-\frac{Ac^2}{\mu^2} - B + 2C\mu^2 + 2\frac{F(\mu)}{\mu^2}},$$

et cherchons la valeur limite de $\frac{\mu}{c}$ pour $\mu = 0$, $c = 0$. Pour trouver cette limite, calculons la valeur de r' dans le triangle ayant pour côtés r, r', $2c$ et $90 - \psi$ pour angle compris entre les côtés r et $2c$; nous aurons

$$r' = \sqrt{r^2 + 4c^2 - 4cr\sin\psi},$$

puis

$$\frac{\mu}{c} = \frac{\sqrt{r^2 + 4c^2 - 4cr\sin\psi} - r}{2c} = \frac{2c - 2r\sin\psi}{\sqrt{r^2 + 4c^2 - 4cr\sin\psi} + r},$$

et enfin, limite de $\frac{\mu}{c} = -\sin\psi$, et, par suite,

$$\frac{-d\frac{\mu}{c}}{\sqrt{1 - \frac{\mu^2}{c^2}}} = d\psi.$$

Introduisons ces valeurs dans le second terme mis sous la forme que nous venons de lui donner, nous aurons, pour ce second terme

$$-\int \frac{d\psi}{\sin\psi}\sqrt{-A - B\sin^2\psi + 2\chi(\psi)};$$

la valeur complète de Θ devient alors, comme M. Liouville l'a trouvé d'une autre manière,

$$\Theta = \int \frac{dr}{r^2}\sqrt{Br^2 + 2Cr^4 + 2f(r)} - \int \frac{d\psi}{\sin\psi}\sqrt{-A - B\sin^2\psi + 2\chi(\psi)}$$
$$+ \int d\varphi\sqrt{A + 2\Pi(\varphi)}.$$

Quant à la fonction U qui doit accompagner cette valeur de Θ, on peut la déduire aussi de la fonction U qui accompagnait notre ancienne valeur de Θ en mettant cette dernière fonction U sous la forme

$$U = \frac{\frac{\mu^2}{c^2}f(\rho) + \rho^2\frac{F(\mu)}{c^2} + (\rho^2 - \mu^2)\frac{\Pi(\varphi)}{c^2}}{\frac{\mu^2}{c^2}\rho^2(\rho^2 - \mu^2)},$$

et passant à la limite, on a

$$U = \frac{\sin^2\psi f(r) + r^2\chi(\psi) + r^2\Pi(\varphi)}{r^2\sin^2\psi}.$$

Si l'on fait

$$f(r) = r^4 f_1(r),$$

la valeur de U prend la forme plus simple

$$U = f_1(r) + \frac{\chi(\psi) + \Pi(\varphi)}{\rho^2 \sin^2\psi}.$$

On aurait pu, du reste, arriver directement aux valeurs précédentes de U et de Θ par la méthode qui a conduit aux valeurs plus compliquées dont nous les avons déduites.

III.

Il faut maintenant appliquer les nouvelles valeurs de Θ et de U au problème des deux corps. U étant égal, dans le problème dont il s'agit, à $\frac{g}{r}$, on aura

$$f_1(r) = \frac{g}{r}, \quad f(r) = gr^3, \quad \chi(\psi) = 0, \quad \Pi(\varphi) = 0,$$

et, par suite,

$$\Theta = \int \frac{dr}{r}\sqrt{2Cr^2 + 2gr + B} - \int \frac{d\varphi}{\sin\psi}\sqrt{-A - B\sin^2\psi} + \int d\varphi\sqrt{A}.$$

Formant maintenant les équations

$$\frac{d\Theta}{dA} = A', \quad \frac{d\Theta}{dB} = B', \quad \frac{d\Theta}{dC} = t + \tau,$$

on aura

$$(9) \qquad \int \frac{d\varphi}{2\sqrt{A}} + \int \frac{d\psi}{2\sin\psi\sqrt{-A - B\sin^2\psi}} = A',$$

$$(10) \qquad \int \frac{dr}{2r\sqrt{2Cr^2 + 2gr + B}} + \int \frac{\sin\psi\, d\psi}{2\sqrt{-A - B\sin^2\psi}} = B',$$

$$(11) \qquad \int \frac{r\,dr}{\sqrt{2Cr^2 + 2gr + B}} = t + \tau;$$

ou bien, en différentiant,

$$(12) \qquad d\varphi = \frac{\sqrt{A}\, d\psi}{\sin\psi\sqrt{-A - B\sin^2\psi}},$$

$$(13)\qquad \frac{dr}{r\sqrt{2Cr^2+2gr+B}} = \frac{\sin\psi\, d\psi}{\sqrt{-A-B\sin^2\psi}},$$

$$(14)\qquad \frac{rdr}{\sqrt{2Cr+2gr+B}} = dt.$$

On aurait pu aussi obtenir les formules précédentes sans passer par le calcul d'une nouvelle fonction Θ. Il eût suffi pour cela d'introduire dans les formules du problème des centres mobiles les conditions

$$k=0,\quad g'=0,\ c=0,\quad \mu=0,\quad \frac{\mu}{c}=-\sin\psi.$$

Le calcul, fait de cette manière, confirme pleinement d'ailleurs celui que nous venons de faire.

IV.

Nous pourrions faire voir dès maintenant, par les équations (12), (13) et (14), que le principe des aires a lieu, que la courbe est plane, et qu'elle est une section conique; mais, la question importante étant de trouver la signification des constantes A, B, C, A′, B′, τ, nous allons nous occuper immédiatement de cette question, et celle d'interpréter les équations (12), (13) et (14) se trouvera résolue en même temps.

Pour trouver la signification des différentes constantes arbitraires, nous allons comparer nos formules aux équations connues du mouvement elliptique auquel nous voulons nous borner. On voit d'abord immédiatement ce que représente la constante C; car puisque, d'un côté, nous avons posé

$$\frac{V^2}{2}=\frac{g}{r}+C,$$

et que, d'après la formule connue du mouvement elliptique, on a

$$\frac{V^2}{2}=g\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{2a}\right),$$

on aura

$$C=-\frac{g}{2a}.$$

Pour trouver la signification des constantes arbitraires B et τ, nous comparerons à l'équation connue du mouvement elliptique,

$$\frac{rdr}{\sqrt{ga}\sqrt{e^2-\left(1-\frac{r}{a}\right)^2}}=dt.$$

l'équation (14), mise sous la forme

$$\frac{rdr}{\sqrt{ga}\sqrt{1+\frac{B}{ga}-\left(1-\frac{r}{a}\right)^2}}=dt.$$

On voit que l'on peut poser

$$1+\frac{B}{ga}=e^2.$$

d'où

$$B=-ga(1-e^2),$$

c'est-à-dire qu'au facteur près $-g$, B représente le demi-paramètre. Quand on a remplacé B et C par leurs valeurs dans l'équation (11), cette équation devient identique à celle du mouvement elliptique

$$t+\tau=\int\frac{rdr}{\sqrt{ga}\sqrt{e^2-\left(1-\frac{r}{a}\right)^2}}.$$

Donc τ peut être considéré comme représentant le temps du passage par le périhélie.

Pour obtenir la valeur de la constante A, multiplions membre à membre les équations (12) et (14), puis divisons membre à membre cette nouvelle équation et l'équation (13); il viendra

$$r^2\sin^2\psi\frac{d\varphi}{dt}=\sqrt{A};$$

ce qui donne le principe des aires appliqué à la projection de la trajectoire sur le plan des xy, et, par suite, à l'orbite elle-même, en admettant, ce qui résulte, du reste, de nos formules, que l'orbite est plane.

Le double de l'aire décrite dans l'unité de temps sur le plan de l'orbite par le rayon vecteur étant égal à $\sqrt{ga(1-e^2)}$, nous aurons, en représentant par γ l'angle du plan de l'orbite avec le plan des xy,

$$\sqrt{A} = \sqrt{ga(1-e^2)}\cos\gamma,$$

ou

$$A = ga(1-e^2)\cos^2\gamma.$$

Pour obtenir maintenant la valeur de B', nous allons déduire de nos équations l'équation polaire de l'ellipse. En désignant par θ l'angle fait par le rayon vecteur avec la ligne des nœuds, nous aurons, d'après le principe des aires, l'équation

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{\sqrt{A}}{\cos\gamma},$$

ou bien, en mettant à la place de $\sqrt{A}$ sa valeur précédemment trouvée $r^2\sin^2\psi\frac{d\varphi}{dt}$,

$$\sin^2\psi\, d\varphi = \cos\gamma\, d\theta.$$

Substituant maintenant pour $d\varphi$ sa valeur tirée de l'équation (12), et indiquant l'intégration, on aura

$$\theta.\cos\gamma = \int_\psi^{\frac{\varpi}{2}} \frac{\sin\psi\, d\psi}{\sqrt{-A-B\sin^2\psi}};$$

puis, si l'on met dans l'équation (10), $\theta.\cos\gamma$ à la place de l'intégrale

$$\int\frac{\sin\psi\, d\psi}{\sqrt{-A-B\sin^2\psi}},$$

qu'on peut supposer prise entre les limites ψ et $\frac{\varpi}{2}$, il viendra

$$\int\frac{dr}{r\sqrt{2Cr^2+2gr+B}} + \frac{\theta}{\sqrt{ga(1-e^2)}} = 2B'.$$

ou bien

$$\int\frac{\sqrt{ga(1-e^2)}\,dr}{r\sqrt{2Cr^2+2gr+B}} = 2B'\sqrt{ga(1-e^2)} - \theta.$$

Or cette équation devient identique à l'équation polaire de l'ellipse, en remettant pour B et C leurs valeurs. On voit ainsi qu'on peut supposer que $2B'\sqrt{ga(1-e^2)}$ est la longitude du périhélie, et, par conséquent, qu'au facteur $2\sqrt{g}$ près, B' est la longitude du périhélie divisée par la racine carrée du demi-paramètre.

Il nous reste à trouver la signification de la constante A'. Or cette constante nous est donnée immédiatement par l'équation (11), mise sous la forme

$$\varphi - 2A'\sqrt{A} = \int_\psi^{\frac{\varpi}{2}} \frac{\sqrt{A}\,d\psi}{\sqrt{-A - B\sin^2\psi}};$$

car il suffit de supposer que la constante $2A'\sqrt{A}$ est la valeur de φ pour $\psi = \frac{\varpi}{2}$, c'est-à-dire la longitude du nœud. Ainsi, au facteur près $2\sqrt{g}$, la constante A' est égale à la longitude du nœud divisée par le produit de la racine carrée du demi-paramètre et du cosinus de l'inclinaison.

Remarquons, en passant, que l'équation (12), après qu'on y a remplacé A et B par leurs valeurs précédemment trouvées, peut s'écrire

$$d\varphi = \frac{d\psi}{\sin\psi\sqrt{\tang^2\gamma - \cot^2\psi}};$$

et, en intégrant, on a

$$\cot\psi = \tang\gamma\sin(\varphi - h),$$

h étant la longitude du nœud.

L'équation précédente peut être considérée comme l'équation d'un plan qui fait un angle γ avec le plan des xy, et dont la trace sur ce plan fait avec l'axe des x un angle h. Nous voyons maintenant que la courbe est plane, comme nous l'avions supposé dans les calculs précédents, et en même temps nous avons une vérification de la détermination de nos constantes A et B.

Concluons maintenant comme résultat définitif de notre travail, que les éléments dont nous pouvons déterminer les variations par des équations de la forme des équations (3), sont :

L'axe inverse, le temps du passage par le périhélie, le demi-paramètre, le demi-paramètre multiplié par le carré du cosinus de l'inclinaison, la longitude du périhélie divisée par la racine carrée du demi-paramètre ; et, enfin, la longitude du nœud divisée par le produit de la racine carrée du demi-paramètre et du cosinus de l'inclinaison.

M. Jacobi trouve des éléments un peu différents des nôtres. Ce sont les suivants :

L'axe inverse, le temps du passage par le périhélie, la racine carrée du demi-paramètre, la racine carrée du demi-paramètre multipliée par le cosinus de l'inclinaison, la longitude du périhélie et celle du nœud. Mais on peut, sans difficulté, déduire l'un de l'autre les deux systemes d'équations correspondant aux deux systèmes d'éléments.