JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

WILLIAM ROBERTS

Note sur la rectification de la cassinoïde à *n* foyers

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 13 (1848), p. 38-40.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1848_1_13__38_0>

gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

NOTE

Sur la rectification de la cassinoïde à n *foyers;*

Par M. William ROBERTS.

La rectification de la courbe à laquelle j'ai appliqué cette dénomination peut s'effectuer sous une forme remarquable, entièrement analogue, au reste, à celle que M. Serret a établie pour la cassinoïde ordinaire, et que j'ai étendue depuis au cas de $n = 3$. L'arc aura pour valeur (lorsqu'on en cherche l'expression la plus simple) la somme ou la différence de deux fonctions abéliennes, dans lesquelles le polynôme affecté du signe radical ne monte qu'au degré $n + 1$.

Observons d'abord que, l'équation de notre courbe étant

$$r^{2n} - 2a^n r^n \cos n\omega + a^{2n} = b^{2n},$$

l'expression de l'arc s en fonction du rayon vecteur sera

$$2b^n \int \frac{r^n\,dr}{\sqrt{-r^{4n} + 2(b^{2n} + a^{2n})r^{2n} - (b^{2n} - a^{2n})^2}}$$

(*voir* un article de M. Serret, tome VIII de ce Journal, page 501).

Il est important de remarquer que cette formule, étant appliquée aux deux cas de $a > b$ et de $a < b$, conduira évidemment aux mêmes résultats analytiques, quoique la courbe change tout à fait de caractère géométrique, comme l'on sait, en passant de l'un de ces cas à l'autre. Supposons, pour fixer les idées, que $a < b$, et faisons

$$r = (b^{2n} - a^{2n})^{\frac{1}{2n}}\, x,$$

ce qui nous donnera

$$s = \frac{2b^n}{(b^{2n} - a^{2n})^{\frac{n-1}{2n}}} \int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{-x^{4n} + \frac{2(b^{2n} + a^{2n})}{b^{2n} - a^{2n}}\,x^{2n} - 1}}.$$

En posant, pour abréger,

$$\alpha = \frac{2(b^{2n} + a^{2n})}{b^{2n} - a^{2n}},$$

l'intégrale qui figure dans cette formule peut s'écrire de la manière suivante :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha - \left(x^{2n} + \frac{1}{x^{2n}}\right)}};$$

et en faisant $x + \frac{1}{x} = z$, ce qui donne

$$dx = \frac{\sqrt{z^2 - 4} \pm z}{2\sqrt{z^2 - 4}}\, dz,$$

et

$$x^{2n} + \frac{1}{x^{2n}} = z^{2n} - 2nz^{2n-2} + \frac{2n.2n-3}{1.2} z^{2n-4} - \frac{2n.2n-3.2n-5}{1.2.3} z^{2n-6} + \ldots.$$

elle deviendra

$$\int \frac{\sqrt{z^2 - 4} \pm z}{2\sqrt{z^2 - 4}} \left[\frac{dz}{\sqrt{\alpha - (z^{2n} - 2nz^{2n-2} + \ldots)}}\right].$$

Par conséquent, en prenant positivement les différentielles des deux arcs s_1, s_2 qui répondent au double signe, on trouvera facilement pour leur somme et leur différence,

$$s_1 + s_2 = \frac{2b^n}{(b^{2n} - a^{2n})^{\frac{n-1}{2n}}} \int \frac{z\,dz}{\sqrt{z^2 - 4}\sqrt{\alpha - (z^{2n} - 2nz^{2n-2} + \ldots)}},$$

$$s_1 - s_2 = \frac{2b^n}{(b^{2n} - a^{2n})^{\frac{n-1}{2n}}} \int \frac{dz}{\sqrt{\alpha - (z^{2n} - 2nz^{2n-2} + \ldots)}}.$$

Maintenant dans la première de ces expressions, soit $z^2 - 4 = 4\xi$, et dans la seconde, soit $z^2 = 4\eta$, et l'on aura sans peine

$$s_1 + s_2 = \frac{2b^n}{(b^{2n} - a^{2n})^{\frac{n-1}{2n}}} \int \frac{d\xi}{\sqrt{A_1\xi^{n+1} + A_2\xi^n + \ldots + A_n\xi^2 + A_{n+1}\xi}},$$

$$s_1 - s_2 = \frac{2b^n}{(b^{2n} - a^{2n})^{\frac{n-1}{2n}}} \int \frac{d\eta}{\sqrt{B_1\eta^{n+1} + B_2\eta^n + \ldots + B_n\eta^2 + B_{n+1}\eta}}.$$

où les coefficients A_1, A_2,..., B_1, B_2,... peuvent être calculés très-facilement, ce qui renferme la réduction énoncée.

Je remarquerai enfin que l'arc admet aussi l'expression

$$b^n \int \frac{d\theta}{(a^{2n} \pm 2a^n b^n \sin n\theta + b^{2n})^{\frac{n-1}{2n}}},$$

θ étant le paramètre du système orthogonal conjugué à celui qu'on obtiendrait en faisant varier b. Si l'on fait successivement $n = 2$ et $n = 3$, on retombera sur les réductions qui se trouvent au tome I du *Traité des fonctions elliptiques*, pages 178, 180, et qui se présentent ici comme des cas particuliers d'un théorème général. J'ignore si cette transformation avait été déjà indiquée; il me semble au moins que le rapprochement qui la fait découler de considérations géométriques n'est pas dépourvu d'intérêt.