JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J.-A. SERRET

Note sur une équation aux dérivées partielles

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 13 (1848), p. 361-368.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1848_1_13__361_0>

NOTE

SUR UNE ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES;

Par M. J.-A. SERRET.

On sait, d'après le beau théorème de M. Gauss, que si l'on fait éprouver à une surface une déformation quelconque, le produit des rayons de courbure principaux conserve en chaque point sa valeur; d'où il suit en particulier que les surfaces développables sur la sphère jouissent de la propriété, que le produit de leurs rayons de courbure principaux a en chaque point la même valeur.

Les travaux récents de MM. Liouville et Bertrand sur le théorème de M. Gauss ont attiré mon attention sur ce sujet, et j'ai entrepris d'étudier l'équation aux dérivées partielles des surfaces dont les rayons de courbure principaux ont un produit constant. Jusqu'ici mes recherches ne m'ont conduit à aucun résultat satisfaisant au point de vue de la géométrie; mais j'ai trouvé une solution de l'équation aux dérivées partielles dont je viens de parler, solution qui contient une fonction arbitraire et qui ne représente que des surfaces imaginaires. Cette solution est assez remarquable en ce sens qu'elle se présente comme une sorte de *solution singulière* de l'équation aux dérivées partielles; je pense faire une chose qui sera agréable aux géomètres en publiant ici ce résultat.

Conformément à l'usage adopté, nous désignerons par x, y, z les coordonnées rectangulaires de la surface, par p et q les dérivées du premier ordre $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, par r, s, t celles du second $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dx\,dy}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$; l'équation que nous allons considérer sera alors, comme chacun sait,

$$(1)\qquad a^2(rt - s^2) = -(1 + p^2 + q^2)^2,$$

a désignant une constante réelle ou imaginaire.

Nous emploierons la transformation connue de Legendre et nous poserons

$$(2) \qquad u = px + qy - z;$$

prenant alors p et q pour variables indépendantes, on aura

$$(3) \qquad x = \frac{du}{dp}, \quad y = \frac{du}{dq}$$

et

$$(4) \qquad \frac{d^2 u}{dp^2} = \frac{t}{rt - s^2}, \quad \frac{d^2 u}{dp\,dq} = \frac{-s}{rt - s^2}, \quad \frac{d^2 u}{dq^2} = \frac{r}{rt - s^2},$$

d'où

$$(5) \qquad \frac{d^2 u}{dp^2} \cdot \frac{d^2 u}{dq^2} - \left(\frac{d^2 u}{dp\,dq}\right)^2 = \frac{1}{rt - s^2};$$

les équations (2) et (3) feront connaître z, y et x en fonction de p et q, dès que la valeur de u sera connue. Enfin, à cause de l'équation (5), l'équation proposée (1) devient

$$\frac{d^2 u}{dp^2} \cdot \frac{d^2 u}{dq^2} - \left(\frac{d^2 u}{dp\,dq}\right)^2 = -\frac{a^2}{(1 + p^2 + q^2)^2},$$

ou

$$\frac{d^2 u}{dp^2} \cdot \frac{d^2 u}{dq^2} = \left(\frac{d^2 u}{dp\,dq} - \frac{a}{1 + p^2 + q^2}\right)\left(\frac{d^2 u}{dp\,dq} + \frac{a}{1 + p^2 + q^2}\right),$$

et résultera de l'élimination de la quantité λ entre les deux suivantes :

$$(6) \qquad \begin{cases} \lambda \dfrac{d^2 u}{dp^2} - \dfrac{d^2 u}{dp\,dq} + \dfrac{a}{1 + p^2 + q^2} = 0, \\ \lambda \dfrac{d^2 u}{dp\,dq} - \dfrac{d^2 u}{dq^2} + \dfrac{a\lambda}{1 + p^2 + q^2} = 0. \end{cases}$$

Différentions ces équations, la première par rapport q, et la seconde par rapport à p; on aura

$$\lambda \frac{d^3 u}{dp^2\,dq} - \frac{d^3 u}{dp\,dq^2} + \frac{d\lambda}{dq}\frac{d^2 u}{dp^2} - \frac{2aq}{(1 + p^2 + q^2)^2} = 0,$$

$$\lambda \frac{d^3 u}{dp^2\,dq} - \frac{d^3 u}{dp\,dq^2} + \frac{d\lambda}{dp}\frac{d^2 u}{dp\,dq} + \frac{a\dfrac{d\lambda}{dp}}{1 + p^2 + q^2} - \frac{2ap\lambda}{(1 + p^2 + q^2)^2} = 0,$$

et, en retranchant,

$$(7)\qquad \frac{d\lambda}{dq}\frac{d^2u}{dp^2}-\frac{d\lambda}{dp}\frac{d^2u}{dp\,dq}-\frac{a\dfrac{d\lambda}{dp}}{1+p^2+q^2}-\frac{2a(q-p\lambda)}{(1+p^2+q^2)^2}=0.$$

Des équations (6) et (7) on peut tirer les valeurs des trois dérivées $\frac{d^2u}{dp^2}$, $\frac{d^2u}{dp\,dq}$, $\frac{d^2u}{dq^2}$; savoir,

$$(8)\qquad \begin{cases} \left(\dfrac{d\lambda}{dq}-\lambda\dfrac{d\lambda}{dp}\right)\dfrac{d^2u}{dp^2}=\dfrac{2a\dfrac{d\lambda}{dp}}{1+p^2+q^2}+\dfrac{2a(q-p\lambda)}{(1+p^2+q^2)^2},\\[2ex] \left(\dfrac{d\lambda}{dq}-\lambda\dfrac{d\lambda}{dp}\right)\dfrac{d^2u}{dp\,dq}=\dfrac{a\left(\dfrac{d\lambda}{dq}+\lambda\dfrac{d\lambda}{dp}\right)}{1+p^2+q^2}+\dfrac{2a\lambda(q-p\lambda)}{(1+p^2+q^2)^2},\\[2ex] \left(\dfrac{d\lambda}{dq}-\lambda\dfrac{d\lambda}{dp}\right)\dfrac{d^2u}{dq^2}=\dfrac{2a\lambda\dfrac{d\lambda}{dq}}{1+p^2+q^2}+\dfrac{2a\lambda^2(q-p\lambda)}{(1+p^2+q^2)^2}. \end{cases}$$

On voit que si λ était connu, u le serait aussi, puisqu'on connaîtrait sa différentielle seconde d^2u. La quantité λ dépend d'une équation du deuxième ordre que nous nous dispenserons de former, et qu'on obtiendrait aisément à l'aide des équations (8); il suffirait, par exemple, de tirer des deux premières les valeurs de $\frac{d^2u}{dp^2}$ et $\frac{d^2u}{dp\,dq}$, et d'égaler ensemble les valeurs de leurs dérivées $\frac{d}{dq}\frac{d^2u}{dp^2}$ et $\frac{d}{dp}\frac{d^2u}{dp\,dq}$.

Remarquons que les équations (8) deviendront illusoires, pour toute valeur de λ qui satisferait à l'équation

$$(9)\qquad \frac{d\lambda}{dq}-\lambda\frac{d\lambda}{dp}=0.$$

Or je dis qu'une pareille valeur de λ peut correspondre à une solution de notre équation aux dérivées partielles. Ceci ne peut arriver à moins que les seconds membres des équations (8) ne soient nuls, c'est-à-dire à moins que l'on n'ait

$$(10)\qquad \frac{d\lambda}{dp}+\frac{q-\lambda p}{1+p^2+q^2}=0.$$

Il est très-remarquable qu'on puisse satisfaire aux équations (9) et (10) par une même valeur de λ, d'où il suit que les équations (8) seront alors vérifiées d'elles-mêmes; en effet, l'intégrale générale de l'équation (9) est

$$p + \lambda q = \varphi(\lambda),$$

$\varphi(\lambda)$ désignant une fonction arbitraire. On en déduit

$$\frac{d\lambda}{dp} = \frac{1}{\frac{d\varphi}{d\lambda} - q},$$

et, par suite, l'équation (10) devient, en remplaçant p et $\frac{d\lambda}{dp}$ par leurs valeurs,

$$\left(1 + \varphi^2 - \lambda\varphi\frac{d\varphi}{d\lambda}\right) + q\left[(1 + \lambda^2)\frac{d\varphi}{d\lambda} - \lambda\varphi\right] = 0.$$

Pour que cette équation ait lieu quel que soit q, il faut que l'on ait à la fois

$$(11) \qquad 1 + \varphi^2 - \lambda\varphi\frac{d\varphi}{d\lambda} = 0 \quad \text{et} \quad (1 + \lambda^2)\frac{d\varphi}{d\lambda} - \lambda\varphi = 0.$$

En éliminant $\frac{d\varphi}{d\lambda}$ des équations (11), on a

$$1 + \lambda^2 + \varphi^2 = 0, \quad \text{d'où} \quad \varphi(\lambda) = \sqrt{-1 - \lambda^2},$$

et l'on s'assure aisément que cette valeur de $\varphi(\lambda)$ satisfait à chacune des équations (11).

Si donc on pose

$$(12) \qquad p + \lambda q = \sqrt{-1 - \lambda^2},$$

les équations (8) se trouveront vérifiées d'elles-mêmes, et l'on pourra dès lors intégrer les équations (6) qui sont linéaires et du premier ordre chacune, si l'on y considère $\frac{du}{dp}$ dans la première, et $\frac{du}{dq}$ dans la seconde, comme la variable principale.

Examinons d'abord la première des équations (6), et considérons $\frac{du}{dp} = x$ comme fonction des quantités q et λ; p est alors une fonction de q et de λ définie par l'équation (12) : on a

$$\frac{d^2u}{dp^2} = \frac{dx}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dp},$$

$$\frac{d^2u}{dp\,dq} = \frac{dx}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dq} + \frac{dx}{dq}.$$

Par suite, la première des équations (6) donnera, en ayant égard à l'équation (9),

$$\frac{dx}{dq} = \frac{a}{1+p^2+q^2} = \frac{-a}{(\lambda + q\sqrt{-1-\lambda^2})^2},$$

d'où en intégrant, et désignant par ψ une fonction arbitraire,

$$x = \frac{a}{\sqrt{-1-\lambda^2}(\lambda + q\sqrt{-1-\lambda^2})} + \psi(\lambda). \tag{13}$$

On considérera pareillement, dans la deuxième des équations (6), $\frac{du}{dq} = y$ comme fonction des quantités q et λ ; on aura

$$\frac{d^2u}{dp\,dq} = \frac{dy}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dp},$$

$$\frac{d^2u}{dq^2} = \frac{dy}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dq} + \frac{dy}{dq}.$$

La seconde des équations (6) devient alors

$$\frac{dy}{dq} = \frac{a\lambda}{1+p^2+q^2} = \frac{-a\lambda}{(\lambda + q\sqrt{-1-\lambda^2})^2},$$

d'où, en désignant par φ une fonction arbitraire,

$$y = \frac{a\lambda}{\sqrt{-1-\lambda^2}(\lambda + q\sqrt{-1-\lambda^2})} + \varphi(\lambda). \tag{14}$$

Les fonctions ψ et φ ne sont pas toutes deux arbitraires et dépendent, comme on va le voir, l'une de l'autre, à cause que x et y doivent être les dérivées partielles d'une même fonction de p et q.

On a

$$du = x\,dp + y\,dq,$$

et, à cause de l'équation (12),

$$dp = -\lambda\,dq - \frac{\lambda + q\sqrt{-1-\lambda^2}}{\sqrt{-1-\lambda^2}}\,d\lambda,$$

d'où

$$du = (y - \lambda x)\,dq - \frac{\lambda + q\sqrt{-1-\lambda^2}}{\sqrt{-1-\lambda^2}}\,x\,d\lambda,$$

et, en mettant à la place de x et y leurs valeurs tirées des équations (13) et (14),

$$\begin{aligned} du &= [\varphi(\lambda) - \lambda\psi(\lambda)]\,dq + \frac{a\,d\lambda}{1+\lambda^2} - \frac{\lambda + q\sqrt{-1-\lambda^2}}{\sqrt{-1-\lambda^2}}\,\psi(\lambda)\,d\lambda \\ &= \frac{a\,d\lambda}{1+\lambda^2} - \frac{\lambda\psi(\lambda)}{\sqrt{-1-\lambda^2}}\,d\lambda - \{q\psi(\lambda)\,d\lambda + [\lambda\psi(\lambda) - \varphi(\lambda)]\,dq\}. \end{aligned}$$

Les deux premiers termes de cette valeur de du sont des différentielles exactes, et pour que le troisième le soit, il faut et il suffit que l'on ait

$$\lambda\psi'(\lambda) = \varphi'(\lambda),$$

φ' et ψ' désignant les dérivées respectives de φ et ψ; si donc $F(\lambda)$ désigne une fonction arbitraire, on pourra poser

$$\psi(\lambda) = F'(\lambda), \quad \varphi(\lambda) = \lambda F'(\lambda) - F(\lambda),$$

et l'on aura

$$du = \frac{a\,d\lambda}{1+\lambda^2} - \frac{\lambda F'(\lambda)}{\sqrt{-1-\lambda^2}} - [qF'(\lambda)\,d\lambda + F(\lambda)\,dq],$$

et, en intégrant,

$$u = -qF(\lambda) + a \operatorname{arc\,tang} \lambda - \int \frac{\lambda F'(\lambda)}{\sqrt{-1-\lambda^2}}\,d\lambda.$$

Enfin, on déterminera z par l'équation

$$z = px + qy - u,$$

et, en résumé, on aura les valeurs suivantes de x, y, z:

$$(15)\left\{\begin{aligned} x &= \frac{a}{\sqrt{-1-\lambda^2}\,(\lambda + q\sqrt{-1-\lambda^2})} + F'(\lambda), \\ y &= \frac{a\lambda}{\sqrt{-1-\lambda^2}\,(\lambda + q\sqrt{-1-\lambda^2})} + \lambda F'(\lambda) - F(\lambda), \\ z &= \frac{a}{\lambda + q\sqrt{-1-\lambda^2}} - a \operatorname{arc\,tang}\lambda + \sqrt{-1-\lambda^2}\,F'(\lambda) + \int \frac{\lambda F'(\lambda)\,d\lambda}{\sqrt{-1-\lambda^2}}. \end{aligned}\right.$$

Ces équations (15), qui renferment une fonction arbitraire $F(\lambda)$, constituent une solution de l'équation aux différentielles partielles proposée. Elles appartiennent à une surface réglée imaginaire, car on obtient, par l'élimination de q, les deux suivantes :

$$(16)\qquad \begin{cases} y = \lambda x - F(\lambda), \\ z = x\sqrt{-1-\lambda^2} - a \operatorname{arc\,tang} \lambda + \int \dfrac{\lambda F'(\lambda)\,d\lambda}{\sqrt{-1-\lambda^2}}, \end{cases}$$

qui sont celles d'une ligne droite.

On peut débarrasser les formules (15) ou (16) du signe d'intégration Si l'on pose

$$F(\lambda) = (1+\lambda^2)\sqrt{-1-\lambda^2}\,f'(\lambda) - a\sqrt{-1-\lambda^2},$$

$f'(\lambda)$ désignant la dérivée d'une fonction arbitraire $f(\lambda)$, les équations (16) deviennent

$$(17)\qquad \begin{cases} y = \lambda x + a\sqrt{-1-\lambda^2} - (1+\lambda^2)\sqrt{-1-\lambda^2}\,f'(\lambda), \\ z = x\sqrt{-1-\lambda^2} - a\lambda + \lambda(1+\lambda^2) f'(\lambda) - f(\lambda). \end{cases}$$

Si l'on change x et y en $x\sqrt{-1}$ et $y\sqrt{-1}$, les équations (17) deviennent

$$(18)\qquad \begin{cases} y = \lambda x + a\sqrt{1+\lambda^2} - (1+\lambda^2)^{\frac{3}{2}} f'(\lambda), \\ z = -x\sqrt{1+\lambda^2} - a\lambda + \lambda(1+\lambda^2) f'(\lambda) - f(\lambda), \end{cases}$$

et les équations (18) constituent une solution réelle de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$a^2(rt - s^2) = -(1 - p^2 - q^2)^2.$$

La surface imaginaire représentée par le système des équations (15 ou (16) ou (17) jouit donc de la propriété que le produit de ses deux rayons de courbure principaux est constant en chaque point : mais, ce qui me paraît très-remarquable, c'est que ces deux rayons de courbure soient eux-mêmes constants en chaque point et égaux entre eux ; autrement notre surface a, comme la sphère, la propriété que tous ses points sont des ombilics.

En effet, en différentiant par rapport à x et y l'équation

$$p + \lambda q = \sqrt{-1-\lambda^2},$$

et ayant égard aux équations (15) et (16), on a

$$r + \lambda s = \frac{\lambda(\lambda + q\sqrt{-1-\lambda^2})^2}{a},$$

$$s + \lambda t = \frac{-(\lambda + q\sqrt{-1-\lambda^2})^2}{a},$$

d'où

$$(19) \qquad t\lambda^2 + 2s\lambda + r = 0;$$

d'ailleurs l'équation entre p, q et λ peut se mettre sous la forme

$$(20) \qquad (1+q^2)\lambda^2 + 2pq\lambda + (1+p^2) = 0.$$

Éliminant λ entre les équations (19) et (20), on trouve

$$[(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t]^2 - 4(1+p^2+q^2)(rt-s^2) = 0,$$

ou, en désignant par R et R' les deux rayons de courbure,

$$(R - R')^2 = 0.$$

Il est assez curieux que cette surface imaginaire, qu'on pourrait considérer comme connue, puisque Monge a donné l'intégrale complète de l'équation

$$R = R',$$

se soit présentée comme une véritable solution singulière de l'équation

$$RR' = \text{constante}.$$