JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

STEICHEN

Aperçu théorique sur le frottement de roulement

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 13 (1848), p. 344-352.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1848_1_13__344_0>

APERÇU THÉORIQUE

SUR LE FROTTEMENT DE ROULEMENT;

Par M. STEICHEN,
Professeur à l'École militaire de Bruxelles.

§ I.

Il semble résulter des observations faites par Coulomb et d'autres physiciens, que la résistance au roulement est, du moins dans certaines circonstances, proportionnelle à la charge du rouleau ou de la roulette, et en raison renversée du rayon; tandis que, d'après les observations de M. Dupuit, cette résistance paraît plutôt se rapprocher de la loi de la raison inverse de la racine carrée du rayon. Il y a des cas particuliers où cette loi de Dupuit se trouve pleinement confirmée par les principes de la théorie. Pour justifier notre assertion, nous résoudrons le problème de la roulette à axe fixe, déjà traité et profondément éclairci, comme tant d'autres questions intéressantes, par M. Poncelet dans son Cours de Machines a l'École de Metz.

Soit, *fig.* 1, *Pl. I*, une roulette à axe fixe, portant une charge P, posée sur le plateau $\overline{AB}$, et soit p le poids de la roulette elle-même, celui du plateau se trouvant compris dans P; il est évident que la force de traction horizontale F n'a d'autre résistance à vaincre que le frottement de glissement sur l'axe fixe o, et celui du roulement de la roue sous le plateau. Nommons m le point de contact du cercle de l'œil de la roulette avec l'essieu circulaire fixe dans l'état de mouvement permanent; α l'angle de la résultante N des forces $(P + p)$ et F, avec la ligne droite moC qui joint m aux centres o et C de l'axe et de l'œil; β l'angle de N avec la verticale de $P + p$ ou du centre: on obtiendra, par le principe des moments virtuels effectifs et par celui des moments de rotation des forces autour du point m,

$$(1) \qquad F\left[1+f\frac{r}{R}\sin(\alpha-\beta)\right]=f\frac{r}{R}(P+p)\cos(\alpha-\beta)+\frac{A'P}{\varphi(R)},$$

équation dans laquelle f exprime le coefficient du frottement de glissement sur l'axe fixe, R le rayon de la roulette, r celui de son œil, A′ le coefficient de la résistance au roulement, entre la roulette et le plateau, tandis que $\frac{A'}{\varphi(R)}$ exprime la loi inconnue de cette résistance en fonction du rayon R, les surfaces roulantes étant censées complétement dépourvues d'aspérités; car, dans l'hypothèse contraire, il faudrait ajouter au second membre de l'équation (1) un terme correspondant au degré d'élévation du fardeau que nécessiterait la présence de telles aspérités.

Mais puisque l'œil de la roulette peut rouler autour du point m, il faut qu'on ait encore, par les moments de rotation,

$$(2) \qquad F\left[1-\frac{r}{R}\cos(\alpha-\beta)\right]=(P+p)\frac{r}{R}\sin(\alpha-\beta),$$

équation qui exprime aussi que la résultante N passe par le point de contact m. On obtient ensuite, et évidemment, par la décomposition de N en une force tangentielle et en une force normale,

$$(3) \qquad \operatorname{tang}\alpha=f.$$

Mais comme les deux forces F et $(P+p)$ sont, dans le cas actuel, rectangulaires entre elles, on obtient immédiatement cette quatrième équation de condition

$$(4) \qquad (P+p)\operatorname{tang}\beta=F;$$

et néanmoins, il n'y a tout au plus que trois inconnues distinctes, α, β, F; or, en égalant entre elles les valeurs de $F:(P+p)$, tirées des égalités (2) et (4), on obtient, par une simple réduction, l'équation de condition suivante :

$$(a) \qquad R\sin\beta-r\sin\alpha=0.$$

Mais si l'on abaisse du centre C de l'œil de la roulette une perpendiculaire $\overline{CV}$ sur la ligne Tm de la résultante, on a, par le triangle TCV,

$$\overline{CV} = R \sin \beta;$$

et, dans le triangle CmV,

$$\overline{CV} = r \sin \alpha.$$

Il suit de là que l'égalité (a) se trouve en effet vérifiée indépendamment de toute considération mécanique, et qu'elle donne, en même temps, β en valeurs de r, R, α ou f. Cela posé, on pourra, par conséquent, négliger la considération de l'équation (2), en tenant compte de celle des équations (4) et (a), qui fait connaître β d'une manière purement géométrique; mais puisque α, β se trouvent déterminées par les équations (3) et (a), et que, par l'équation (4), la force F est une fonction connue de α, β, $\overline{P+p}$, il faut qu'en substituant dans l'équation (1) cette valeur de F, on obtienne un résultat qui subsiste entre quantités connues. Cette substitution donne

$$\frac{A'P}{\varphi(R)} = \overline{P+p}\left[\tang \beta + f\frac{r}{R}\tang \beta \sin(\alpha - \beta) - f\frac{r}{R}\cos(\alpha - \beta)\right].$$

Mais en remplaçant f par $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, et $\frac{r}{R}$ par $\frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$, on obtient, par une réduction facile, le second facteur du second membre égal à

$$\tang \beta - \tang \beta = 0;$$

de sorte que l'on a ainsi

$$\frac{A'P}{\varphi(R)} = 0.$$

De là il faut conclure que, quand deux surfaces sont parfaitement planes et dépourvues de toutes aspérités, le frottement de roulement est absolument nul entre elles, quelle que soit la pression; et la force de traction F a, par conséquent, la valeur fournie par l'égalité (4), après qu'on y aura mis la valeur de tang β en f, r, R; d'où résulte

$$(b) \qquad F = (P+p)\frac{\sin \beta}{\sqrt{1-\sin^2 \beta}} = (P+p)\frac{r}{R}\frac{f}{\sqrt{1+f^2-f^2\frac{r^2}{R^2}}}.$$

Ainsi les équations (3), (a) et (b) font connaître les valeurs des trois inconnues α, β, F, et notre question se trouve résolue complétement. De plus, cette solution, comme celle de quelques questions analogues, mène à l'idée d'attribuer la résistance du roulement aux aspérités des surfaces frottantes, laquelle est due ainsi à ce que la charge se soulève en effet d'une petite quantité autour de chaque petit obstacle; car, pour le démontrer, proposons-nous de déterminer la valeur de la force φ capable de vaincre et d'équilibrer toutes les résistances dans le cas de la question précédente, mais dans la supposition que, la surface du plateau restant très-unie, la roue soit munie d'une petite saillie de hauteur h dans le sens du rayon et en contact avec le dessous du plateau, en un point a, *fig.* 2, en arrière du point T.

Soit X la force verticale ascendante qui, dans l'état de repos, serait capable d'équilibrer le poids P autour du point a; on aura donc

$$X\,\overline{ab} = P\,\overline{aT}.$$

Le point a supporte donc une pression verticale $P' = P - P\left(\frac{aT}{ab}\right)$: l'autre partie $P\left(\frac{aT}{ab}\right)$ fera incliner le plateau si la force X n'existe pas, ou bien elle sera détruite par le dos du moteur, produisant la force de traction horizontale. La pression en a occasionnera un frottement de glissement $f_1 P \frac{bT}{ab}$ ou $f_1 P'$ pour abréger, et c'est par l'effet de cette force passive que le plateau devient comme adhérent à la saillie de la roue à l'instant même où celle-ci vient toucher et frapper le dessous du plateau en a. Mais la force φ, qui est maintenant requise pour l'équilibre, doit surpasser la force F, calculée plus haut; car non-seulement elle doit vaincre la résistance entre l'œil et l'essieu, il faut encore qu'elle soulève un peu, pendant chaque moment, la charge P autour du centre C. De plus, cette force φ sera variable avec la distance $\overline{aT}$; mais il suffit de la calculer dans sa valeur initiale; car, en y changeant ensuite la valeur initiale en une valeur comprise entre zéro et celle-là, on aurait au besoin la valeur de la force motrice variable.

§ II.

Nommons toujours α l'angle de la résultante N' des forces φ et $(P'+p)$ avec la droite moC, tirée par le point de contact m aux centres o, C; β' l'angle de N' avec la verticale. Remarquons aussi que le point d'intersection des deux forces φ et $P'+p$ n'est pas en a, mais entre a et T, et très-voisin de a si p est censé très-petit par rapport à P; soit a' ce point d'intersection. Dans le mouvement utile, la résultante N' agira donc de a' vers m, ce qui donne toujours en m, suivant mC, une force normale $N'\cos\alpha$, partant un frottement $fN'\cos\alpha$. Mais il se présente maintenant deux questions à résoudre: celle du mouvement initial singulier et celle de la supposition d'un point de contact permanent.

A partir du repos et jusqu'à ce que le point de contact m, pour lequel on a toujours

$$\operatorname{tang}\alpha = f,$$

soit atteint, la force motrice, qui est censée croître par degrés insensibles d'abord, finira par avoir une valeur ψ, suffisante pour faire rouler l'œil de la roulette sur l'essieu fixe. Rapportons ce mouvement de roulement au centre fixe o de l'essieu, et admettons que l'angle de rotation soit déjà ε; le centre C de l'œil et tous les points de la roulette ont donc tourné autour de o, en roulant sur l'essieu d'un angle ε. Le centre C s'est donc élevé d'un arc $(r-\rho)\varepsilon$, qui vaut en projection verticale $(r-\rho)(1-\cos\varepsilon)$, et en projection horizontale, $(r-\rho)\sin\varepsilon$. Le poids $P'+p$ s'est donc élevé d'une quantité verticale égale à cette première projection, et le moment virtuel du poids pour l'instant suivant sera

$$(P'+p)(r-\rho)\sin\varepsilon\, d\varepsilon.$$

Mais la roulette ayant roulé de n en m sur l'essieu, le point de contact T de la force motrice ψ a décrit l'arc $TT' = (R-r+\rho)\varepsilon$, et pendant l'instant qui suit, il décrira, par conséquent, le chemin $(R-r+\rho)\,d\varepsilon$ ou $T'T''$; et cet élément faisant avec la ligne primitive de ψ un angle ε, on obtient, pour le moment virtuel contemporain de la force ψ,

$$\psi(\mathrm{R} - r + \rho)\, d\varepsilon \cos\varepsilon.$$

On voit donc que pour faire rouler un cercle, percé d'un œil sur un axe fixe, la charge $\mathrm{P}' + p$, on a besoin d'une force motrice ψ, donnée par l'équation

$$\psi(\mathrm{R} - r + \rho)\cos\varepsilon = (\mathrm{P}' + p)(r - \rho)\sin\varepsilon;$$

et c'est cet effort que l'on peut nommer ici le frottement de roulement du cercle mobile sur le cercle fixe. On déduit de là

$$\psi = (\mathrm{P}' + p)\left(\frac{r - \rho}{\mathrm{R}}\right)\operatorname{tang}\varepsilon,$$

ce qui fait ψ proportionnel à la charge $\mathrm{P}' + p$, et en raison inverse du rayon de la roue.

Si l'on a $r = \rho$, alors $\psi = 0$, et le frottement de glissement se substitue dès l'instant même qu'on voudra produire le mouvement.

Mais le mouvement initial singulier cessera dès qu'une fois la résultante des forces φ passe par m, et que sa composante tangentielle devient strictement égale et contraire au frottement de glissement en ce point. Cette résultante N', correspondante à la nouvelle force de traction φ, passera, non pas par le point a même, mais par un point voisin, compris entre a et T_1, *fig.* 3; car la force verticale est non pas P', mais $\mathrm{P}' + p$: en outre, N' fera avec la ligne $mo\mathrm{C}'$ un angle α, et avec la verticale un angle β'. Il s'agit donc de déterminer les quantités α, β', φ; or on a immédiatement

$$\operatorname{tang}\alpha = f,$$

et ensuite

$$(1) \qquad \operatorname{tang}\beta' = \frac{\varphi}{\mathrm{P}' + p}.$$

Eu égard à la condition

$$\mathrm{N}'\cos\alpha = (\mathrm{P}' + p)\cos(\alpha - \beta') - \varphi\sin(\alpha - \beta'),$$

on obtient, par le principe des moments effectifs,

$$(2) \quad \left\{\begin{aligned} \varphi(\mathrm{R} + h)\sin\lambda = \mathrm{P}'(\mathrm{R} + h)\cos\lambda &+ f(\mathrm{P}' + p)\cos(\alpha - \beta')\, r \\ &- f\varphi\sin(\alpha - \beta')\, r. \end{aligned}\right.$$

On désigne par λ l'angle de la saillie ab placée suivant le rayon $C'b$ prolongé, avec l'horizontale du centre C'. En nommant encore h la hauteur de cette saillie, on a

$$aT_1 = (R + h)\cos\lambda = \sqrt{2Rh + h^2}$$

et

$$\sin\lambda = R : (R + h).$$

Ainsi λ est connu et déterminé dès que la hauteur h est donnée; il n'y a donc que deux inconnues distinctes β', φ, et les équations (1) et (2) suffisent pour les déterminer.

Nommons a' le point d'application de la force $P' + p$ entre a et T_1; on aura

$$\frac{a'T_1}{aT_1} = \frac{P'}{P'+p}, \quad \operatorname{tang}\beta' = \frac{mg}{a'g} = \frac{a'T_1 + r\sin(\alpha - \beta')}{R - r\cos(\alpha - \beta')},$$

ou, en mettant pour $a'T_1$ sa valeur,

$$(3) \qquad \operatorname{tang}\beta' = \frac{P'}{P'+p}\,\frac{(R + h)\cos\lambda}{R - r\cos(\alpha - \beta')} + \frac{r\sin(\alpha - \beta')}{R - r\cos(\alpha - \beta')}.$$

De cette équation on pourra déduire la valeur de β', quoiqu'elle ne soit pas encore résolue par rapport à l'inconnue. Mais en substituant, dans l'équation (2), la valeur

$$\varphi = (P' + p)\operatorname{tang}\beta',$$

on en déduit encore, pour β',

$$(4) \qquad \operatorname{tang}\beta' = \frac{P'}{P'+p}\,\frac{(R + h)\cos\lambda}{R + fr\sin(\alpha - \beta')} + \frac{fr\cos(\alpha - \beta')}{R + fr\sin(\alpha - \beta')}.$$

Il faut donc que ces deux équations s'accordent à donner pour β' la même valeur, et qu'elles offrent, par conséquent, une vérification de nos raisonnements et des résultats établis. Pour opérer cette vérification et pour obtenir à la fois une équation plus simple, posons

$$P'(P' + p) = \mu \quad \text{et} \quad \alpha - \beta' = w.$$

Les deux valeurs de tang β' obtenues ci-dessus, étant égalées entre elles, donnent l'équation de condition suivante :

$$\mu(R + h)\cos\lambda\left(\frac{1}{R + fr\sin w} - \frac{1}{R - r\cos w}\right) + \frac{fr\cos w}{R + fr\sin w} - \frac{r\sin w}{R - r\cos w} = 0.$$

Si l'on réduit cette dernière d'après la condition de $f = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, on obtient l'équation suivante pour β' :

$$(5) \qquad \sin\beta' - \mu\frac{R+h}{R}\cos\lambda\cos\beta' - f\frac{r}{R}\cos\alpha = 0.$$

Mais telle est précisément la forme à laquelle on peut ramener l'équation (3) par le développement de $\sin(\alpha - \beta')$, $\cos(\alpha - \beta')$. Ainsi la combinaison des égalités (3) et (4) donne pour β' la même valeur que l'équation (3), considérée isolément; de sorte qu'elles sont équivalentes l'une à l'autre. Cette vérification étant faite, il en résulte qu'il est permis de négliger l'égalité (3), et de tenir seulement compte des égalités (1) et (2), auxquelles on est conduit immédiatement et qui suffisent pour avoir φ et β'.

Si l'on veut se borner à une approximation, l'égalité (2) suffira seule; en observant que

$$(R+h)\sin\lambda = R,$$

on en déduit

$$\varphi = P'\frac{(R+h)\cos\lambda}{R+fr\sin(\alpha-\beta')} + f(P'+p)\frac{r\cos(\alpha-\beta')}{R+fr\sin(\alpha-\beta')}.$$

En négligeant d'abord $fr\sin(\alpha - \beta')$ par rapport R, et prenant

$$\cos(\alpha - \beta') = 1,$$

on obtient une première approximation

$$\varphi' = P'\frac{\sqrt{2Rh+h^2}}{R} + f(P'+p)\frac{r}{R} = P'\frac{\sqrt{2h}}{\sqrt{R}} + f(P'+p)\frac{r}{R}.$$

On voit par là que si la surface de la roue est seulement couverte de très-petites aspérités, chacune de celles-ci exigera un effort *extraordinaire* $P'\frac{\sqrt{2h}}{\sqrt{R}}$, directement proportionnel à la racine carrée de la hauteur de chaque saillie, et en raison réciproque de la racine carrée du rayon de la roue ou roulette.

Or, comme ces saillies se succèdent incessamment, il faut un effort continu soumis à cette loi. C'est dans cet effort ainsi requis qu'il faut faire consister la résistance au roulement, du moins dans le cas actuel et les analogues, puisqu'il est déjà démontré que, les surfaces étant parfaitement unies, cette résistance n'existe pas ou qu'elle est nulle. La loi de Coulomb, qui peut être plus ou moins exacte, selon la nature des surfaces frottantes, ne paraît donc pas admissible pour le cas spécial où ces surfaces seraient très-unies en apparence, très-rigides, mais, en réalité, pourvues d'aspérités plus ou moins sensibles.

Ayant une fois une valeur φ' de φ, on obtient immédiatement une valeur correspondante de β' par l'égalité (1), après avoir remplacé φ par φ'; on pourra ensuite pousser l'approximation aussi loin qu'on voudra, en employant les égalités (1) et (2) alternativement.

Quant à la plus grande limite de l'angle de roulement ou de ε, sur l'essieu, elle sera $\varepsilon_1 = \alpha - \beta'$, et l'arc correspondant sur l'essieu aura la valeur $\rho\,(\alpha - \beta')$; c'est la longueur de l'arc nm.

Pour savoir si le point de contact m sera toujours en avant de la verticale passant par le centre de l'essieu, il faut développer tang $(\alpha - \beta')$; ce qui donne, en vertu de l'égalité (1),

$$\operatorname{tang}(\alpha - \beta') = \left(f - \frac{\varphi}{P' + p}\right)\left(1 + f\frac{\varphi}{P' + p}\right).$$

Et, en vertu de la valeur de φ en fonction de P', p, h, v, cette valeur sera généralement positive; mais si la hauteur h devenait fort sensible ou fort grande, le contraire pourrait avoir lieu.

Remarque. La résistance au roulement doit être soumise à une loi plus ou moins compliquée à laquelle on ne pourra parvenir qu'en établissant les équations d'équilibre, eu égard aux forces de toute espèce qui agissent au point de contact. En introduisant dans la formule qui exprimerait cette loi d'une manière exacte, de certaines hypothèses particulières, concernant l'élasticité, la compressibilité des surfaces de contact, on doit retrouver des résultats simplifiés qui reproduisent tantôt la loi de Coulomb, tantôt celle de Dupuit, d'une manière au moins approchée.