JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

P. BRETON

Analyse de l'ouvrage de Stewart, intitulé : Quelques théorèmes généraux d'un grand usage dans les hautes mathématiques

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 13 (1848), p. 281-332.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1848_1_13__281_0>

gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

ANALYSE

De l'ouvrage de STEWART, *intitulé :* QUELQUES THÉORÈMES GÉNÉRAUX D'UN GRAND USAGE DANS LES HAUTES MATHÉMATIQUES ;

PAR M. P. BRETON (DE CHAMP),

Ingénieur des Ponts et Chaussées.

La plupart des théorèmes de géométrie énoncés par Stewart dans l'ouvrage auquel il a donné ce titre [*], peuvent être considérés comme des corollaires de trois propositions principales. Quelques-uns s'y rattachent par l'analogie ; enfin, un certain nombre sont simplement des théorèmes particuliers. On sait que l'auteur n'en a démontré que cinq. J'ignore si les autres ont été l'objet de quelques recherches ; cependant ceux que M. Chasles a cités, dans son *Aperçu historique,* ont dû intéresser les géomètres et provoquer des efforts de leur part. S'il n'a rien été publié sur ce sujet, cela tient, sans doute, à ce que l'on a regardé comme vrais plusieurs énoncés qui ne le sont pas, c'est-à-dire ne se vérifient que sous certaines conditions, non indiquées par le géomètre anglais. Cette circonstance, que son grand renom ne permettait guère de soupçonner, va ressortir de l'analyse qui suit.

PREMIER THÉORÈME GÉNÉRAL.

1. Soient O un point quelconque, $A_1, A_2, \ldots, A_m$, m points donnés.

[*] *Some general theorems of considerable use in the higher parts of Mathematics*, by MATTEW STEWART. Édinburgh, 1746.

J'ai annoncé à l'Académie des Sciences, le 8 juin 1846, que plusieurs des propositions contenues dans cet ouvrage sont fausses, c'est-à-dire ne se vérifient que dans des cas particuliers. La grande estime dont jouit le nom de Stewart en Angleterre m'a fait penser qu'il convenait de rendre publiques les preuves de cette assertion.

k_1, k_2,..., k_m autant de coefficients également donnés, et A'_1, A'_2,..., A'_{n+1}, $n+1$ points inconnus. La proposition XLIV revient à dire qu'on peut déterminer ces derniers, n étant moindre que m, de manière que la relation

$$\frac{k_1\overline{OA_1}^{2n}+k_2\overline{OA_2}^{2n}+\ldots+k_m\overline{OA_m}^{2n}}{k_1+k_2+k_3+\ldots+k_m}=\frac{\overline{OA'_1}^{2n}+\overline{OA'_2}^{2n}+\ldots+\overline{OA'_{n+1}}^{2n}}{n+1}$$

se vérifie quel que soit le point O. En supposant les coefficients k_1, k_2,..., k_m égaux à l'unité et $n < m-1$, on a l'énoncé de la proposition XLIII.

Je regarderai la somme $k_1+k_2+\ldots+k_m$ comme positive; car si elle ne l'était pas, il suffirait, pour la rendre telle, de changer les signes de tous les termes dans le premier membre, ce qui est permis.

Cette somme ne saurait être nulle, car le premier membre deviendrait infini ou indéterminé, ce qui n'offrirait aucun sens.

Les points donnés étant rapportés à deux axes rectangulaires, cette relation peut s'écrire sous la forme

$$\frac{\mathbf{S}_{i=1}^{i=m}k_i[(x-a_i)^2+(y-b_i)^2]^n}{\mathbf{S}_{i=1}^{i=m}k_i}=\frac{\mathbf{S}_{i=1}^{i=n+1}[(x-\xi_i)^2+(y-\eta_i)^2]^n}{n+1},$$

en appelant a_i, b_i les coordonnées du point A_i; ξ_i, η_i celles de A'_i, et x, y celles de O.

Si l'on développe les deux membres, on trouve une équation en x, y, laquelle se réduit au degré $2n-1$. Comme elle doit être satisfaite quelque valeur qu'on attribue à chacune de ces variables, il faut que les coefficients de tous ses termes soient nuls [*]. En les égalant à

[*] On peut donner de ce principe la démonstration que voici :

Soit $F=0$ une équation entre les variables x, y, qu'on suppose vérifiées quelles que soient les valeurs qui leur sont assignées. Écrivons

$$F=u_n+u_{n-1}+u_{n-2}+\ldots+u_2+u_1+u_0,$$

u_i étant l'ensemble des termes de degré i qui se trouvent dans F. Si l'on fait $y=\alpha' x$, en désignant par α' un coefficient arbitraire, il vient

$$A'_n x^n+A'_{n-1}x^{n-1}+A'_{n-2}x^{n-2}+\ldots+A'_2x^2+A'_1x+u_0=0,$$

A'_i étant une fonction de α' qui s'élève au degré i.

Si l'on fait maintenant varier x, sans que α' change de valeur, comme cette équation zéro, on a les équations qu'il faut résoudre pour déterminer les points A'_i lorsque cela est possible.

2. Supposons d'abord l'exposant n égal à l'unité; nous aurons la proposition XII. Les équations obtenues comme il vient d'être dit sont :

$$\xi_1 + \xi_2 = \frac{2}{Sk_i} Sk_i a_i,$$

$$\eta_1 + \eta_2 = \frac{2}{Sk_i} Sk_i b_i,$$

$$\xi_1^2 + \eta_1^2 + \xi_2^2 + \eta_2^2 = \frac{2}{Sk_i} Sk_i (a_i^2 + b_i^2),$$

les sommes étant prises de $i = 1$ à $i = m$. On voit que le centre de gravité des points cherchés A'_1, A'_2 n'est autre chose que celui des points donnés A_i sollicités par des forces k_i parallèles entre elles. Si l'on prend ce centre pour origine des coordonnés, il vient

$$\xi_1 + \xi_2 = 0, \quad \eta_1 + \eta_2 = 0,$$

d'où

$$\xi_2 = -\xi_1 \quad \text{et} \quad \eta_2 = -\eta_1,$$

et, par suite,

$$\xi_1^2 + \eta_1^2 = \frac{1}{Sk_i} Sk_i (a_i^2 + b_i^2).$$

---

se vérifie, par hypothèse, quel que soit x, il faut que l'on ait séparément

$$A'_n = 0, \quad A'_{n-1} = 0, \quad A'_{n-2} = 0, \ldots, \quad A'_2 = 0, \quad A'_1 = 0, \quad u_0 = 0;$$

en prenant d'autres coefficients α'', α''',..., il vient de même

$$A''_n = 0, \quad A''_{n-1} = 0, \quad A''_{n-2} = 0, \ldots, \quad A''_2 = 0, \quad A''_1 = 0,$$
$$A'''_n = 0, \quad A'''_{n-1} = 0, \quad A'''_{n-2} = 0, \ldots, \quad A'''_2 = 0, \quad A'''_1 = 0,$$

A''_i, A'''_i,... étant le résultat de la substitution de α'', α''',... au lieu de α' dans A'_i.

On peut donc considérer A_i comme une fonction d'une seule variable α, qui est nulle quelle que soit la valeur de α. Or on sait que, dans une telle fonction, les coefficients des diverses puissances sont nuls; donc tous les coefficients de A_i, lesquels ne sont autre chose que ceux de u_i, sont nuls, et, par conséquent aussi, tous ceux de F. Ce qu'il fallait demontrer.

Donc les deux extrémités de chaque diamètre du cercle qui a pour rayon $\sqrt{\frac{1}{Sk_i} Sk_i(a_i^2 + b_i^2)}$ jouissent de la propriété énoncée ci-dessus. On pouvait s'attendre à cette indétermination; car, en tirant des droites du point O à l'origine et aux deux points trouvés, la somme des carrés de ces dernières est égale au carré de la première, plus deux fois le carré du rayon, d'après un théorème bien connu de géométrie élémentaire.

En faisant $k_i = 1$, on a la proposition XI.

3. La proposition X, k_i étant quelconque, et la proposition IX, k_i étant égal à l'unité, s'énoncent en disant qu'on peut trouver un point A, tel que l'on ait

$$\begin{aligned} & k_1 \overline{OA}_1^2 + k_2 \overline{OA}_2^2 + k_3 \overline{OA}_3^2 + \ldots + k_m \overline{OA}_m^2 \\ = & k_1 \overline{AA}_1^2 + k_2 \overline{AA}_2^2 + k_3 \overline{AA}_3^2 + \ldots + k_m \overline{AA}_m^2 + (k_1 + k_2 + \ldots + k_m) \overline{OA}^2. \end{aligned}$$

Ce point n'est autre chose que le centre des forces parallèles k_i appliquées aux points A_i.

Stewart a démontré ce théorème dans deux cas très-particuliers, savoir: 1° quand les points donnés sont les sommets d'une portion de polygone régulier; 2° quand ce polygone est complet. Cela forme l'objet des propositions VII et IV. Alors, en appelant ρ la distance de A au centre de la circonférence sur laquelle se trouvent les sommets, et R le rayon, la quantité constante qui figure dans le second membre de l'équation ci-dessus est égale à $m(R^2 - \rho^2)$. Elle se réduit à mR^2 pour un polygone complet. On suppose $k_i = 1$.

4. Soit maintenant $n = 2$. Il s'agit de trouver trois points A'_1, A'_2, A'_3, tels que l'on ait

$$\frac{k_1 \overline{OA}_1^4 + k_2 \overline{OA}_2^4 + k_3 \overline{OA}_3^4 + \ldots + k_m \overline{OA}_m^4}{k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_m} = \frac{\overline{OA'_1}^4 + \overline{OA'_2}^4 + \overline{OA'_3}^4}{3},$$

quel que soit le point O. Stewart annonce, dans sa proposition XXXIII, que cela est toujours possible. Je vais montrer que, sur ce point, il est tombé dans l'erreur.

Pour simplifier les calculs, j'admettrai que les axes des coordonnées sont choisis de manière à satisfaire aux trois équations

$$Sk_i a_i = 0, \quad Sk_i b_i = 0, \quad Sk_i a_i b_i = 0.$$

Il existe toujours un système, en général unique, d'axes rectangulaires jouissant de cette propriété. Toutefois, l'origine peut être située à l'infini lorsque l'on a $Sk_i = 0$, supposition que nous avons écartée au n° **1**. Cette recherche, analogue à celle du centre et des axes principaux d'une ligne du second ordre, donne lieu à une discussion et à des remarques tout à fait semblables. Une autre simplification résulte de ce que les équations obtenues en égalant à zéro les coefficients de x^2 et de y^2 donnent

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = \frac{3}{Sk_i} Sk_i a_i^2, \quad \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 = \frac{3}{Sk_i} Sk_i b_i^2.$$

Cela posé, les équations à résoudre sont les suivantes :

$$(1) \qquad \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0,$$

$$(2) \qquad \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 0,$$

$$(3) \qquad \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \xi_3\eta_3 = 0,$$

$$(4) \qquad \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = \frac{3}{Sk_i} Sk_i a_i^2,$$

$$(5) \qquad \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 = \frac{3}{Sk_i} Sk_i b_i^2,$$

$$(6) \quad \xi_1(\xi_1^2 + \eta_1^2) + \xi_2(\xi_2^2 + \eta_2^2) + \xi_3(\xi_3^2 + \eta_3^2) = \frac{3}{Sk_i} Sk_i a_i(a_i^2 + b_i^2),$$

$$(7) \quad \eta_1(\xi_1^2 + \eta_1^2) + \eta_2(\xi_2^2 + \eta_2^2) + \eta_3(\xi_3^2 + \eta_3^2) = \frac{3}{Sk_i} Sk_i b_i(a_i^2 + b_i^2),$$

$$(8) \quad (\xi_1^2 + \eta_1^2)^2 + (\xi_2^2 + \eta_2^2)^2 + (\xi_3^2 + \eta_3^2)^2 = \frac{3}{Sk_i} Sk_i(a_i^2 + b_i^2)^2.$$

Comme elles sont au nombre de huit, tandis qu'il n'y a que six inconnues, il s'ensuit que l'élimination de celles-ci fournira deux équations de condition entre les quantités connues, et le théorème ne pourra être vrai si ces équations ne se réduisent pas à des identités. C'est donc par l'examen de cette circonstance que la question sera résolue.

Des équations (2), (3) et (5) je tire

$$\eta_1^2 = \frac{3}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}k_i b_i^2 \cdot \left[\frac{(\xi_3-\xi_2)^2}{(\xi_3-\xi_2)^2+(\xi_2-\xi_1)^2+(\xi_1-\xi_3)^2}\right];$$

d'un autre côté, les équations (1) et (4) donnent

$$(\xi_3-\xi_2)^2 = 2\cdot\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}k_i a_i^2 - 3\xi_1^2,$$

$$(\xi_2-\xi_1)^2 = 2\cdot\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}k_i a_i^2 - 3\xi_3^2,$$

$$(\xi_1-\xi_3)^2 = 2\cdot\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}k_i a_i^2 - 3\xi_2^2,$$

d'où

$$(\xi_3-\xi_2)^2+(\xi_2-\xi_1)^2+(\xi_1-\xi_3)^2 = 3\cdot\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}k_i a_i^2;$$

par conséquent, on a

$$\eta_1^2 = \frac{3}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}k_i b_i^2 \cdot \frac{2\cdot\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}k_i a_i^2 - 3\xi_1^2}{3\cdot\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}k_i a_i^2},$$

et il vient

$$\xi_1^2+\eta_1^2 = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}k_i b_i^2 + \left(1-\frac{\mathrm{S}k_i b_i^2}{\mathrm{S}k_i a_i^2}\right)\xi_1^2.$$

On trouverait de même

$$\xi_2^2+\eta_2^2 = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}k_i b_i^2 + \left(1-\frac{\mathrm{S}k_i b_i^2}{\mathrm{S}k_i a_i^2}\right)\xi_2^2$$

et

$$\xi_3^2+\eta_3^2 = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}k_i b_i^2 + \left(1-\frac{\mathrm{S}k_i b_i^2}{\mathrm{S}k_i a_i^2}\right)\xi_3^2.$$

Au moyen de ces expresssions, l'équation (8) devient, toutes réductions faites,

$$\xi_1^4+\xi_2^4+\xi_3^4 = \frac{\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}k_i(a_i^2+b_i^2)^2 - \frac{4}{3}\cdot\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}k_i a_i^2\cdot\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}k_i b_i^2}{\left(1-\frac{\mathrm{S}k_i b_i^2}{\mathrm{S}k_i a_i^2}\right)^2}.$$

Or on a identiquement

$$\xi_1^4+\xi_2^4+\xi_3^4 = (\xi_1+\xi_2+\xi_3)(\xi_1^3+\xi_2^3+\xi_3^3)$$
$$-(\xi_1\xi_2+\xi_2\xi_3+\xi_3\xi_1)(\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2)+\xi_1\xi_2\xi_3(\xi_1+\xi_2+\xi_3).$$

Le premier et le troisième termes du second membre sont nuls en vertu de l'équation (1). De l'égalité ci-dessus démontrée,

$$(\xi_3 - \xi_2)^2 + (\xi_2 - \xi_1)^2 + (\xi_1 - \xi_3)^2 = 3 \cdot \frac{3}{\mathrm{S}k_i} \mathrm{S}k_i a_i^2,$$

on tire

$$\xi_1 \xi_2 + \xi_2 \xi_3 + \xi_3 \xi_1 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{\mathrm{S}k_i} \mathrm{S}k_i a_i^2;$$

par suite, on a aussi

$$\xi_1^4 + \xi_2^4 + \xi_3^4 = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{\mathrm{S}k_i} \mathrm{S}k_i a_i \right)^2.$$

Cette nouvelle expression de $\xi_1^4 + \xi_2^4 + \xi_3^4$ doit être égale à celle déjà obtenue; de là l'équation de condition

$$\frac{1}{2} \left(\frac{3}{\mathrm{S}k_i} \mathrm{S}k_i a_i^2 \right)^2 = \frac{\frac{3}{\mathrm{S}k_i} \mathrm{S}k_i (a_i^2 + b_i^2)^2 - \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{\mathrm{S}k_i} \mathrm{S}k_i a_i^2 \cdot \frac{3}{\mathrm{S}k_i} \mathrm{S}k_i b_i^2}{\left(1 - \frac{\mathrm{S}k_i b_i^2}{\mathrm{S}k_i a_i^2} \right)^2},$$

laquelle peut se mettre sous la forme plus symétrique

$$\frac{1}{2} (\mathrm{S}k_i a_i^2 - \mathrm{S}k_i b_i^2)^2 = \frac{\mathrm{S}k_i}{3} \mathrm{S}k_i (a_i^2 + b_i^2)^2 - \frac{4}{3} \mathrm{S}k_i a^2 . \mathrm{S}k_i b^2.$$

Il est facile de s'assurer qu'en général elle ne se vérifie pas. Supposons, par exemple, comme Stewart dans sa proposition XXXII, que l'on ait $k_i = 1$, et que, de plus, les points donnés soient les quatre sommets d'un losange dont les diagonales $2a$, $2b$ se confondent avec les axes des coordonnées. Alors on a $m = 4$ et

$$\mathrm{S}a_i = 0, \quad \mathrm{S}b_i = 0, \quad \mathrm{S}a_i b_i = 0. \quad \mathrm{S}a_i^2 = 2a^2, \quad \mathrm{S}b_i^2 = 2b^2,$$

$$\mathrm{S}a_i (a_i^2 + b_i^2) = 0, \quad \mathrm{S}b_i (a_i^2 + b_i^2) = 0, \quad \mathrm{S}(a_i^2 + b_i^2) = 2(a^4 + b^4).$$

Pour que le théorème fût vrai, il faudrait qu'on eût

$$\frac{1}{2} (2a^2 - 2b^2)^2 = \frac{4}{3} \cdot 2(a^4 + b^4) - \frac{4}{3} \cdot 2a^2 . 2b^2,$$

c'est-à-dire $a = b$, ou que le losange fût un carré.

5. Quand la condition ci-dessus est remplie, on construit sans peine les équations du troisième degré, qui ont pour racines les inconnues

ξ_1, ξ_2, ξ_3 et η_1, η_2, η_3. Car, d'abord, les sommes $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3$, $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$ font partie des données du problème; ensuite, l'équation (6) devient, par l'élimination de η_1, η_2, η_3,

$$\xi_1^3 + \xi_2^3 + \xi_3^3 = \frac{\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}k_i a_i(a_i^2 + b_i^2)}{1 - \frac{\mathrm{S}k_i b_i^2}{\mathrm{S}k_i a_i^2}}.$$

D'ailleurs on a identiquement

$$\xi_1\xi_2\xi_3 = \frac{1}{3}\left[\begin{array}{l}(\xi_1^3 + \xi_2^3 + \xi_3^3) - (\xi_1 + \xi_2 + \xi_3)(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2) \\ + (\xi_1\xi_3 + \xi_2\xi_3 + \xi_3\xi_2)(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3)\end{array}\right],$$

ou simplement, en vertu de la relation $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0$,

$$\xi_1\xi_2\xi_3 = \frac{1}{3}(\xi_1^3 + \xi_2^3 + \xi_3^3) = \frac{1}{3}\,\frac{\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}k_i a_i(a_i^2 + b_i^2)}{1 - \frac{\mathrm{S}k_i b_i^2}{\mathrm{S}k_i a_i^2}}.$$

Si l'on se rappelle enfin qu'on a trouvé ci-dessus,

$$\xi_1\xi_2 + \xi_2\xi_3 + \xi_3\xi_1 = -\frac{1}{2}\,\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}k_i a_i^2,$$

il vient, pour l'équation cherchée,

$$\xi^3 - \frac{1}{2}\,\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}k_i a_i^2.\xi + \frac{1}{3}\,\frac{\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}k_i a_i(a_i^2 + b_i^2)}{1 - \frac{\mathrm{S}k_i b_i^2}{\mathrm{S}k_i a_i^2}} = 0.$$

On obtiendrait de même pour l'équation dont les racines sont η_1, η_2, η_3,

$$\eta^3 - \frac{1}{2}\,\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}k_i b_i^2.\eta - \frac{1}{3}\,\frac{\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}k_i b_i(a_i^2 + b_i^2)}{1 - \frac{\mathrm{S}k_i a_i^2}{\mathrm{S}k_i b_i^2}} = 0.$$

6. Dans le cas particulier où les points donnés A_1, A_2,..., A_m sont les sommets d'un polygone régulier, et les coefficients k_i égaux à l'unité, l'équation de condition est toujours satisfaite. Nommons, en effet, R le rayon du cercle circonscrit au polygone; on trouve

$$\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}a_i^2 = \frac{3}{2}\mathrm{R}^2,\quad \frac{3}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}b_i^2 = \frac{3}{2}\mathrm{R}^2,\quad \frac{3}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}(a_i^2 + b_i^2)^2 = 3\mathrm{R}^4,$$

et cette équation devient identique par la substitution de ces valeurs.

Les quantités Sa_i^2, Sb_i^2 étant égales entre elles, les calculs du n° **4** donnent la relation

$$\xi_1^2 + \eta_1^2 = \xi_2^2 + \eta_2^2 = \xi_3^2 + \eta_3^2 = R^2,$$

d'où il résulte que les points cherchés sont sur la circonférence de rayon R circonscrite au polygone. De plus on a, pour le carré des côtés du triangle dont ces points sont les sommets,

$$\begin{aligned} \overline{A'_1 A'_2}^2 &= (\xi_2 - \xi_1)^2 + (\eta_2 - \eta_1)^2 = 3R^2, \\ \overline{A'_2 A'_3}^2 &= (\xi_3 - \xi_2)^2 + (\eta_3 - \eta_2)^2 = 3R^2, \\ \overline{A'_3 A'_1}^2 &= (\xi_1 - \xi_3)^2 + (\eta_1 - \eta_3)^2 = 3R^2; \end{aligned}$$

par conséquent, ce triangle est équilatéral.

Sa position est indéterminée, car le produit $\xi_1 \xi_2 \xi_3$ ou $\eta_1 \eta_2 \eta_3$ se présente sous la forme $\frac{0}{0}$.

Ces conséquences ont été déduites par Stewart de sa proposition XXVII, où il fait connaître la somme

$$\overline{OA}_1^4 + \overline{OA}_2^4 + \overline{OA}_3^4 + \ldots + \overline{OA}_m^4.$$

Elle a pour expression

$$mR^4 + 4mR^2\rho^2 + m\rho^4,$$

ρ étant la distance du point O à l'origine. En faisant $\rho = R$, c'est-à-dire en prenant le point O sur la circonférence, cette somme devient égale à $6mR^4$; c'est ce que la proposition XXVI a pour objet d'établir. Je montrerai, au n° **8**, comment on obtient ces formules, n étant quelconque.

7. Le théorème énoncé au n° **1** n'est donc vrai, pour $n = 2$, que dans des cas particuliers, et moyennant une condition parfaitement définie, provenant de ce que le nombre des équations à résoudre est supérieur à celui des inconnues. Pour $n = 3$, le nombre de ces équations s'élève à quinze, tandis qu'il n'y a que huit inconnues. Pour

$n = 4$, la différence est encore plus grande, et au delà elle croît très-rapidement. On est donc autorisé à penser que le théorème énoncé par Stewart comme ayant lieu lorsque l'exposant n est quelconque, n'est généralement vrai que dans le cas où cet exposant se réduit à l'unité.

Je signalerai en passant une curieuse relation qui existe entre les distances mutuelles des deux groupes de m points et de $n+1$ points, pour lesquels la relation dont il s'agit se vérifie, les coefficients k_i étant égaux à l'unité.

Faisons coïncider le point O successivement avec $A_1, A_2,\ldots, A_m$, puis avec $A'_1, A'_2,\ldots, A'_{n+1}$; on trouve que la somme des puissances $2n$ de ces distances dans le premier groupe est à la somme des puissances $2n$ des distances analogues dans le second groupe, comme m^2 est à $(n+1)^2$.

8. Le théorème du n° 1 se vérifie toujours lorsque, les coefficients k_i étant égaux à l'unité, les points $A_1, A_2,\ldots, A_m$ sont les sommets d'un polygone régulier. Soient toujours R le rayon du cercle circonscrit et ρ la distance de son centre au point O. Nommons, de plus, φ l'angle compris entre cette droite et OA_2; nous aurons

$$\overline{OA}_1^2 = R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos\varphi,$$
$$\overline{OA}_2^2 = R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos\left(\varphi + \frac{2\pi}{m}\right),$$
$$\overline{OA}_3^2 = R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos\left(\varphi + 2\cdot\frac{2\pi}{m}\right),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\overline{OA}_n^2 = R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos\left[\varphi + (m-1)\frac{2\pi}{m}\right].$$

Élevons les deux membres de chacune de ces égalités à la puissance n, et faisons la somme des résultats obtenus, en remarquant que l'on a pour des valeurs de $2i+1$ moindres que m,

$$\cos^{2i+1}\varphi + \cos^{2i+1}\left(\varphi + \frac{2\pi}{m}\right)$$
$$+ \cos^{2i+1}\left(\varphi + 2\cdot\frac{2\pi}{m}\right) + \ldots + \cos^{2i+1}\left[\varphi + (m-1)\frac{2\pi}{m}\right] = 0;$$

et, pour des valeurs de $2i$ moindres que m,

$$\cos^{2i}\varphi + \cos^{2i}\left(\varphi + \frac{2\pi}{m}\right)$$
$$+ \cos^{2i}\left(\varphi + 2\cdot\frac{2\pi}{m}\right) + \ldots + \cos^{2i}\left[\varphi + (n-1)\frac{2\pi}{m}\right]$$
$$= \frac{m}{2^{2i}}\cdot\frac{2i(2i-1)(2i-2)\ldots(i+1)}{1.2.3\ldots i},$$

il vient

$$\overline{\mathrm{OA}}_1^{2n} + \overline{\mathrm{OA}}_2^{2n} + \overline{\mathrm{OA}}_3^{2n} + \ldots + \overline{\mathrm{OA}}_m^{2n}$$
$$= m\left\{\begin{aligned} &(\mathrm{R}^2+\rho^2)^n + \frac{1}{2}\cdot\frac{n(n-1)}{1.2}(\mathrm{R}^2+\rho^2)^{n-2}\mathrm{R}^2\rho^2 \\ &+ \frac{4.3}{1.2}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}(\mathrm{R}^2+\rho^2)^{n-4}\mathrm{R}^4\rho^4 \\ &+ \frac{6.5.4}{1.2.3}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1.2.3.4.5.6}(\mathrm{R}^2+\rho^2)^{n-6}\mathrm{R}^6\rho^6+\ldots\end{aligned}\right\}.$$

Si l'on développe les puissances de $\mathrm{R}^2 + \rho^2$, on trouve que le second membre se réduit à

$$m\left[\begin{aligned}&\mathrm{R}^{2n} + \mathrm{P}_1 n\mathrm{R}^{2n-2}\rho^2 + \mathrm{P}_2\frac{n(n-1)}{1.2}\mathrm{R}^{2n-4}\rho^4 \\ &\qquad + \mathrm{P}_3\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\mathrm{R}^{2n-6}\rho^6 + \ldots\end{aligned}\right],$$

en désignant par P_i la quantité

$$1 + i(n-i) + \frac{i(i-1)}{1.2}\cdot\frac{(n-i)(n-i-1)}{1.2}$$
$$+ \frac{i(i-1)(i-2)}{1.2.3}\cdot\frac{(n-i)(n-i-1)(n-i-2)}{1.2.3} + \ldots,$$

dont la loi de formation est évidente.

La somme $\overline{\mathrm{OA}}_1^{2n} + \overline{\mathrm{OA}}_2^{2n} + \ldots + \overline{\mathrm{OA}}_m^{2n}$ est donc, pour une même valeur de l'exposant n, proportionnelle au nombre des côtés du polygone; ce qu'il fallait faire voir.

Stewart présente, dans l'énoncé de sa proposition XLII, cette même somme sous la forme que voici :

$$m\left[\mathrm{R}^{2n} + n^2\mathrm{R}^{2n-2}\rho^2 + \frac{n^2(n-1)^2}{1^2.2^2}\mathrm{R}^{2n-4}\rho^4 + \frac{n^2(n-1)^2(n-2)^2}{1^2.2^2.3^2}\mathrm{R}^{2n-6}\rho^6 + \ldots\right].$$

de sorte qu'on aurait

$$P_i = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-i+1)}{1.2.3\ldots i}.$$

C'est ce qui a lieu effectivement, car le carré de la distance du point O à l'un des sommets du polygone se décompose en deux facteurs imaginaires $R - \rho\alpha$, $R - \rho\alpha'$, qu'on obtient en faisant

$$\alpha = \cos\left(\varphi + \frac{2i\pi}{m}\right) + \sqrt{-1}.\sin\left(\varphi + \frac{2i\pi}{m}\right)$$

et

$$\alpha' = \cos\left(\varphi + \frac{2i\pi}{m}\right) - \sqrt{-1}.\sin\left(\varphi + \frac{2i\pi}{m}\right).$$

Développant les puissances $n^{\text{ièmes}}$ de ces deux facteurs, et effectuant le produit, on trouve pour le coefficient de $R^{2n-2i}\rho^{2i}$,

$$\frac{n^2(n-1)^2(n-2)^2\ldots(n-i+1)^2}{1^2.2^2.3^2\ldots i^2}\alpha^i\alpha'^i + V,$$

la lettre V désignant des termes où les exposants de α et de α' sont inégaux. Or le produit $\alpha\alpha'$ est égal à l'unité, et l'on sait que la somme des puissances entières de α et α' est nulle, tant que ces puissances sont au-dessous du degré m. Donc le coefficient de $R^{2n-2i}\rho^{2i}$ est bien $\frac{n^2(n-1)^2(n-2)^2\ldots(n-i+1)^2}{1^2.2^2.3^2\ldots i^2}$, et on a l'identité

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-i+1)}{1.2.3\ldots i} = 1 + i(n-i) + \frac{i(i-1)}{1.2}\frac{(n-i)(n-i+1)}{1.2} + \ldots.$$

Quand le point O est sur la circonférence circonscrite au polygone, on a

$$\overline{OA_1}^{2n} + \overline{OA_2}^{2n} + \ldots + \overline{OA_m}^{2n} = m\frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots n}.R^{2n},$$

attendu que les expressions ci-dessus de $\overline{OA_1}^2$, $\overline{OA_2}^2, \ldots, \overline{OA_m}^2$ rentrent alors dans la forme $4R^2\sin^2\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{i\pi}{m}\right)$, et que la somme des puissances $2n < m$ des sinus des arcs $\frac{\varphi}{2}$, $\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{m}$, $\frac{\varphi}{2} + \frac{2\pi}{m}, \ldots$, $\frac{\varphi}{2} + (m-1)\frac{\pi}{m}$, est égale à $\frac{m}{2^{2n}}.\frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots n}$.

Par l'énoncé de la proposition XLI, Stewart assigne à la somme $\overline{OA}_1^{2n} + \overline{OA}_2^{2n} + \ldots + \overline{OA}_m^{2n}$ la forme $m \cdot \frac{1.3.5.7\ldots(2n-1)}{1.2.3.4\ldots n} 2^n R^{2n}$. Son identité avec la précédente se vérifie pour $n = 1$, $n = 2$, etc. Supposons qu'elle soit établie pour la valeur quelconque $n - 1$, c'est-à-dire qu'on ait

$$\frac{1.3.5.7\ldots(2n-3)}{1.2.3.4\ldots(n-1)} 2^{n-1} = \frac{(2n-2)(2n-3)\ldots(n+1)n}{1.2\ldots(n-2)(n-1)};$$

il vient, en multipliant les deux membres par $\frac{2(2n-1)}{n}$,

$$\frac{1.3.5.7\ldots(2n-3)(2n-1)}{1.2.3.4\ldots(n-1)n} 2^n = \frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots n};$$

par conséquent, cette identité a lieu quelle que soit la valeur de n.

DEUXIÈME THÉORÈME GÉNÉRAL.

9. Soient L_1, L_2, $L_3, \ldots$, L_m m droites données, parallèles entre elles ou passant par un même point, et k_1, $k_2, \ldots$, k_m autant de coefficients également donnés, n étant un nombre moindre que m; on peut trouver, dit Stewart dans sa proposition XLVII, $n + 1$ autres droites L'_1, $L'_2, \ldots$, L'_{n+1} telles qu'il y ait, entre les perpendiculaires OP_1, $OP_2, \ldots$, OP_m abaissées d'un point O, pris arbitrairement, sur les premières, et les perpendiculaires $\overline{OP}'_1$, $\overline{OP}'_2, \ldots$, $\overline{OP}'_{n+1}$ abaissées du même point sur les droites trouvées, la relation

$$\frac{k_1\overline{OP}_1^{2n} + k_2\overline{OP}_2^{2n} + \ldots + k_m\overline{OP}_m^{2n}}{k_1 + k_2 + \ldots + k_m} = \frac{\overline{OP}'^{2n}_1 + \overline{OP}'^{2n}_2 + \ldots + \overline{OP}'^{2n}_{n+1}}{n+1}.$$

En supposant tous les coefficients k_i égaux à l'unité et $n < m - 1$, on a la proposition XLVI. J'admettrai, comme au n° **1**, que la somme $k_1 + k_2 + \ldots + k_m$ est positive et différente de zéro; les droites L_i, L'_i ayant pour équations

$$y = a_i x + b_i, \quad y = \alpha_i x + \beta_i,$$

on a

$$\overline{OP}_i^2 = \frac{(y - a_i x + b_i)^2}{1 + a_i^2}, \quad \overline{OP}'^2_i = \frac{(y - \alpha_i x - \beta_i)^2}{1 + \alpha_i^2},$$

expressions dans lesquelles x et y désignent les coordonnées du point O. Lorsque les droites L_i sont parallèles entre elles, on peut prendre pour axe des x une parallèle à leur commune direction, c'est-à-dire faire $a_i = 0$, et, par suite, écrire

$$\frac{\mathrm{S}_{i=1}^{i=m} k_i (y - b_i)^{2n}}{\mathrm{S}_{i=1}^{i=m} k_i} = \frac{\mathrm{S}_{i=1}^{i=n+1} \frac{(y - \alpha_i x - \beta_i)^{2n}}{(1+\alpha_i^2)^n}}{n+1}.$$

Si les droites L_i passent par un même point, on peut le choisir pour origine des coordonnées, et faire $b_i = 0$. La relation ci-dessus prend alors la forme

$$\frac{\mathrm{S}_{i=1}^{i=m} k_i \frac{(y - a_i x)^{2n}}{(1+a_i^2)^n}}{\mathrm{S}_{i=1}^{i=m} k_i} = \frac{\mathrm{S}_{i=1}^{i=n+1} \frac{(y - \alpha_i x - \beta_i)^{2n}}{(1+\alpha_i^2)^n}}{n+1}.$$

10. Pour satisfaire à la première de ces équations quelles que soient les valeurs des coordonnées x, y, il faut nécessairement supposer $\alpha_i = 0$; car, en faisant d'abord $y = 0$ et développant ensuite le second membre, on trouve, parmi les coefficients des diverses puissances de x, lesquelles doivent être nuls, la quantité

$$\frac{\alpha_1^{2n}}{(1+\alpha_1^2)^n} + \frac{\alpha_2^{2n}}{(1+\alpha_2^2)^n} + \ldots + \frac{\alpha_{n+1}^{2n}}{(1+\alpha_{n+1}^2)^{2n}},$$

qui ne devient nulle qu'en posant $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0, \ldots, \alpha_{n+1} = 0$. Par conséquent, les droites cherchées L'_i sont nécessairement parallèles aux droites données, et les équations à résoudre pour trouver les valeurs des inconnues β_i sont les suivantes :

$$\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_{n+1} = \frac{n+1}{\mathrm{S}k_i} \mathrm{S}k_i b_i,$$

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 + \ldots + \beta_{n+1}^2 = \frac{n+1}{\mathrm{S}k_i} \mathrm{S}k_i b_i^2,$$

$$\beta_1^3 + \beta_2^3 + \ldots + \beta_{n+1}^3 = \frac{n+1}{\mathrm{S}k_i} \mathrm{S}k_i b_i^3,$$

. . . .

$$\beta_1^{2n} + \beta_2^{2n} + \ldots + \beta_{n+1}^{2n} = \frac{n+1}{\mathrm{S}k_i} \mathrm{S}k_i b_i^{2n};$$

leur nombre s'élève à $2n$, tandis qu'il n'y a que $n+1$ inconnues. On peut donc s'attendre à trouver $n-1$ équations de condition. Je vais faire voir que le cas où l'on a $n=1$ est le seul qui donne lieu à une solution générale.

11. Pour plus de simplicité, je supposerai l'axe des x choisis de manière à satisfaire à la condition $Sk_i b_i = 0$, ce qui est toujours permis. Cela posé, les équations à résoudre sont, en faisant $n=1$,

$$\beta_1 + \beta_2 = 0,$$

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 = \frac{2}{Sk_i} Sk_i b_i^2;$$

elles donnent

$$\beta_1 = \pm\sqrt{\frac{1}{Sk_i} Sk_i b_i^2}, \quad \beta_2 = \mp\sqrt{\frac{1}{Sk_i} Sk_i b_i},$$

c'est-à-dire deux droites parallèles, également distantes de l'axe des x. Cette solution est ainsi complète.

On résoudrait non moins facilement le problème qui consiste à déterminer une droite L', telle qu'on ait

$$\frac{k_1 \overline{OP}_1^2 + k_2 \overline{OP}_2^2 + \ldots + k_m \overline{OP}_m^2}{k_1 + k_2 + \ldots + k_m} = \overline{OP}'^2 + C,$$

C désignant une constante. Un calcul très-simple donne pour la droite cherchée l'axe des x et $C = \frac{Sk_i b_i^2}{Sk_i}$.

C'est l'objet de la proposition XVIII quand les coefficients k_i sont quelconques, et de la proposition XIII quand ils sont égaux à l'unité.

12. Soit maintenant $n=2$; on a

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0,$$

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = \frac{3}{Sk_i} Sk_i b_i^2,$$

$$\beta_1^3 + \beta_2^3 + \beta_3^3 = \frac{3}{Sk_i} Sk_i b_i^3,$$

$$\beta_1^4 + \beta_2^4 + \beta_3^4 = \frac{3}{Sk_i} Sk_i b_i^4,$$

et ces équations ne peuvent être résolues qu'à la condition de vérifier l'identité

$$\beta_1^4+\beta_2^4+\beta_3^4=+(\beta_1^3+\beta_2^3+\beta_3^3)(\beta_1+\beta_2+\beta_3)$$
$$-(\beta_1\beta_2+\beta_2\beta_3+\beta_3\beta_1)(\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2)+\beta_1\beta_2\beta_3(\beta_1+\beta_2+\beta_3),$$

laquelle se réduit à

$$\beta_1^4+\beta_2^4+\beta_3^4=-(\beta_1\beta_2+\beta_2\beta_3+\beta_3\beta_1)(\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2),$$

en vertu de la relation

$$\beta_1+\beta_2+\beta_3=0.$$

Or celle-ci donne

$$\beta_1\beta_2+\beta_2\beta_3+\beta_3\beta_1=-\frac{1}{2}(\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2),$$

d'où

$$\beta_1^4+\beta_2^4+\beta_3^4=\frac{1}{2}(\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2)^2,$$

c'est-à-dire

$$\frac{3}{Sk_i}Sk_ib_i^4=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{Sk_i}Sk_ib_i^2\right)^2;$$

telle est l'équation de condition d'où dépend la possibilité de trouver un système de droites jouissant de la propriété contraire. Or cette équation ne se vérifie pas d'elle-même. Soient, par exemple,

$$b_1=+2,\quad b_2=+4,\quad b_3=-5,\quad b_4=+6,\quad b_5=-7\quad \text{et}\quad m=5,$$

les coefficients k_i étant égaux à l'unité; avec ces données, on a

$$Sk_ib_i=0.$$

Le premier membre est alors égal à $\frac{13782}{5}$, et le second à $\frac{15210}{5}$.

La proposition générale que nous examinons n'est donc vraie pour $n=2$ que dans des cas particuliers.

13. En assignant à n des valeurs plus grandes, on parviendrait sans difficulté, par la méthode inverse des fonctions symétriques, à construire les équations de conditions relatives à chaque cas, et l'on verrait qu'elles ne se réduisent pas à des identités.

Un cas assez remarquable où ces conditions se vérifient toutes, est celui où les m droites données passent par les sommets d'un polygone régulier de m côtés. Si l'on circonscrit à ce polygone une circonférence, et que dans celle-ci on inscrive un polygone régulier de $n+1$ côtés, les $n+1$ droites menées par les sommets parallèlement aux premières satisferont à la relation indiquée au n° **9**, pourvu que les deux polygones soient orientés convenablement. On suppose $k_i = 1$.

Soient R le rayon de la circonférence, p, φ les angles que font avec l'axe des x les rayons menés du centre aux sommets A_1, A'_1 ; on a d'abord, pour tous les exposants t moindres que $n+1$,

$$\frac{1}{n+1}\left[\begin{array}{c}\sin^t\varphi + \sin^t\left(\varphi + \frac{2\pi}{n+1}\right)\\ + \sin^t\left(\varphi + 2\cdot\frac{2\pi}{n+1}\right) + \ldots + \sin^t\left(\varphi + n\,\frac{2\pi}{n+1}\right)\end{array}\right]$$
$$= \frac{1}{m}\left[\begin{array}{c}\sin^t p + \sin^t\left(p + \frac{2\pi}{m}\right)\\ + \sin^t\left(p + 2\cdot\frac{2\pi}{m}\right) + \ldots + \sin^t\left(p + (m-1)\frac{2\pi}{m}\right)\end{array}\right].$$

En multipliant les deux membres de cette égalité par R^t, et remarquant que l'on a

$$b_i^t = R^t \sin^t\left[p + (i-1)\frac{2\pi}{m}\right], \quad \beta_i^t = R^t\sin^t\left[\varphi + (i-1)\frac{2\pi}{n+1}\right],$$

on voit que les équations

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \ldots + \beta_{n+1} = \frac{n+1}{m}\,\mathrm{S}\,b_i,$$
$$\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 + \ldots + \beta_{n+1}^2 = \frac{n+1}{m}\,\mathrm{S}\,b_i^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\beta_1^t + \beta_2^t + \beta_3^t + \ldots + \beta_{n+1}^t = \frac{n+1}{m}\,\mathrm{S}\,b_i^t,$$

sont satisfaites tant que l'exposant t demeure inférieur à $n+1$. Quand il atteint et dépasse cette limite, la quantité

$$\frac{1}{n+1}\left[\begin{array}{c}\sin^t\varphi + \sin^t\left(\varphi + \frac{2\pi}{n+1}\right)\\ + \sin^t\left(\varphi + 2\,\frac{2\pi}{n+1}\right) + \ldots + \sin^t\left(\varphi + n\,\frac{2\pi}{n+1}\right)\end{array}\right]$$

peut être mise sous la forme

$$\mathrm{T} + \mathrm{V} \cos (n + 1) \varphi,$$

ou

$$\mathrm{T} + \mathrm{V} \sin (n + 1) \varphi,$$

suivant que $n + 1$ est pair ou impair. T est une fonction de t; V dépend de n et de t, mais ne devient jamais infini. Tout cela découle d'une théorie connue, dans les détails de laquelle il n'est pas besoin d'entrer ici.

D'un autre côté, tant que l'exposant t est moindre que m, la quantité

$$\frac{1}{m}\left[\begin{array}{l} \sin^t p + \sin^t\left(p + \frac{2\pi}{m}\right) \\ + \sin^t\left(p + 2\cdot\frac{2\pi}{m}\right) + \ldots + \sin^t\left(p + (m-1)\frac{2\pi}{m}\right) \end{array}\right]$$

se réduit à t. Pour $t = m$ et $t > m$, elle prend la forme

$$\mathrm{T} + \mathrm{U} \cos mp,$$

ou

$$\mathrm{T} + \mathrm{U} \sin mp,$$

suivant que m est pair ou impair, U ne pouvant devenir infini. On rendra donc égales entre elles les deux quantités ci-dessus, en déterminant φ et p de manière à faire disparaître les termes contenant le sinus ou le cosinus des angles $(n - 1)\varphi$, mp; ce qui n'offre aucune difficulté, puisqu'il ne s'agit que de déterminer la valeur de φ pour laquelle on a $\cos(n + 1)\varphi = 0$, $n + 1$ étant pair, ou $\sin(n + 1)\varphi = 0$, $n + 1$ étant impair, et $\cos mp = 0$, m étant pair, ou $\sin mp = 0$, m étant impair.

14. Considérons présentement le cas où les droites données passent toutes par un même point. Il s'agit de reconnaître, comme on l'a indiqué au n° **9**, si l'on peut satisfaire à l'équation

$$\frac{\mathbf{S}_{i=1}^{i=m} k_i \frac{(y - a_i x)^{2n}}{(1 + a_i^2)^n}}{\mathbf{S}_{i=1}^{i=m} k_i} = \frac{\mathbf{S}_{i=1}^{i=n+1} \frac{(y - \alpha_i x - \beta_i)^{2n}}{(1 + \alpha_i^2)^n}}{n + 1},$$

quelles que soient les valeurs des coordonnées x, y; en faisant $x = 0$, $y = 0$, il vient

$$\frac{\beta_1^{2n}}{(1+\alpha_1^2)^n} + \frac{\beta_2^{2n}}{(1+\alpha_2^2)^n} + \ldots + \frac{\beta_{n+1}^{2n}}{(1+\alpha_{n+1}^2)^n} = 0,$$

équation qui exige qu'on ait $\beta_i = 0$. Par conséquent, les droites cherchées L'_i, quand elles existent, passent nécessairement par le point d'intersection des droites données L_i, lequel a été choisi pour origine.

Cela posé, les équations à résoudre sont les suivantes :

$$\frac{1}{(1+\alpha_1^2)^n} + \frac{1}{(1+\alpha_2^2)^n} + \ldots + \frac{1}{(1+\alpha_{n+1}^2)^n} = \frac{n+1}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}\frac{k_i}{(1+a_i^2)^n},$$

$$\frac{\alpha_1}{(1+\alpha_1^2)^n} + \frac{\alpha_2}{(1+\alpha_2^2)^n} + \ldots + \frac{\alpha_{n+1}}{(1+\alpha_{n+1}^2)^n} = \frac{n+1}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}\frac{k_i a_i}{(1+a_i^2)^n},$$

$$\frac{\alpha_1^2}{(1+\alpha_1^2)^n} + \frac{\alpha_2^2}{(1+\alpha_2^2)^n} + \ldots + \frac{\alpha_{n+1}^2}{(1+\alpha_{n+1}^2)^n} = \frac{n+1}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}\frac{k_i a_i^2}{(1+a_i^2)^n},$$

. . . .

$$\frac{\alpha_1^{2n}}{(1+\alpha_1^2)^n} + \frac{\alpha_2^{2n}}{(1+\alpha_2^2)^n} + \ldots + \frac{\alpha_{n+1}^{2n}}{(1+\alpha_{n+1}^2)^n} = \frac{n+1}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}\frac{k_i a_i^{2n}}{(1+a_i^2)^n}.$$

De même que dans le cas des droites parallèles, on a, en général, plus d'équations que d'inconnues, et, par suite, il y a lieu de s'attendre à rencontrer des impossibilités analogues.

15. Pour faciliter les calculs auxquels on va être conduit, je supposerai que l'axe des x est dirigé de manière qu'on ait

$$\mathrm{S}\frac{k_i a_i}{1+a_i^2} = 0.$$

Cela est toujours possible; car soit v la tangente de l'angle que fait l'axe nouveau avec celui pour lequel cette condition n'est pas remplie. On posera

$$\mathrm{S}k_i\frac{\dfrac{a_i - v}{1+a_i v}}{1+\left(\dfrac{a_i - v}{1+a_i v}\right)^2} = 0,$$

d'où il résulte

$$v^2 + \frac{\mathbf{S}\, k_i \left(\frac{1-a_i^2}{1+a_i^2}\right)}{\mathbf{S}\, \frac{k_i a_i}{1+a_i^2}}\, v - 1 = 0,$$

équation du second degré dont les deux racines sont réelles. La valeur du dernier terme montre que les deux droites qui répondent à la question sont perpendiculaires l'une à l'autre; ce que l'on pouvait d'ailleurs prévoir à priori, car la relation

$$\mathbf{S}\, \frac{k_i a_i}{1+a_i^2} = 0$$

ne change pas lorsqu'on y remplace a_i par $-\frac{1}{a_i}$.

16. Cela posé, faisons $n=1$. On a ainsi la proposition XIX de Stewart, et la proposition XV quand les coefficients k_i se réduisent à l'unité. Les équations à résoudre sont

$$\frac{1}{1+\alpha_1^2} + \frac{1}{1+\alpha_2^2} = \frac{2}{\mathrm{S} k_i}\, \mathbf{S}\, \frac{k_i}{1+a_i^2},$$

$$\frac{\alpha_1}{1+\alpha_1^2} + \frac{\alpha_2}{1+\alpha_2^2} = 0,$$

$$\frac{\alpha_1^2}{1+\alpha_1^2} + \frac{\alpha_2^2}{1+\alpha_2^2} = \frac{2}{\mathrm{S} k_i}\, \mathbf{S}\, \frac{k_i a_i^2}{1+a_i^2},$$

c'est-à-dire qu'il y en trois pour deux inconnues. Mais ces équations se réduisent à deux; car, en ajoutant membre à membre la première et la troisième, on obtient une identité.

La deuxième devient, en chassant les dénominateurs,

$$(\alpha_1 + \alpha_2)(1 + \alpha_1 \alpha_2) = 0;$$

en égalant à zéro le facteur $\alpha_1 + \alpha_2$, on trouve deux droites faisant avec l'axe des x des angles égaux, qui ont pour cosinus $\sqrt{\frac{1}{\mathrm{S} k_i}\, \mathbf{S}\, \frac{k_i}{1+a_i^2}}$. Cette solution est donc complète.

Si l'on égale à zéro le second facteur $1 + \alpha_1 \alpha_2$, il vient la double condition

$$\frac{2}{\mathrm{S} k_i}\, \mathbf{S}\, \frac{k_i}{1+a_i^2} = \frac{2}{\mathrm{S} k_i}\, \mathbf{S}\, \frac{k_i a_i^2}{1+a_i^2} = 1.$$

Or, si l'on a

$$\frac{2}{\mathrm{S}k_i}\,\mathbf{S}\,\frac{k_i}{1+a_i^2} = 1,$$

on a aussi

$$\frac{2}{\mathrm{S}k_i}\,\mathbf{S}\,\frac{k_i a_i^2}{1+a_i^2} = 1,$$

à cause de l'identité

$$\frac{2}{\mathrm{S}k_i}\,\mathbf{S}\,\frac{k_i(1+a_i^2)}{1+a_i^2} = 2;$$

donc une seule de ces conditions est nécessaire pour que le deuxième facteur $1+\alpha_1\alpha_2$ soit propre à résoudre la question. Celle-ci est alors indéterminée, et tout système de deux droites rectangulaires satisfait à la relation

$$\frac{\overline{\mathrm{OP}'_1}^2 + \overline{\mathrm{OP}'_2}^2}{2} = \frac{k_1\overline{\mathrm{OP}_1}^2 + k_2\overline{\mathrm{OP}_2}^2 + \ldots + k_m\overline{\mathrm{OP}_m}^2}{k_1 + k_2 + \ldots + k_m}.$$

Cette remarque devient intuitive lorsqu'on prend le soin de la vérifier sur une figure.

17. L'hypothèse $n = 2$ répond à la proposition XXXVI; elle donne naissance à cinq équations :

$$\frac{1}{(1+\alpha_1^2)^2} + \frac{1}{(1+\alpha_2^2)^2} + \frac{1}{(1+\alpha_3^2)^2} = \frac{3}{\mathrm{S}k_i}\,\mathbf{S}\,\frac{k_i}{(1+a_i^2)^2},$$

$$\frac{\alpha_1}{(1+\alpha_1^2)^2} + \frac{\alpha_2}{(1+\alpha_2^2)^2} + \frac{\alpha_3}{(1+\alpha_3^2)^2} = \frac{3}{\mathrm{S}k_i}\,\mathbf{S}\,\frac{k_i a_i}{(1+\alpha_i^2)^2},$$

$$\frac{\alpha_1^2}{(1+\alpha_1^2)^2} + \frac{\alpha_2^2}{(1+\alpha_2^2)^2} + \frac{\alpha_3^2}{(1+\alpha_3^2)^2} = \frac{3}{\mathrm{S}k_i}\,\mathbf{S}\,\frac{k_i a_i^2}{(1+a_i^2)^2},$$

$$\frac{\alpha_1^3}{(1+\alpha_1^2)^2} + \frac{\alpha_2^3}{(1+\alpha_2^2)^2} + \frac{\alpha_3^3}{(1+\alpha_3^2)^2} = \frac{3}{\mathrm{S}k_i}\,\mathbf{S}\,\frac{k_i a_i^3}{(1+a_i^2)^2},$$

$$\frac{\alpha_1^4}{(1+\alpha_1^2)^2} + \frac{\alpha_2^4}{(1+\alpha_2^2)^2} + \frac{\alpha_3^4}{(1+\alpha_3^2)^2} = \frac{3}{\mathrm{S}k_i}\,\mathbf{S}\,\frac{k_i a_i^4}{(1+a_i^2)^2}.$$

En doublant tous les termes de la troisième, et ajoutant membre à membre avec la première et la cinquième, on tombe sur une identité; donc le nombre de ces équations est réduit à quatre, et toute la question est de savoir si elles ne sont pas susceptibles d'être réduites à un nombre moindre.

Pour plus de simplicité, j'ajoute membre à membre la première et la troisième, puis la deuxième et la quatrième, de sorte que le système à traiter est celui-ci :

$$\frac{\alpha_1}{1+\alpha_1^2}+\frac{\alpha_2}{1+\alpha_2^2}+\frac{\alpha_3}{1+\alpha_3^2}=0,$$

$$\frac{1}{1+\alpha_1^2}+\frac{1}{1+\alpha_2^2}+\frac{1}{1+\alpha_3^2}=\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\mathbf{S}\frac{k_i}{1+a_i^2},$$

$$\frac{1}{(1+\alpha_1^2)^2}+\frac{1}{(1+\alpha_2^2)^2}+\frac{1}{(1+\alpha_3^2)^2}=\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\mathbf{S}\frac{k_i}{(1+a_i^2)^2}.$$

$$\frac{\alpha_1}{(1+\alpha_1^2)^2}+\frac{\alpha_2}{(1+\alpha_2^2)^2}+\frac{\alpha_3}{(1+\alpha_3^2)^2}=\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\mathbf{S}\frac{k_i a_i}{(1+a_i^2)^2}.$$

Actuellement posons

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=-p,\quad \alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_3\alpha_1=q,\quad \alpha_1\alpha_2\alpha_3=-r,$$

de sorte que

$$\alpha^3+p\alpha^2+q\alpha+r=0$$

soit l'équation qui a pour racines α_1, α_2, α_3. Si l'on réduit au même dénominateur le premier membre de chacune des équations ci-dessus, les dénominateurs obtenus, ainsi que les numérateurs, sont des fonctions symétriques des inconnues α_1, α_2, α_3, et, par conséquent, s'expriment au moyen des coefficients p, q, r. Voici les résultats du calcul :

$$\frac{3r-p-(r+p)q}{(q-1)^2+(r-p)^2}=0,$$

$$\frac{(q-1)(q-3)-2p(r-p)}{(q-1)^2+(r-p)^2}=\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\mathbf{S}\frac{k_i}{1+a_i^2},$$

$$\frac{[(q-1)(q-3)-2p(r-p)]^2+2(2q-p^2-3)[(q-1)^2+(r-p)^2]}{[(q-1)^2+(r-p)^2]^2}$$
$$=\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\mathbf{S}\frac{k_i}{(1+a_i^2)^2},$$

$$\frac{(q-1)(p+3pq+3qr-q^2r-6r)+(r-p)(p^2q-pr+3pqr-pr^2)}{[(q-1)^2+(r-p)^2]^2}$$
$$=\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\mathbf{S}\frac{k_i a_i}{(1+a_i^2)^2}.$$

On satisfait à la première de ces équations en égalant le numérateur à zéro ou le dénominateur à l'infini; mais cette dernière solution doit être écartée, car la quantité $(q-1)^2+(r-p)^2$ ne peut devenir infinie que si une ou plusieurs des inconnues α_1, α_2, α_3 sont elles-mêmes infinies. Or le premier membre de l'équation

$$\frac{\alpha_1}{1+\alpha_1^2}+\frac{\alpha_2}{1+\alpha_2^2}+\frac{\alpha_3}{1+\alpha_3^2}=0$$

peut être mis sous la forme $\dfrac{1}{\dfrac{1}{\alpha_1}+\alpha_1}+\dfrac{1}{\dfrac{1}{\alpha_2}+\alpha_2}+\dfrac{1}{\dfrac{1}{\alpha_3}+\alpha_3}$, et alors on voit qu'en supposant α_3 infini, le terme en α_3 disparaît. La même chose a lieu pour les trois autres équations; de sorte qu'il reste seulement deux inconnues α_1, α_2, pour lesquelles on a, comme dans le numéro qui précède,

$$(\alpha_1+\alpha_2)(1+\alpha_1\alpha_2)=0,$$

et l'on arrive, en faisant soit $\alpha_1\alpha_2=0$, soit $1+\alpha_1\alpha_2=0$, à des conditions particulières qui ne se réduisent pas à des identités. Il en serait encore ainsi en supposant infinies deux des inconnues ou même toutes les trois.

Il faut donc poser

$$3r-p-(r+p)q=0,$$

d'où

$$p=\left(\frac{3-q}{1+q}\right)r.$$

Cette valeur, substituée dans la seconde équation et dans les suivantes, donne :

$$\frac{(q-1)(q-3)\left[1+\dfrac{4r^2}{(1+q)^2}\right]}{(q-1)^2\left[1+\dfrac{4r^2}{(1+q)^2}\right]}=\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}\,\frac{k_i}{1+a_i^2}.$$

$$\frac{\dfrac{-r(q-1)^3(q+3)}{(1+q)}\left[1+\dfrac{4r^2}{(1+q)^2}\right]}{(q-1)^4\left[1+\dfrac{4r^2}{(1+q)^2}\right]^2}=\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}\,\frac{k_i a_i}{(1+a_i^2)^2}.$$

$$\frac{(q-1)^2(q-3)^2\left[1+\dfrac{4r^2}{(1+q)^2}\right]^2+2(q-1)^2\left[2q-3-\left(\dfrac{3-q}{1+q}\right)^2r^2\right]\left[1+\dfrac{4r^2}{(1+q)^2}\right]}{(q-1)^4\left[1+\dfrac{4r^2}{(1+q)^2}\right]^2}$$

$$=\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}\,\frac{k_i}{(1+a_i^2)^2}.$$

J'ai laissé en évidence tous les facteurs dans lesquels se décomposent les numérateurs et les dénominateurs, car il faut prouver, avant de les supprimer, qu'ils sont étrangers à la question.

Si l'on fait d'abord $q = 1$, la vraie valeur de $\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\mathbf{S}\frac{k_i}{1+a_i^2}$ est infinie; supposition inadmissible, attendu que a_i étant réel, $1+a_i^2$ ne saurait devenir nul. $q-1$ ne peut d'ailleurs être infini, car l'une au moins des inconnues α_1, α_2, α_3 le serait; supposition que nous avons déjà écartée.

L'hypothèse $1+\frac{4r^2}{(1+q)^2} = 0$ rendrait infinie la quantité $\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\mathbf{S}\frac{k_i}{1+a_i^2}$, ce qui ne saurait avoir lieu, attendu que $\frac{a_i}{1+a_i^2}$ n'est infini pour aucune valeur réelle de a_i. On ne peut pas davantage faire $1+\frac{4r^2}{(1+q)^2} = \infty$, car il faudrait supposer $q = \infty$ ou $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = \infty$, ce que nous avons démontré inadmissible; ou $q = -1$, r n'étant pas nul, c'est-à-dire $p = \infty$, ce qui est également inadmissible. Enfin r et $q+1$ ne pourraient être nuls ensemble, car il faudrait que l'une au moins des racines, α_3 par exemple, fût égale à zéro, et alors on aurait

$$\frac{\alpha_1}{1+\alpha_1^2} + \frac{\alpha_1}{1+\alpha_2^2} = 0 \quad \text{ou} \quad (\alpha_1+\alpha_2)(1+\alpha_1\alpha_2) = 0,$$

ce qui donnerait lieu, comme on l'a vu ci-dessus, à des conditions qui ne se vérifient pas d'elles-mêmes.

On a donc finalement

$$\frac{q-3}{q-1} = \frac{3}{\mathrm{S}k_i}\mathbf{S}\frac{k_i}{1+a_i^2},$$

$$\frac{r(q+3)}{(q-1)(1+q)\left[1+\frac{4r^2}{(1+q)^2}\right]} = \frac{3}{\mathrm{S}k_i}\mathbf{S}\frac{k_i a_i}{(1+a_i^2)^2},$$

$$\frac{(q-3)^2\left[1+\frac{4r^2}{(1+q)^2}\right] + 2\left[2q-3-\left(\frac{3-q}{1+q}\right)^2 r^2\right]}{(q-1)^2\left[1+\frac{4r^2}{(1+q)^2}\right]} = \frac{3}{\mathrm{S}k_i}\mathbf{S}\frac{k_i}{(1+a_i^2)^2}.$$

De la première de ces équations, je tire

$$q = \frac{\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\mathbf{S}\frac{k_i}{1+a_i^2} - 3}{\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\mathbf{S}\frac{k_i}{1+a_i^2} - 1},$$

et, par la substitution de cette valeur dans la deuxième et dans la troisième, il n'y reste plus que le coefficient inconnu r, qu'il devient aisé d'éliminer. On obtient ainsi l'équation de condition

$$\begin{aligned}&\left[\left(\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}\,\frac{k_i}{1+a_i^2}\right)^2-2\cdot\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}\,\frac{k_i}{(1+a_i^2)^2}\right]^2\\&-\left(2\cdot\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}\,\frac{k_i}{1+a_i^2}-3\right)\left[\left(\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}\,\frac{k_i}{1+a_i^2}\right)^2-2\cdot\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}\,\frac{k_i}{(1+a_i^2)^2}\right]\\&+4\cdot\left[\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}\,\frac{k_i a_i}{(1+a_i^2)^2}\right]^2=0.\end{aligned}$$

Montrons, par un exemple, que cette relation n'est pas une identité. Soit $k_i = 1$, ce qui est le cas de la proposition XXXV, et

$$a_1=\frac{1}{2},\quad a_2=\frac{1}{3},\quad a_3=-\frac{1}{2},\quad a_4=-\frac{1}{3},$$

et, par conséquent,

$$\frac{3}{\mathrm{S}k_i}=\frac{3}{4},$$

$$\mathrm{S}\,\frac{k_i a_i}{1+a_i^2}=0,\quad \mathrm{S}\,\frac{k_i}{1+a_i^2}=\frac{34}{10},\quad \mathrm{S}\,\frac{k_i a_i}{(1+a_i^2)^2}=0,\quad \mathrm{S}\,\frac{k_i}{(1+a_i^2)^2}=\frac{29}{10};$$

on trouve pour le premier membre 0.1130 0625 au lieu de zéro. De ce qui vient d'être démontré et de ce qui l'a été au n° **12**, on conclut que les propositions XXXV et XXXVI ne sont pas vraies.

18. Quand les m droites données forment des angles égaux entre eux, ayant pour amplitude $\frac{\pi}{m}$, k_i étant égal à l'unité, si l'on appelle ρ la longueur de la droite qui va du point O à l'origine, p, φ les angles que font avec celle-ci les droites L_1, L'_1, on a

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n+1}\left[\begin{array}{l}\sin^{2n}\varphi+\sin^{2n}\left(\varphi+\frac{\pi}{n+1}\right)\\+\sin^{2n}\left(\varphi+2\cdot\frac{\pi}{n+1}\right)+\ldots+\sin^{2n}\left(\varphi+n\cdot\frac{\pi}{n+1}\right)\end{array}\right]\\&=\frac{1}{m}\left[\begin{array}{l}\sin^{2n}p+\sin^{2n}\left(p+\frac{\pi}{m}\right)\\+\sin^{2n}\left(p+\frac{2\pi}{m}\right)+\ldots+\sin^{2n}\left(p+(m-1)\frac{\pi}{m}\right)\end{array}\right]\\&=\frac{1}{2^{2n}}\cdot\frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots n}.\end{aligned}$$

Multiplions tous les termes par ρ^{2n} et observons que

$$\rho \sin \varphi, \quad \rho \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{n+1}\right), \ldots, \quad \rho \sin p, \quad \rho \sin\left(p + \frac{\pi}{m}\right), \ldots,$$

ne sont autre chose que les perpendiculaires OP'_1, $OP'_2, \ldots$, OP_1, $OP_2, \ldots$; il vient

$$\frac{\overline{OP'_1}^{2n} + \overline{OP'_2}^{2n} + \ldots + \overline{OP'_{n+1}}^{2n}}{n+1} = \frac{\overline{OP_1}^{2n} + \overline{OP_2}^{2n} + \ldots + \overline{OP_m}^{2n}}{m}.$$

Le système de $n+1$ droites disposées autour d'un point de manière à former des angles égaux entre eux, ayant pour amplitude commune $\frac{\pi}{n+1}$, est donc propre à résoudre la question.

Dans sa proposition XLV, Stewart dit que l'on a

$$\overline{OP_1}^{2n} + \overline{OP_2}^{2n} + \ldots + \overline{OP_m}^{2n} = m \cdot \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots n} \cdot \frac{1}{2^n} \cdot \rho^{2n},$$

et, comme nous avons trouvé ci-dessus

$$\overline{OP_1}^{2n} + \overline{OP_2}^{2n} + \ldots + \overline{OP_m}^{2n} = m \cdot \frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots n} \cdot \frac{1}{2^n} \cdot \rho^{2n},$$

il s'ensuit qu'on doit avoir

$$\frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots n} \cdot \frac{1}{2^{2n}} = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots n} \cdot \frac{1}{2^n}.$$

Cette égalité se vérifie pour $n=1$, $n=2$, cas particuliers qui forment l'objet des propositions XIV et XXXIV. Elle a lieu quelle que soit la valeur de n; car je vais montrer que si elle est vraie pour $n-1$, elle l'est aussi pour n. Supposons, en effet, que l'on ait

$$\frac{(2n-2)(2n-3)(2n-4)\ldots n}{1.2.3\ldots(n-1)} \cdot \frac{1}{2^{2n-2}} = \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{1.2.3\ldots(n-1)} \cdot \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Multiplions le premier membre par le facteur $\frac{2(2n-1)}{2^2 . n}$, et le second par le facteur égal $\frac{2n-1}{2n}$: il vient

$$\frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots n} \cdot \frac{1}{2^{2n}} = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots n} \cdot \frac{1}{2^n}.$$

Ce qu'il fallait trouver.

19. La proposition XXXI établit une relation entre les distances d'un point quelconque à des points donnés ou inconnus et les perpendiculaires abaissées du même point sur certaines droites. En voici l'énoncé. Étant donnés m points $A_1, A_2, \ldots, A_m$ et autant de coefficients $k_1, k_2, \ldots, k_m$, on peut trouver un autre point A' et deux droites L'_1, L'_2 qui satisfassent à la relation

$$\frac{k_1\overline{OA}_1^4 + k_2\overline{OA}_2^4 + \ldots + k_m\overline{OA}_m^4}{k_1 + k_2 + \ldots + k_m} = \overline{OA'}^4 + f^2\left(\overline{OP'}_1^2 + \overline{OP'}_2^2\right) + g^4,$$

quel que soit le point O. En réduisant à l'unité les coefficients k_i, on a l'énoncé de la proposition XXX.

Au moyen des notations dont j'ai fait usage dans ce qui précède, cette relation s'écrit sous la forme

$$\frac{\mathrm{S}k_i[(x-a_i)^2 + (y-b_i)^2]^2}{\mathrm{S}k_i}$$
$$= [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^4 + f^2\left[\frac{(y-\alpha_1 x - \beta_1)^2}{1+\alpha_1^2} + \frac{(y-\alpha_2 x - \beta_2)^2}{1+\alpha_2^2}\right] + g^4,$$

ξ, η étant les coordonnées de A'. Si l'on prend pour origine le point pour lequel on a

$$\mathrm{S}k_i a_i = 0, \quad \mathrm{S}k_i b_i = 0, \quad \mathrm{S}k_i a_i b_i = 0,$$

il vient

$$\xi = 0, \quad \eta = 0,$$

et l'on est conduit à résoudre, pour déterminer $f, g, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$, les six équations

$$f^2\left(\frac{\alpha_1}{1+\alpha_1^2} + \frac{\alpha_2}{1+\alpha_2^2}\right) = 0,$$
$$f^2\left(\frac{1}{1+\alpha_1^2} + \frac{1}{1+\alpha_2^2}\right) = \frac{2}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}k_i(a_i^2 + 3b_i^2),$$
$$f^2\left(\frac{\alpha_1^2}{1+\alpha_1^2} + \frac{\alpha_2^2}{1+\alpha_2^2}\right) = \frac{2}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}k_i(3a_i^2 + b_i^2),$$
$$f^2\left(\frac{\alpha_1\beta_1}{1+\alpha_1^2} + \frac{\alpha_2\beta_2}{1+\alpha_2^2}\right) = -\frac{2}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}k_i a_i(a_i^2 + b_i^2),$$
$$f^2\left(\frac{\beta_1}{1+\alpha_1^2} + \frac{\beta_2}{1+\alpha_2^2}\right) = \frac{2}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}k_i b_i(a_i^2 + b_i^2),$$
$$f^2\left(\frac{\beta_1^2}{1+\alpha_1^2} + \frac{\beta_2^2}{1+\alpha_2^2}\right) + g^4 = \frac{1}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}k_i(a_i^2 - b_i^2)^2.$$

On ne peut pas supposer $f=0$; car il en résulterait

$$Sk_i(a_i^2+b_i^2)=0,$$

c'est-à-dire une condition particulière. On posera donc

$$\frac{\alpha_1}{1+\alpha_1^2}+\frac{\alpha_2}{1+\alpha_2^2}=0,$$

ou

$$(\alpha_1+\alpha_2)(1+\alpha_1\alpha_2)=0.$$

En égalant à zéro le second facteur $1+\alpha_1\alpha_2$, on trouve la condition particulière $Sk_ia_i^2=Sk_ib_i$. Par suite, je me bornerai à faire $\alpha_2=-\alpha_1$; cette valeur étant substituée dans la deuxième équation et dans les suivantes, on a

$$\frac{f^2}{1+\alpha_1^2}=\frac{1}{Sk_i}Sk_i(a_i^2+3b_i^2),$$

$$\frac{f^2\alpha_1^2}{1+\alpha_1^2}=\frac{1}{Sk_i}Sk_i(3a_i^2+b_i^2),$$

$$\frac{f^2\alpha_1}{1+\alpha_1^2}(\beta_2-\beta_1)=\frac{2}{Sk_i}Sk_ia_i(a_i^2+b_i^2),$$

$$\frac{f^2}{1+\alpha_1^2}(\beta_1+\beta_2)=\frac{2}{Sk_i}Sk_ib_i(a_i^2+b_i^2),$$

$$\frac{f^2}{1+\alpha_1^2}(\beta_2^2+\beta_1^2)+g^4=\frac{1}{Sk_i}Sk_i(a_i^2+b_i^2)^2.$$

On tire de ces équations, en ajoutant et divisant membre à membre les deux premières,

$$f^2=\frac{4}{Sk_i}Sk_i(a_i^2+b_i^2),$$

$$\alpha_1=+\sqrt{\frac{Sk_i(3a_i^2+b_i^2)}{Sk_i(a_i^2+3b_i^2)}},\quad \alpha_2=-\sqrt{\frac{Sk_i(3a_i^2+b_i^2)}{Sk_i(a_i^2+3b_i^2)}}.$$

Au moyen de ces valeurs, on déduit de la troisième équation et de la quatrième celles de $\beta_2-\beta_1$ et de $\beta_2+\beta_1$, et, par suite, de β_2 et de β_1. Enfin, la dernière équation fait connaître g^4, et la question est complétement résolue.

TROISIÈME THÉORÈME GÉNÉRAL.

20. Soient $L_1, L_2, \ldots, L_m$ m droites quelconques données, et $k_1, k_2, \ldots, k_m$ autant de coefficients également donnés; on peut trouver $n+1$ autres droites L'_1, L'_2, L'_{n+1}, telles qu'il y ait, entre les perpendiculaires $OP_1, OP_2, \ldots, OP_m$ abaissées d'un point O, pris arbitrairement, sur les premières, et les perpendiculaires $\overline{OP'_1}$, $\overline{OP'_2}, \ldots, \overline{OP'_{n+1}}$ abaissées du même point sur les droites trouvées, la relation

$$\frac{k_1 \overline{OP_1}^n + k_2 \overline{OP_1}^n + \ldots + k_m \overline{OP_m}^n}{k_1 + k_2 + \ldots + k_m} = \frac{\overline{OP'_1}^n + \overline{OP'_2}^n + \ldots + \overline{OP'_{n+1}}^n}{n+1}.$$

Stewart donne des énoncés séparés pour le cas où n est pair, et pour celui où n est impair; les premiers sont ceux de la proposition XLIX et de la proposition XLVIII, les coefficients k_i étant supposés dans celle-ci égaux à l'unité et $n < m - 1$. Les autres sont d'abord celui de la proposition LI, où l'on considère seulement les points renfermés dans l'intérieur d'un polygone; puis celui de la proposition LIII, où les points sont pris partout où l'on veut, pourvu que l'on ne passe jamais d'un côté à l'autre de l'une quelconque des droites données. La proposition L et la proposition LII sont sujettes aux mêmes restrictions, et l'on suppose les coefficients k_i égaux à l'unité et $n < m - 1$. Ces distinctions tiennent évidemment au changement de signe qu'éprouve la perpendiculaire abaissée sur une droite, quand on passe d'un côté à l'autre. Il n'y a donc point lieu de s'en préoccuper.

Afin d'éviter les radicaux qui se présentent dans l'expression de la perpendiculaire, je la mettrai sous la forme

$$t_i - x \cos \nu_i - y \sin \nu_i,$$

ou

$$\theta_i - x \cos \varphi_i - y \sin \varphi_i,$$

suivant qu'il s'agira de droites connues ou inconnues. t_i, θ_i sont les longueurs des perpendiculaires abaissées de l'origine des coordonnées sur les droites, et ν_i, φ_i les angles que font ces perpendiculaires avec l'axe des x.

21. Soit d'abord $n = 1$. Les équations à résoudre sont

$$\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2 = \frac{2}{Sk_i} Sk_i \sin\nu_i,$$

$$\sin\varphi_1 + \sin\varphi_2 = \frac{2}{Sk_i} Sk_i \sin\nu_i,$$

$$\theta_1 + \theta_2 = \frac{2}{Sh_i} Sk_i t_i.$$

On peut toujours disposer de la direction de l'axe des x, de manière que l'on ait

$$Sk_i \cos\nu_i = 0;$$

car si cette condition n'est pas remplie, appelons φ l'angle que le nouvel axe des x doit faire avec l'axe des x, et posons

$$Sk_i \cos(\nu_i - \varphi) = 0;$$

il vient

$$\cos\varphi\, Sk_i \cos\nu_i + \sin\varphi\, Sk_i \sin\nu_i = 0,$$

d'où l'on tire

$$\operatorname{tang}\varphi = -\frac{Sk_i \cos\nu_i}{Sk_i \sin\nu_i}.$$

On a donc, au moyen de ce changement de direction des axes,

$$\cos\varphi_2 = -\cos\varphi_1,$$

et, par conséquent, deux solutions

$$\varphi_2 = \pi - \varphi_1 \quad \text{et} \quad \varphi_2 = \pi + \varphi_1.$$

La première donne

$$\sin\varphi_1 = \frac{1}{Sk_i} Sk_i \sin\nu_i.$$

Quant aux longueurs θ_1, θ_2, elles ne sont soumises qu'à la condition de donner une somme constante; c'est pourquoi elles sont indéterminées. On aperçoit sans peine que tous les systèmes de deux droites qui résolvent la question se coupent sur une parallèle à l'axe des x, à la distance $\frac{Sk_i t_i}{Sk_i \sin\nu_i}$ de cet axe.

La seconde solution exige que l'on ait

$$Sk_i \sin\nu_i = 0,$$

ce qui n'a lieu que dans des cas particuliers. Alors les deux droites trouvées L'_1, L'_2 sont parallèles entre elles, et leur direction est indéterminée. De plus, chacun des deux membres de l'équation

$$\frac{k_1 \mathrm{OP}_1 + k_2 \mathrm{OP}_2 + \ldots + k_m \mathrm{OP}_m}{k_1 + k_2 + \ldots + k_m} = \frac{\mathrm{OP}'_1 + \mathrm{OP}'_2}{2}$$

est constant.

Lorsque les droites données sont les côtés d'un polygone régulier, et que les coefficients k_i se réduisent à l'unité, on a la proposition III de Stewart.

22. Soit maintenant $n = 2$, auquel cas on a la proposition XXI, et la proposition XVII k_i étant égal à l'unité; les équations sont au nombre de six, savoir :

$$\cos^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_2 + \cos^2\varphi_3 = \frac{3}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}k_i\cos^2\nu_i,$$

$$\cos\varphi_1\sin\varphi_1 + \cos\varphi_2\sin\varphi_2 + \cos\varphi_3\sin\varphi_3 = \frac{3}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}k_i\sin\nu_i\cos\nu_i,$$

$$\sin^2\varphi_1 + \sin^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_3 = \frac{3}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}k_i\sin^2\nu_i,$$

$$\theta_1\cos\varphi_1 + \theta_2\cos\varphi_2 + \theta_3\cos\varphi_3 = \frac{3}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}k_i t_i\cos\nu_i,$$

$$\theta_1\sin\varphi_1 + \theta_2\sin\varphi_2 + \theta_3\sin\varphi_3 = \frac{3}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}k_i t_i\sin\nu_i,$$

$$\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 = \frac{3}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}k_i t_i^2.$$

En ajoutant ensemble la première et la troisième, on obtient une identité. Ces deux équations se réduisent donc à une seule, et tout le système à cinq équations entre six inconnues φ_1, φ_2, φ_3, θ_1, θ_2, θ_3. Par conséquent, il y aura indétermination; c'est ce que je vais examiner avec détail.

23. Afin d'abréger les calculs, je supposerai que l'on a placé l'origine au point pour lequel la somme $k_1\overline{\mathrm{OP}}_1^2 + k_2\overline{\mathrm{OP}}_2^2 + \ldots + k_m\overline{\mathrm{OP}}_m^2$ est un minimum. On l'obtient en égalant à zéro les dérivées prises par rapport à x et par rapport à y de l'expression

$$\mathrm{S}k_i[t_i - (x\cos\nu_i + y\sin\nu_i)]^2,$$

c'est-à-dire en posant

$$x\,\mathrm{S}k_i\cos^2 \nu_i + y\,\mathrm{S}k_i \cos \nu_i \sin \nu_i = \mathrm{S}k_i t_i \cos \nu_i,$$
$$x\,\mathrm{S}k_i \cos \nu_i \sin \nu_i + y\,\mathrm{S}k_i \sin^2 \nu_i = \mathrm{S}k_i t_i \sin \nu_i,$$

et les valeurs de x et de y, tirées de ces deux équations, sont celles des coordonnées de la nouvelle origine. On aura donc, quand les axes y auront été transportés,

$$\mathrm{S}k_i t_i \cos \nu_i = 0, \quad \mathrm{S}k_i t_i \sin \nu_i = 0.$$

De plus, on peut les tourner dans leur plan d'une quantité angulaire ν, de manière que $\mathrm{S}k_i \cos \nu_i \sin \nu_i$ devienne nul. Il suffit pour cela d'écrire

$$\mathrm{S}k_i \cos(\nu_i - \nu)\sin(\nu_i - \nu) = 0,$$

ou

$$\cos 2\nu\, \mathrm{S}k_i \cos \nu_i \sin \nu_i = \frac{1}{2} \sin 2\nu\,(\mathrm{S}k_i \cos^2 \nu_i - \mathrm{S}k_i \sin^2 \nu_i),$$

ce qui donne

$$\operatorname{tang} 2\nu = \frac{2\,\mathrm{S}k_i \sin \nu_i \cos \nu_i}{\mathrm{S}k_i \cos^2 \nu_i - \mathrm{S}k_i \sin^2 \nu_i};$$

de là deux valeurs de ν, différant entre elles de $\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire deux directions formant un angle droit: l'une étant prise pour axe des x, l'autre devient donc l'axe des y. Cette recherche a la plus grande analogie avec celle de l'équation la plus simple d'une ligne du second ordre en coordonnées rectangulaires.

24. Je laisse de côté les cas particuliers où les coordonnées de l'origine deviennent infinies ou indéterminées. Les nouvelles équations, dans le cas le plus général, sont:

$$\cos^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_2 + \cos^2 \varphi_3 = \frac{3}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}k_i \cos^2 \nu_i,$$
$$\cos \varphi_1 \sin \varphi_1 + \cos \varphi_2 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_3 \sin \varphi_3 = 0,$$
$$\sin^2 \varphi_1 + \sin^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_3 = \frac{3}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}k_i \sin^2 \nu_i,$$
$$\theta_1 \cos \varphi_1 + \theta_2 \cos \varphi_2 + \theta_3 \cos \varphi_3 = 0,$$
$$\theta_1 \sin \varphi_1 + \theta_2 \sin \varphi_2 + \theta_3 \sin \varphi_3 = 0,$$
$$\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 = \frac{3}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}k_i t_i^2.$$

Des trois premières on tire

$$\cos 2\varphi_1 + \cos 2\varphi_2 + \cos 2\varphi_3 = \frac{3}{Sk_i} Sk_i \cos 2\nu_i,$$

$$\sin 2\varphi_1 + \sin 2\varphi_2 + \sin 2\varphi_3 = 0;$$

puis, en faisant passer φ_1 dans le second membre, élevant au carré et ajoutant,

$$\cos^2(\varphi_3 - \varphi_2) = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{3}{Sk_i} Sk_i \cos 2\nu_i - \cos 2\varphi_1\right)^2 + \sin^2 2\varphi_1\right],$$

d'où

$$\sin^2(\varphi_3 - \varphi_2) = 1 - \frac{1}{4}\left[\left(\frac{3}{Sk_i} Sk_i \cos 2\nu_i - \cos 2\varphi_1\right)^2 + \sin^2 2\varphi_1\right].$$

D'un autre côté, en décomposant

$$\cos 2\varphi_2 + \cos 2\varphi_3 \quad \text{et} \quad \sin 2\varphi_2 + \sin 2\varphi_3$$

en produits de sinus et de cosinus, on trouve

$$\operatorname{tang}(\varphi_3 + \varphi_2) = \frac{-\sin 2\varphi_1}{\frac{3}{Sk_i} Sk_i \cos 2\nu_i - \cos 2\varphi_1}.$$

On connaît donc $\varphi_3 + \varphi_2$ et $\varphi_3 - \varphi_2$ quand φ_1 est donné; ce qui suffit pour déterminer φ_3 et φ_2.

Les trois équations en θ_1, θ_2, θ_3 donnent, par un calcul facile,

$$\theta_1^2 = \frac{3}{Sk_i} Sk_i t_i^2 \frac{\sin^2(\varphi_3 - \varphi_2)}{\sin^2(\varphi_3 - \varphi_2) + \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1) + \sin^2(\varphi_1 - \varphi_3)},$$

$$\theta_2^2 = \frac{3}{Sk_i} Sk_i t_i^2 \frac{\sin^2(\varphi_1 - \varphi_3)}{\sin^2(\varphi_3 - \varphi_2) + \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1) + \sin^2(\varphi_1 - \varphi_3)},$$

$$\theta_3^2 = \frac{3}{Sk_i} Sk_i t_i^2 \frac{\sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)}{\sin^2(\varphi_3 - \varphi_2) + \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1) + \sin^2(\varphi_1 - \varphi_3)}.$$

Or $\sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)$ et $\sin^2(\varphi_1 - \varphi_3)$ s'expriment en fonction des sinus et cosinus des angles $2\varphi_3$ et $2\varphi_2$, de même que $\sin^2(\varphi_3 - \varphi_2)$ en fonction de $\sin 2\varphi_1$ et $\cos 2\varphi_1$, et l'on a, toutes réductions faites,

$$\sin^2(\varphi_3 - \varphi_2) + \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1) + \sin^2(\varphi_1 - \varphi_3)$$
$$= \left(\frac{3}{Sk_i}\right)^2 [Sk_i \cos^2 \nu_i . Sk_i \sin^2 \nu_i];$$

par conséquent, si l'on écrit

$$\mathcal{G} = \frac{\frac{3}{Sk_i} Sk_i t_i^2}{\left(\frac{3}{Sk_i}\right)^2 (Sk_i \cos^2 v_i . Sk_i \sin^2 v_i)} \left\{ 1 - \frac{1}{4} \left[\left(\frac{3}{Sk_i} Sk_i \cos 2v_i - \cos 2\varphi \right)^2 + \sin^2 2\varphi \right] \right\},$$

on aura l'équation polaire du lieu des pieds des perpendiculaires abaissées de l'origine sur les droites cherchées.

Le facteur entre accolades peut être mis sous la forme

$$\frac{3}{Sk_i} Sk_i \sin^2 v_i \left(\frac{3}{Sk_i} Sk_i \cos^2 v_i - 1 \right) \cos^2 \varphi$$
$$+ \frac{3}{Sk_i} Sk_i \cos^2 v_i \left(\frac{3}{Sk_i} Sk_i \sin^2 v_i - 1 \right) \sin^2 \varphi,$$

de sorte qu'il vient finalement

$$\mathcal{G}^2 = \frac{Sk_i t_i^2}{Sk_i \cos^2 v_i . Sk_i \sin^2 v_i} \left[\begin{array}{c} Sk_i \sin^2 v_i \left(\frac{3}{Sk_i} Sk_i \cos^2 v_i - 1 \right) \cos^2 \varphi \\ + Sk_i \cos^2 v_i \left(\frac{3}{Sk_i} Sk_i \sin^2 v_i - 1 \right) \sin^2 \varphi \end{array} \right].$$

On reconnaît dans cette équation le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées de l'origine sur les tangentes à l'ellipse dont les axes principaux coïncident en direction avec ceux des coordonnées, et ont pour longueurs, dans le sens des x et des y,

$$\sqrt{\frac{Sk_i t_i^2 \left(\frac{3}{Sk_i} Sk_i \cos v_i - 1 \right)}{Sk_i \cos^2 v_i}}, \quad \sqrt{\frac{Sk_i t_i^2 \left(\frac{3}{Sk_i} Sk_i \sin^2 v_i - 1 \right)}{Sk_i \sin^2 v_i}}.$$

Tous les triangles ou systèmes de trois droites qui satisfont à la question peuvent donc être considérés comme tangents à cette ellipse.

Les pieds des perpendiculaires θ_1, θ_2, θ_3 ont pour centre de gravité ou de figure celui de cette courbe; c'est une conséquence des équations

$$\theta_1 \cos \varphi_1 + \theta_2 \cos \varphi_2 + \theta_3 \cos \varphi_3 = 0,$$
$$\theta_1 \sin \varphi_1 + \theta_2 \sin \varphi_2 + \theta_3 \sin \varphi_3 = 0.$$

25. On peut satisfaire à la relation

$$\frac{k_1 \overline{OP}_1^2 + k_2 \overline{OP}_2^2 + \ldots + k_m \overline{OP}_m^2}{k_1 + k_2 + \ldots + k_m} = \frac{\overline{OP'}_1^2 + \overline{OP'}_2^2}{2} + C^2,$$

au moyen de deux droites L'_1, L'_2 et d'une constante C qu'il s'agit de déterminer; c'est l'énoncé de la proposition XX et celui de la proposition XVI, en supposant les coefficients k_i égaux à l'unité.

En effet, choisissons les axes comme il a été indiqué au n° **22**, c'est-à-dire de telle sorte qu'on ait à la fois

$$Sk_i t_i \cos \nu_i = 0, \quad Sk_i t_i \sin \nu_i = 0, \quad Sk_i \cos \nu_i \sin \nu_i = 0;$$

on trouve les équations

$$\sin\varphi_1 \cos\varphi_1 + \sin\varphi_2 \cos\varphi_2 = 0,$$

$$\cos^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_2 = \frac{3}{Sk_i} Sk_i \cos^2\nu_i,$$

$$\sin^2\varphi_1 + \sin^2\varphi_2 = \frac{3}{Sk_i} Sk_i \sin^2\nu_i,$$

$$\theta_1 \cos\varphi_1 + \theta_2 \cos\varphi_2 = 0,$$

$$\theta_1 \sin\varphi_1 + \theta_2 \sin\varphi_2 = 0,$$

$$\theta_1^2 + \theta_2^2 + 2C^2 = \frac{3}{Sk_i} Sk_i t_i^2.$$

La première donne

$$\sin 2\varphi_2 = -\sin 2\varphi_1,$$

c'est-à-dire

$$2\varphi_2 = 2\pi - 2\varphi_1 \quad \text{ou} \quad 2\varphi_2 = 2\varphi_1 + \pi.$$

Si l'on fait d'abord

$$\varphi_2 + \varphi_1 = \pi,$$

on a

$$\cos\varphi_1 = \pm\sqrt{\frac{1}{Sk_i} Sk_i \cos^2\nu_i}, \quad \sin\varphi_1 = \pm\sqrt{\frac{1}{Sk_i} Sk_i \sin^2\nu_i},$$

$$\theta_1 = 0, \quad \theta_2 = 0, \quad C^2 = \sqrt{\frac{1}{Sk_i} Sk_i t_i^2}.$$

Si l'on fait

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2},$$

il vient

$$\frac{2}{Sk_i} Sk_i \cos^2\nu_i = \frac{2}{Sk_i} Sk_i \sin\nu_i = 1,$$

double condition qui n'est remplie que dans des cas particuliers.

Supposons qu'elle le soit, nous aurons deux droites se coupant à angle droit, et en appelant A leur point d'intersection, la somme $\overline{OP'_1}^2 + \overline{OP'_2}^2$ sera égal à $\overline{OA}^2$, et nous pourrons écrire

$$\frac{k_1\overline{OP_1}^2 + k_2\overline{OP_2}^2 + \ldots + k_m\overline{OP_m}^2}{k_1 + k_2 + \ldots + k_m} = \frac{1}{2}\overline{OA}^2 + C^2;$$

on a, comme ci-dessus,

$$\theta_1 = 0, \quad \theta_2 = 0 \quad \text{et} \quad C = \sqrt{\frac{1}{Sk_i} Sk_i t_i^2}.$$

L'angle φ_1 demeure arbitraire. Dans ce cas, la question a changé de nature; à la recherche de deux droites, on substitue celle d'un certain point A.

Si les droites $L_1, L_2, \ldots, L_m$ sont les côtés d'un polygone régulier, et que les coefficients k_i soient égaux à l'unité, on a

$$\frac{2}{m} S\cos^2 \nu_i = \frac{2}{m} S\sin^2 \nu_i = 1 \quad \text{et} \quad C^2 = R^2,$$

R étant le rayon du cercle inscrit; ce cas forme l'objet de la proposition V.

Dans la proposition VIII, Stewart a considéré un demi-polygone régulier. Alors on a, comme ci-dessus,

$$\frac{2}{m} S\cos^2 \nu_i = \frac{2}{m} S\sin^2 \nu_i = 1;$$

les droites L'_1, L'_2 sont perpendiculaires entre elles, et la même propriété a encore lieu. Si l'on calcule la distance ρ du point A au centre du cercle inscrit, on trouve qu'elle est égale à une quatrième proportionnelle au périmètre du demi-polygone, à sa base (entre deux sommets opposés) et au diamètre du cercle; il s'ensuit finalement

$$\frac{1}{m}\left(\overline{OP'_1}^2 + \overline{OP'_2}^2 + \ldots + \overline{OP'_m}^2\right) = \frac{1}{2}\left(\overline{OA}^2 + 2R^2 - \rho^2\right).$$

26. Quand on a $n = 3$, hypothèse qui répond aux propositions XXIV et XXV, il faut d'abord résoudre les équations

$$\cos^3\varphi_1 + \cos^3\varphi_2 + \cos^3\varphi_3 + \cos^3\varphi_4 = \frac{4}{Sk_i}\, Sk_i \cos^3 \nu_i,$$

$$\cos^2\varphi_1 \sin\varphi_1 + \cos^2\varphi_2 \sin\varphi_2 + \cos^2\varphi_3 \sin\varphi_3 + \cos^2\varphi_4 \sin\varphi_4 = \frac{4}{Sk_i}\, Sk_i \cos^2\nu_i \sin\nu_i,$$

$$\cos\varphi_1 \sin^2\varphi_1 + \cos\varphi_2 \sin^2\varphi_2 + \cos\varphi_3 \sin^2\varphi_3 + \cos\varphi_4 \sin^2\varphi_4 = \frac{4}{Sk_i}\, Sk_i \cos\nu_i \sin^2\nu_i,$$

$$\sin^3\varphi_1 + \sin^3\varphi_2 + \sin^3\varphi_3 + \sin^3\varphi_4 = \frac{4}{Sk_i}\, Sk_i \sin^3\nu_i.$$

Elles ne sont pas susceptibles de se réduire à un moindre nombre; car supposons, pour un instant, que l'un des angles inconnus, φ_4 par exemple, puisse être choisi arbitrairement: les valeurs de φ_1, φ_2, φ_3 en fonction de φ_4, tirées de trois de ces équations, devront rendre la quatrième identique, quel que soit φ_4. Pour fixer les idées et faciliter les calculs, je ferai $\varphi_4 = 0$, et j'admettrai qu'on ait

$$\frac{4}{Sk_i}\, Sk_i \cos^3\nu_i = 1, \quad \frac{4}{Sk_i}\, Sk_i \cos^2\nu_i \sin\nu_i = 0,$$

$$\frac{4}{Sk_i}\, Sk_i \cos\nu_i \sin\nu_i = 1, \quad \frac{4}{Sk_i}\, Sk_i \sin^2\nu_i = 0,$$

ce qui n'empêchera point la conclusion d'être générale. Cela posé, une transformation facile donne

$$\cos^3\varphi_1 + \cos^3\varphi_2 + \cos^3\varphi_3 = 0,$$
$$\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2 + \cos\varphi_3 = 0,$$
$$\sin\varphi_1 + \sin\varphi_2 + \sin\varphi_3 = 0,$$
$$\sin^3\varphi_1 + \sin^3\varphi_2 + \sin^3\varphi_3 = 0.$$

Soit maintenant

$$\cos^3\varphi + p\cos^2\varphi + q\cos\varphi + r = 0$$

l'équation qui a pour racines $\cos\varphi_1$, $\cos\varphi_2$, $\cos\varphi_3$; φ_4 étant nul: on trouve par les fonctions symétriques $p = 0$, $r = 0$, de sorte que cette équation devient

$$\cos\varphi\,(\cos^2\varphi + q) = 0,$$

d'où l'on tire

$$\cos\varphi_1 = 0, \qquad \cos\varphi_2 = +\sqrt{-q}, \qquad \cos\varphi_3 = -\sqrt{-q},$$
$$\sin\varphi_1 = \pm 1, \qquad \sin\varphi_2 = \pm\sqrt{1+q}, \qquad \sin\varphi_3 = \pm\sqrt{1+q}.$$

Or, avec quelque combinaison de signes que l'on substitue ces valeurs des sinus dans les relations

$$\sin\varphi_1 + \sin\varphi_2 + \sin\varphi_3 = 0, \quad \sin^3\varphi_1 + \sin^3\varphi_2 + \sin^3\varphi_3 = 0,$$

les résultats qu'on obtient sont contradictoires; donc il n'est pas permis de regarder l'un des angles inconnus comme arbitraire. En d'autres termes, les quatre équations ci-dessus suffisent généralement pour déterminer ces angles.

Les longueurs θ_1, θ_2, θ_3, θ_4 dépendant des six équations

$$\theta_1\cos^2\varphi_1 + \theta_2\cos^2\varphi_2 + \theta_3\cos^2\varphi_3 + \theta_4\cos^2\varphi_4 = \frac{4}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}k_i t_i\cos^2 v_i,$$

$$\theta_1\cos\varphi_1\sin\varphi_1 + \theta_2\cos\varphi_2\sin\varphi_2 + \theta_3\cos\varphi_3\sin\varphi_3$$
$$+ \theta_4\cos\varphi_4\sin\varphi_4 = \frac{4}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}k_i t_i\cos v_i\sin v_i,$$

$$\theta_1\sin^2\varphi_1 + \theta_2\sin^2\varphi_2 + \theta_3\sin^2\varphi_3 + \theta_4\sin^2\varphi_4 = \frac{4}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}k_i t_i\sin^2 v_i,$$

$$\theta_1^2\cos\varphi_1 + \theta_2^2\cos\varphi_2 + \theta_3^2\cos\varphi_3 + \theta_4^2\cos\varphi_4 = \frac{4}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}k_i t_i^2\cos v_i,$$

$$\theta_1^2\sin\varphi_1 + \theta_2^2\sin\varphi_2 + \theta_3^2\sin\varphi_3 + \theta_4^2\sin\varphi_4 = \frac{4}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}k_i t_i^2\sin v_i,$$

$$\theta_1^3 + \theta_2^3 + \theta_3^3 + \theta_4^3 = \frac{5}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}k_i t_i^3,$$

et les coefficients devant être considérés, d'après ce qui vient d'être dit, comme des fonctions connues des quantités k_i, v_i, on pourra disposer des m longueurs t_i, de façon que chaque second membre acquière telle valeur qu'on voudra, et, par conséquent, que les valeurs de θ_1, θ_2, θ_3, θ_4, tirées de quatre de ces équations, ne puissent satisfaire aux deux équations restantes. Ces observations, qu'il serait trop long d'accompagner d'exemples, suffisent pour démontrer que la solution du problème n'est possible que sous certaines conditions particulières.

27. Il est à remarquer que si l'on avait à la fois

$$S k_i \cos^3 v_i = 0, \quad S k_i \cos^2 v_i \sin v_i = 0,$$
$$S k_i \cos v_i \sin^2 v_i = 0, \qquad S k_i \sin^3 v_i = 0,$$

la question se résoudrait complétement; car d'abord on aurait

$$\cos^3 \varphi_1 + \cos^3 \varphi_2 + \cos^3 \varphi_3 + \cos^3 \varphi_4 = 0,$$
$$\cos^2 \varphi_1 \sin \varphi_1 + \cos^2 \varphi_2 \sin \varphi_2 + \cos^2 \varphi_3 \sin \varphi_3 + \cos^2 \varphi_4 \sin \varphi_4 = 0.$$
$$\cos \varphi_1 \sin^2 \varphi_1 + \cos \varphi_2 \sin^2 \varphi_2 + \cos \varphi_3 \sin^2 \varphi_3 + \cos \varphi_4 \sin^2 \varphi_4 = 0,$$
$$\sin^3 \varphi_1 + \sin^3 \varphi_2 + \sin^3 \varphi_3 + \sin^3 \varphi_4 = 0.$$

et ces équations ne changeant pas, ainsi qu'on peut s'en assurer sans peine lorsqu'on ajoute à chacun des angles inconnus un même angle choisi arbitrairement, il en résulte qu'on peut supposer d'abord $\varphi_4 = 0$, et que les valeurs obtenues ainsi pour φ_1, φ_2, φ_3 auront toute la généralité requise en leur ajoutant un angle arbitraire φ_4.

Cherchons actuellement à déterminer les coefficients de l'équation

$$\cos^3 \varphi + p \cos^2 \varphi + q \cos \varphi + r = 0,$$

dont les racines sont $\cos \varphi_1$, $\cos \varphi_2$, $\cos \varphi_3$; φ_4 étant nul : on trouve, par les fonctions symétriques, $p = 1$, $q = r$, et cette équation se met sous la forme

$$(\cos \varphi + 1)(\cos^2 \varphi + q) = 0,$$

d'où

$$\cos \varphi_1 = -1, \quad \cos \varphi_2 = +\sqrt{-q}, \quad \cos \varphi_3 = -\sqrt{-q},$$
$$\sin \varphi_1 = 0, \quad \sin \varphi_2 = \pm \sqrt{1+q}, \quad \sin \varphi_3 = \pm \sqrt{1+q}.$$

On reconnaît immédiatement que q demeure indéterminé, et qu'il reste six équations entre θ_1, θ_2, θ_3, θ_4, φ_4, q, c'est-à-dire autant d'équations que d'inconnues. On vérifie d'ailleurs sans peine que ces équations se résolvent complétement et fournissent pour les inconnues des valeurs déterminées.

28. Pour $n = 4$, ce qui est le cas de la proposition XXXVIII et de la proposition XXXVII, les coefficients étant égaux à l'unité et $m > 4$, l'excès du nombre des équations sur celui des inconnues démontre clairement que les énoncés de Stewart ne se vérifient point; à plus forte raison, il en est de même pour des valeurs supérieures de n, si ce n'est dans quelques cas particuliers, ceux, par exemple, où les droites données sont les côtés d'un polygone régulier circonscrit à un cercle de rayon R. Alors les sommes des puissances n des perpendiculaires abaissées d'un point quelconque sur ces droites s'expriment d'une manière simple. Nommons ρ la longueur de la droite qui va du point O au centre du cercle, et φ l'angle qu'elle fait avec la perpendiculaire OP_1; ceux qu'elle fait avec les perpendiculaires OP_2, OP_3,..., sont $\varphi + \frac{2\pi}{m}$, $\varphi + 2\frac{2\pi}{m}$,...: on a donc

$$\overline{OP}_1^n + \overline{OP}_2^n + \ldots + \overline{OP}_m^n = \mathbf{S}_{i=0}^{i=m-1}\left[R - \rho\cos\left(\varphi + \frac{2i\pi}{m}\right)\right]^n.$$

Développant et ayant égard à la relation rappelée dans le n° **8**, il vient

$$\overline{OP}_1^n + \overline{OP}_2^n + \ldots + \overline{OP}_m^n$$
$$= m\left[R^n + \frac{n(n-1)}{1^2.2^2}R^{n-2}\rho^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1^2.2^2.3^2.4^2}R^{n-4}\rho^4 + \ldots\right].$$

Quand le point O est sur la circonférence du cercle inscrit dans le polygone, la somme ci-dessus se réduit à

$$mR^n \times \frac{1}{2^n}\frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots n} = m\frac{1.3.5.7\ldots(2n-1)}{1.2.3.4\ldots n}.R^n.$$

Stewart a démontré ces théorèmes pour $n = 2$, dans la proposition V, comme il a été dit au n° **25**, et les a seulement énoncés pour $n = 3$ dans les propositions XXII et XXIII, et pour $n = 4$ dans les propositions XXVIII et XXIX; c'est seulement dans les propositions XXXIX et XL qu'il donne la formule ci-dessus et la précédente, en restreignant celle-ci au cas où le point O est dans l'intérieur du polygone, quand l'exposant n est impair. Mais on aperçoit sans peine qu'elle subsiste lorsque le point O est extérieur au polygone, pourvu que l'on regarde comme négatives les perpendiculaires abaissées sur les côtés qui, prolongés au besoin, passent entre ce point et le centre du cercle inscrit. Cette proposition est intuitive pour $n = 1$.

THÉORÈMES PARTICULIERS.

29. Je terminerai cette analyse par un examen rapide de celles des propositions du géomètre anglais qui n'ont pu trouver place dans ce qui précède. L'ordre dans lequel il les présente porte à croire qu'elles étaient, dans sa pensée, au moins en grande partie, des lemmes propres à conduire synthétiquement aux propositions principales que nous avons discutées, et qui se trouvent dépourvues du degré de généralité qu'il leur attribuait.

Quelques-unes n'ont besoin que d'être énoncées pour qu'on en aperçoive la vérité; elles sont relatives au degré ou à la nature de certains lieux géométriques, et il est tout simple qu'en les traitant par la méthode des coordonnées de Descartes, on trouve à priori des résultats auxquels la synthèse ne parvient que péniblement. Voici ces propositions :

PROPOSITION LIV. *Le lieu du point* O *d'où l'on peut mener à* m *droites parallèles* L_1, L_2,..., L_m, *sous des angles donnés autant de droites* OQ_1, OQ_2,..., OQ_m, *telles que la somme des puissances* n *de leurs longueurs soit constante, est une ligne droite.*

PROPOSITION LV. *Le lieu du point* O, *tel que la somme des puissances* n *des perpendiculaires abaissées de ce point sur* $n+1$ *droites données soit constante, est une ligne courbe* (an oval figure) *de degré* n *ou d'un degré moindre.*

PROPOSITION LVI. *Étant donné deux groupes* L_1, L_2,..., L_m *et* L'_1, L'_2,..., L'_m *de droites toutes parallèles entre elles, ou se coupant en un même point, le lieu du point* O *tel, que menant à celles-ci sous des angles donnés, les droites* OQ_1, OQ,..., OQ_m, OQ'_1, OQ'_2,..., OQ'_m, *on a*

$$\frac{\overline{OQ_1}^n+\overline{OQ_2}^n+\ldots+\overline{OQ_m}^n}{\overline{OQ'_1}^n+\overline{OQ'_2}^n+\ldots+\overline{OQ'_m}^n}=k,$$

k *étant une quantité constante, est une ligne droite.*

PROPOSITION LVII. *Étant donné deux groupes* L_1, L_2,..., L_{n+1} *et* L'_1, L'_2,..., L'_{n+1} *de* $n+1$ *droites situées d'une manière quelconque, le* *lieu du point* O *pour lequel on a, entre les perpendiculaires* OP_1, $OP_2,\ldots, OP_{n+1}$ *abaissées sur les premières, et les perpendiculaires* OP'_1, $OP'_2,\ldots, OP'_{n+1}$ *abaissées sur les autres, la relation*

$$\frac{\overline{OP_1}^n + \overline{OP_2}^n + \ldots + \overline{OP_{n+1}}^n}{\overline{OP'_1}^n + \overline{OP'_2}^n + \ldots + \overline{OP'_{n+1}}^n} = k,$$

k étant une quantité constante, est une ligne de degré n ou d'un degré moindre.

Proposition LVIII. *Étant donné m droites* L_1, $L_2,\ldots, L_m$, *le lieu du point* O *pour lequel on a, entre les droites* OQ_1, $OQ_2,\ldots, OQ_m$ *rencontrant* L_1, $L_2,\ldots, L_m$ *sous des angles donnés, la relation*

$$\overline{OQ_1}^n + \overline{OQ_2}^n + \ldots + \overline{OQ_m}^n = k,$$

k étant une quantité constante, est une courbe (an oval figure) *du degré n ou d'un degré moindre.*

Proposition LIX. *Étant donné deux groupes de droites* L_1, $L_2,\ldots, L_m$ *et* L'_1, $L'_2,\ldots, L'_m$, *situées d'une manière quelconque, le lieu du point* O *tel, que menant à celles-ci des droites* OQ_1, $OQ_2,\ldots, OQ_m$, OQ'_1, $OQ'''_2,\ldots, OQ'_m$, *sous des angles donnés, on a la relation*

$$\frac{\overline{OQ_1}^n + \overline{OQ_2}^n + \ldots + \overline{OQ_m}^n}{\overline{OQ'_1}^n + \overline{OQ'_2}^n + \ldots + \overline{OQ'_m}^n} = k,$$

k étant une quantité constante, est une ligne du degré n ou d'un degré moindre.

30. Je passe maintenant aux théorèmes proprement dits. Pour ne pas être trop long, je me bornerai à donner les équations d'où dépendent les quantités dont il ne s'agit que de démontrer l'existence.

Proposition I. *Si du point* D, *pris sur le côté* BC *du triangle* ABC, *on mène aux deux autres côtés* AB, AC *des parallèles qui les rencontrent en* E, F, *on a la relation*

$$AB \times AE + AC \times AF = \overline{AD}^2 + BD \times CD.$$

Stewart en donne la démonstration, assez facile à retrouver d'ailleurs. Quand on a BD = CD, on tombe sur un théorème bien connu de géométrie élémentaire.

Proposition II. *Sur la droite* AB, *soit pris un point* C *entre* A *et* B; *si de ces trois points on mène des droites* AD, BD, CD *à un quatrième point* D, *on a la relation*

$$\frac{\overline{AD}^2}{AB \times AC} + \frac{\overline{BD}^2}{BA \times BC} - \frac{\overline{CD}^2}{CA \times CB} = 1.$$

La démonstration, également donnée par Stewart, n'a rien de difficile.

Les théorèmes qui suivent sont relatifs au cercle.

Proposition VI. *Étant donné un cercle et une droite, on peut trouver un point* A *tel, que* MP *étant la perpendiculaire abaissée d'un point de la circonférence sur la droite, on ait*

$$\overline{AM}^2 = k \times MP,$$

k étant une quantité constante.

On peut inversement, étant donné le point A et le cercle, chercher la droite; c'est même à peu près ainsi que Stewart présente l'énoncé de sa proposition. Il donne la construction que voici :

Menez un diamètre par le point donné A, et sur ce diamètre déterminez le point B qui appartient à la polaire de A; la perpendiculaire élevée sur le milieu de AB sera la droite demandée. Quant au coefficient k, il est représenté par le double de la distance du point A au centre du cercle.

31. Proposition LX. *Étant donné un cercle et deux points* A, B, *on peut trouver un troisième point* C *tel, que menant par ce dernier une droite quelconque qui rencontre la circonférence en* D, E, *on aura la relation*

$$\frac{AD \times BD}{AE \times BE} = \frac{CD}{CE}.$$

Nommons p', q'; p'', q''; ξ, η; x', y'; x'', y'' les coordonnées des points A, B, C, D, E rapportées à deux axes rectangulaires passant par le centre du cercle, et R le rayon de celui-ci ; on a

$$\begin{aligned}
AD &= \sqrt{(p'-x')^2+(q'-y')^2}, & BD &= \sqrt{(p''-x')^2+(q''-y'')^2},\\
AE &= \sqrt{(p'-x'')^2+(q'-y'')^2}, & BE &= \sqrt{(p''-x'')^2+(q''-y'')^2},\\
CD &= \sqrt{(x'-\xi)^2+(y'-\eta)^2}, & CE &= \sqrt{(x''-\xi)^2+(y''-\eta)^2},\\
& x'^2+y'^2 = R^2, & & x''^2+y''^2=R^2,\\
& y'-\eta = \alpha(x'-\xi), & & y''-\eta=\alpha(x''-\xi),
\end{aligned}$$

α étant une quantité indéterminée. Substituant ces valeurs de AD, BD, AE, BE, CD, CE dans la relation annoncée par Stewart, et éliminant x', y', x'', y'', il vient une équation qui doit être satisfaite quelle que soit la valeur de α; donc les coefficients des diverses puissances de α doivent être nuls séparément. Or cette équation est à deux termes, et se décompose dans les deux suivantes :

$$\begin{aligned}
&[\eta-(q'+q'')](\xi^2+\eta^2-R^2)^2\\
&+\left\{\begin{aligned}&[(p'-\xi)^2+(q'-\eta)^2](q''-\eta)\\ +&[(p''-\xi)^2+(q''-\eta)^2](q'-\eta)\end{aligned}\right\}(\eta^2+\xi^2-R^2)\\
&+[(p'-\xi)^2+(q'-\eta)^2][(p''-\xi)^2+(q''-\eta)^2]\,\eta=0,\\
&[\xi-(p'+p'')](\xi^2+\eta^2-R^2)^2\\
&+\left\{\begin{aligned}&[(p'-\xi)^2+(q'-\eta)^2](p''-\xi)\\ +&[(p''-\xi)^2+(q''-\eta)^2](p'-\xi)\end{aligned}\right\}(\eta^2+\xi^2-R^2)\\
&+[(p'-\xi)^2+(q'-\eta)^2][(p''-\xi)^2+(q''-\eta)^2]\,\xi=0,
\end{aligned}$$

lesquelles fournissent, en général, un certain nombre de systèmes de valeurs de ξ et de η propres à représenter le point C.

Proposition LXI. *Étant donné un cercle et deux points* A_1, A_2, *on peut trouver deux droites* L_1, L_2 *telles, qu'abaissant d'un point quelconque* O *de la circonférence des perpendiculaires* OP_1, OP_2 *sur celles-ci, on ait la relation*

$$\overline{OA}_1^2\times\overline{OA}_2^2 = k^2\left(\overline{OP}_1^2+\overline{OP}_2^2\right),$$

k étant une quantité constante.

Cette relation s'exprime en écrivant

$$\begin{aligned}
&[(x-p')^2+(y-q')^2][(x-p'')^2+(y-q'')^2]\\
&=k^2[(t_1-x\cos\nu_1-y\sin\nu_1)^2+(t_2-x\cos\nu_2-y\sin\nu_2)^2];
\end{aligned}$$

p', q', p'', q'' sont toujours les coordonnées des points A_1, A_2, et les quantités t_1, v_1, t_2, v_2, qui figurent dans le second membre, fixent les positions des droites cherchées, comme il a été dit au n° **20**.

Développant, éliminant ensuite y au moyen de l'équation

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

qui est celle du cercle, dont on suppose le centre situé à l'origine des coordonnées, et égalant à zéro les coefficients des diverses puissances de x après avoir fait disparaître les radicaux, il vient les cinq équations

$$k^2(\cos 2v_1 + \cos 2v_2) = 4(p'p'' - q'q''),$$

$$k^2(\sin 2v_1 + \sin 2v_2) = 4(p'q'' + p''q'),$$

$$k^2(t_1 \cos v_1 + t_2 \cos v_2)$$
$$= (p' + p'')R^2 + [p''(p'^2 + q'^2) + p'(p''^2 + q''^2],$$

$$k^2(t_1 \sin v_1 + t_2 \sin v_2)$$
$$= (q' + q'')R^2 + [q''(p'^2 + q'^2) + q'(p''^2 + q''^2)],$$

$$k^2[t_1^2 + t_2^2 + R^2(\sin^2 v_1 + \sin^2 v_2)]$$
$$= R^4 + (p'^2 + q'^2 + p''^2 + q''^2 + 4q'q'')R^2 + (p'^2 + q'^2)(p''^2 + q''^2),$$

lesquelles renferment cinq inconnues v_1, v_2, t_1, t_2, k, et sont ainsi en nombre suffisant pour les déterminer.

Proposition LXII. *Étant donné un cercle, deux droites* L_1, L_2 *et deux coefficients* k_1, k_2, *on peut trouver un point* C *tel, que menant par ce point une droite quelconque qui rencontre la circonférence en* D, E, *et abaissant sur les droites données les perpendiculaires* DP_1, DP_2, EQ_1, EQ_2, *on aura la relation*

$$\frac{k_1 \overline{DP_1}^2 + k_2 \overline{DP_2}^2}{k_1 \overline{EQ_1}^2 + k_1 \overline{EQ_2}^2} = \frac{\overline{CD}^2}{\overline{CE}^2}.$$

Soient ξ, η; x', y'; x'', y'' les coordonnées des points C, D, E rapportées à deux axes rectangulaires passant par le centre de cercle, R le rayon et t_1, v_1, t_2, v_2 des quantités qui ont la signification indiquée au n° **20**; cette relation prend la forme

$$\frac{k_1(t_1 - x'\cos v_1 - y'\sin v_1)^2 + k_2(t_2 - x'\cos v_2 - y'\sin v_2)^2}{k_1(t_1 - x''\cos v_1 - y''\sin v_1)^2 + k_2(t_2 - x''\cos v_2 - y''\sin v_2)^2} = \frac{(x' - \xi)^2 + (y' - \eta)^2}{(x'' - \xi)^2 + (y'' - \eta)^2}.$$

Si l'on élimine x', y', x'', y'' au moyen des équations

$$x'^2 + y'^2 = R^2, \qquad x''^2 + y''^2 = R^2,$$
$$y' - \eta = \alpha(x' - \xi), \quad y'' - \eta = \alpha(x'' - \xi),$$

α étant un coefficient variable, on trouve une équation en α à deux termes, laquelle se sépare en deux autres, savoir :

$$(k_1 \varpi_1^2 + k_2 \varpi_2^2)\xi + (k_1 \varpi_1 \cos v_1 + k_2 \varpi_2 \cos v_2)(\xi^2 + \eta^2 - R^2) = 0,$$
$$(k_1 \varpi_1^2 + k_2 \varpi_2^2)\eta + (k_1 \varpi_1 \sin v_1 + k_2 \varpi_2 \sin v_2)(\xi^2 + \eta^2 - R^2) = 0,$$

où l'on fait, pour abréger,

$$\varpi_1 = t_1 - \xi \cos v_1 - \eta \sin v_1, \quad \varpi_2 = t_2 - \xi \cos v_2 - \eta \sin v_2.$$

Ces deux équations feront connaître les valeurs des coordonnées ξ, η du point C.

Proposition LXIII. *Étant donné un cercle et deux droites* L_1, L_2 *formant entre elles un angle égal au double de celui du triangle équilatéral, on peut trouver deux autres droites* L'_1, L'_2 *telles, qu'il y ait entre les perpendiculaires* OP_1, OP_2 *abaissées d'un point quelconque* O *de la circonférence sur les droites données, et les perpendiculaires* OP'_1, OP'_2 *abaissées du même point sur les droites trouvées, la relation*

$$\overline{OP}_1^3 + \overline{OP}_2^3 = k\left(\overline{OP'}_1^2 + \overline{OP'}_2^2\right),$$

k étant une quantité constante.

Prenons pour origine des coordonnées le point d'intersection des droites L_1, L_2, et pour axe des x la droite qui coupe en deux parties égales l'angle $2v$ qu'elles forment. Afin de généraliser la question, je ne ferai d'abord aucune hypothèse sur cet angle, et j'écrirai en conséquence

$$(x \sin v + y \cos v)^3 + (x \sin v - y \cos v)^3$$
$$- k\left[(\theta_1 - x\cos\varphi_1 - y \sin\varphi_1)^2 + (\theta_2 - x\cos\varphi_2 - y\sin\varphi_2)^2\right] = 0,$$

φ_1, φ_2, θ_1, θ_2 servant à fixer la position des droites inconnues, conformément à la notation indiquée au n° **20**.

Pour que cette équation soit celle d'un cercle, il faut d'abord que les termes du troisième degré disparaissent. Or cela ne saurait avoir lieu en disposant des coefficients qu'ils renferment, car leur ensemble est égal à $2x \sin \nu (x^2 \sin^2 \nu + 3y^2 \cos^2 \nu)$. Si l'on faisait $\sin \nu = 0$, l'équation ne donnerait qu'un point, quelles que fussent les valeurs de φ_1, φ_2, θ_1, θ_2. Il faut donc que l'ensemble des autres termes soit divisible par $x \sin \nu$ ou simplement par x. Par suite, on a nécessairement, les solutions imaginaires étant écartées,

$$\sin \varphi_1 = 0, \quad \sin \varphi_2 = 0, \quad \theta_1 = 0, \quad \theta_2 = 0,$$

et l'équation du lieu, ramenée au second degré, peut s'écrire

$$x^2 \sin^2 \nu + 3y^2 \cos^2 \nu - \frac{kx}{\sin \nu} = 0.$$

Cette équation ne sera celle d'un cercle qu'autant que les coefficients de x^2 et de y^2 seront égaux entre eux; on posera donc

$$\sin^2 \nu = 3 \cos^2 \nu, \quad \text{d'où} \quad \cos \nu = \pm \frac{1}{2};$$

ce qui nous donne l'hypothèse admise dans l'énoncé de Stewart, laquelle est ainsi la seule possible. Au moyen de cette valeur, l'équation devient

$$x^2 + y^2 \pm \frac{8k}{3\sqrt{3}} x = 0,$$

ou

$$\left(x \pm \frac{4k}{3\sqrt{3}}\right)^2 + y^2 = \frac{16k^2}{27},$$

équation d'un cercle qui a pour rayon $\frac{4}{3\sqrt{3}} k$; on aura donc

$$k = \frac{3}{4} \sqrt{3}\, R,$$

R étant le rayon du cercle donné.

Cette analyse montre que le cercle ne peut être donné à volonté, comme l'annonce Stewart, puisqu'il passe par le point de rencontre des droites L_1, L_2 et a son centre sur la bissectrice de leur angle. On voit aussi que les deux droites inconnues, quand elles sont réelles, se réduisent à une seule, qui est l'axe des y.

Proposition LXIV. *Étant donné un cercle et deux droites L_1, L_2 formant entre elles un angle double de celui du triangle équilatéral.*

on peut trouver un point C *tel, que menant par ce point une droite quelconque qui rencontre la circonférence en* D, E, *et abaissant sur* L_1, L_2 *les perpendiculaires* DP_1, DP_2, EQ_1, EQ_2, *on aura la relation*

$$\frac{\overline{DP}_1^3+\overline{DP}_2^3}{\overline{EQ}_1^3+\overline{EQ}_2^3}=\frac{\overline{CD}^2}{\overline{CE}^2}.$$

Prenons les mêmes axes que dans la solution précédente, et nommons p, q; ξ, η; x', y'; x'', y'' les coordonnées du centre du cercle, et des points C, D, E; cette relation devient

$$\frac{x'(x'^2+y'^2)}{x''(x''^2+y''^2)}=\frac{(x'-\xi)^2+(y'-\eta)^2}{(x''-\xi)^2+(y''-\eta)^2}.$$

Éliminant x', y', x'', y'' au moyen des équations

$$(x'-p)^2+(y'-q)^2=R^2,\quad (x''-p)^2+(y''-q)^2=R^2,$$
$$y'-\eta=\alpha(x'-\xi),\qquad y''-\eta=\alpha(x''-\xi),$$

où α est un coefficient variable, il vient une équation qui se partage en deux autres, savoir,

$$[(\xi-p)^2+(\eta-q)^2-R^2]^2-(3\xi^2+2\eta^2)[(\xi-p)^2+(\eta-q)^2-R^2] + 2\xi(\xi-p)(\xi^2+\eta^2)=0,$$
$$\eta\xi[(\xi-p)^2+(\eta-q)^2-R^2]-\xi(\eta-q)(\xi^2+\eta^2)=0,$$

ce qui suffit pour déterminer ξ, η. On remarque qu'une solution est donnée par l'hypothèse $\xi=0$, à laquelle correspondent les valeurs de η qui satisfont aux équations

$$p^2+q^2-R^2=2q\eta,\quad p^2+(\eta-q)^2-R^2=0.$$

A la suite de ces propositions relatives au cercle, qui sont les dernières de son livre, Stewart dit qu'on en trouverait d'analogues pour les sections coniques. Suivant lui, elles auraient facilité la solution de certains problèmes. On voudrait, par exemple, trouver sur une circonférence de cercle un point tel, que le produit de ses distances à deux points fixes soit égal à une quantité donnée. La solution consiste simplement à construire une cassinoïde dont les points d'intersection avec la circonférence sont les points cherchés. Stewart fait remarquer qu'on résoudrait aussi ce problème en traçant une ellipse; car, d'après la proposition LXI, on peut déterminer deux droites, telles que le carré du produit des distances d'un point quelconque de la circonférence aux points donnés soit égal à une constante multipliée par la somme des carrés des perpendiculaires abaissées du même point sur ces droites. On connaîtra donc la somme des carrés des distances du point cherché aux droites dont il s'agit, c'est-à-dire une ellipse sur laquelle il doit se trouver.

Addition relative aux équations du n° 5.

Ces équations peuvent se résoudre au moyen de la transformation que voici :

L'équation, trouvée au n° **4**,

$$\eta_1^2 = \frac{3}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}k_i b_i^2 \frac{2\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}k_i a_i^2 - 3\xi_1^2}{3\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}k_i a_i^2},$$

étant mise sous la forme

$$\frac{\xi_1^2}{\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}k_i a_i^2} + \frac{\eta_1^2}{\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}k_i b_i^2} = 1,$$

on voit que le point dont les coordonnées sont ξ_1, η_1 se trouve sur une section conique ayant pour centre l'origine des coordonnées, et pour demi-axes principaux $\sqrt{\frac{2}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}k_i a_i^2}$, $\sqrt{\frac{2}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}k_i b_i^2}$. Et comme une semblable relation existe entre les coordonnées ξ_2, η_2, ξ_3, η_3 des deux autres points inconnus, on en conclut que ces trois points se trouvent sur cette conique, laquelle peut être une ellipse, une hyperbole ou même une courbe imaginaire, selon la combinaison de signes présentée par les quantités $\mathrm{S}k_i a_i^2$, $\mathrm{S}k_i b_i^2$. Puisque l'on a supposé que $\mathrm{S}k_i$ est positif, on aura une ellipse quand l'une et l'autre seront positives. C'est d'ailleurs le seul cas où les points cherchés soient réels, attendu que les sommes $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$, $\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2$ ne sauraient être alors négatives. L'origine des coordonnées est leur centre de gravité, propriété qu'expriment les équations (1) et (2). On sait que les rayons menés de ce point aux points inconnus divisent l'aire de l'ellipse en trois secteurs équivalents. D'après cette remarque, si nous appelons ω un angle auxiliaire, nous pourrons faire :

$$\xi_1 = \sqrt{\frac{2}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}k_i a_i^2}\cos\omega, \qquad \eta_1 = \sqrt{\frac{2}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}k_i b_i^2}\sin\omega,$$

$$\xi_2 = \sqrt{\frac{2}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}k_i a_i^2}\cos\left(\omega+\frac{2\pi}{3}\right), \quad \eta_2 = \sqrt{\frac{2}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}k_i b_i^2}\sin\left(\omega+\frac{2\pi}{3}\right).$$

$$\xi_3 = \sqrt{\frac{2}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}k_i a_i^2}\cos\left(\omega+\frac{4\pi}{3}\right), \quad \eta_3 = \sqrt{\frac{2}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}k_i b_i^2}\sin\left(\omega+\frac{4\pi}{3}\right).$$

Ces expressions, substituées dans les équations (1), (2), (3), (4) et (5), y satisfont. Les trois autres équations (6), (7) et (8) deviennent, toutes réductions faites,

$$\frac{3}{4}\sqrt{\frac{2}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}k_i a_i^2}\left(\frac{2}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}k_i a_i^2 - \frac{2}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}k_i b_i^2\right)\cos 3\omega = \frac{3}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}k_i a_i(a_i^2+b_i^2),$$

$$\frac{3}{4}\sqrt{\frac{2}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}k_i b_i^2}\left(\frac{2}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}k_i a_i^2 - \frac{2}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}k_i b_i^2\right)\sin 3\omega = \frac{3}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}k_i b_i(a_i^2+b_i^2),$$

$$\frac{3}{2}(\mathrm{S}k_i a_i^2)^2 + \mathrm{S}k_i a_i^2 - \mathrm{S}k_i b_i^2 + \frac{3}{2}(\mathrm{S}k_i b_i^2)^2 = \mathrm{S}k_i.\mathrm{S}k_i(a_i+b_i^2)^2.$$

La dernière de ces équations n'est autre chose que la condition trouvée au n° 4, sous une forme un peu différente. Les deux autres donnent

$$\operatorname{tang} 3\omega = \frac{\dfrac{\mathrm{S}k_i b_i(a_i^2+b_i^2)}{\sqrt{\mathrm{S}k_i b_i^2}}}{\dfrac{\mathrm{S}k_i a_i(a_i^2+b_i^2)}{\sqrt{\mathrm{S}k_i a_i^2}}}.$$

Soit ω_1 la plus petite valeur de ω; on aura, pour l'ensemble des solutions propres à faire connaître la position de l'un quelconque des points cherchés,

$$\omega_1, \quad \omega_1+\frac{\pi}{3}, \quad \omega_1-\frac{\pi}{3},$$

et, pour déterminer les deux autres,

$$\omega_1 + \frac{2\pi}{3},\quad \omega_1 + \frac{3\pi}{3},\quad \omega_1 + \frac{\pi}{3},$$

$$\omega_1 + \frac{4\pi}{3},\quad \omega_1 + \frac{5\pi}{3},\quad \omega_1 + \pi.$$

Indication de quelques auteurs qui se sont occupés des théorèmes généraux de Stewart.

Pendant que l'on imprimait l'analyse qui précède, j'ai reconnu que les théorèmes de Stewart avaient été déjà l'objet de quelques recherches. Le volume des *Transactions d'Édimbourg* pour 1805 contient, sur ce sujet, un Mémoire de M. Glenie. Cet auteur ne s'est occupé que des systèmes de points et de droites qui forment des polygones réguliers. On trouve, dans le tome V des *Annales* de M. Gergonne (1814 et 1815), les énoncés d'un grand nombre de théorèmes sur les polygones réguliers, par M. Français; un certain nombre se confondent avec ceux de Stewart. Les démonstrations de M. Français n'ont d'ailleurs pas été données.

Le *Journal de Mathématiques de Dublin et Cambridge* a publié en 1841 (1re série, 1841, tome II, page 271) un article de M. R. Leslie Ellis, où l'on trouve la démonstration de ce théorème dont je me suis servi :

Si $f(\varphi)$ est une fonction entière du sinus et du cosinus de l'angle φ, la somme

$$f(\varphi) + f\left(\varphi + \frac{2\pi}{m}\right) + f\left(\varphi + \frac{4\pi}{m}\right) + \ldots + f\left(\varphi + 2(m-1)\frac{\pi}{m}\right)$$

est indépendante de φ quand le degré de la fonction est inférieur à m.

M. R. Leslie Ellis ne le fait connaître, en ce qui concerne Stewart, que comme propre à démontrer analytiquement les propositions établies par M. Glenie.

Enfin on trouve dans le même Recueil (2e série, tome I, page 229), un article de M. T. S. Davies, où l'on démontre les propositions VII et VIII de Stewart.

Tableau de correspondance entre les numéros des propositions contenues dans l'ouvrage de Stewart et ceux de l'analyse.

NUMÉROS des propositions de Stewart.	NUMÉROS correspondants de l'analyse.	NUMÉROS des propositions de Stewart.	NUMÉROS correspondants de l'analyse.
I	30	XXXIII	4
II	*ibid.*	XXXIV	18
III	21	XXXV	17
IV	3	XXXVI	*ibid.*
V	25	XXXVII	28
Idem.	28	XXXVIII	*ibid.*
VI	30	XXXIX	*ibid.*
VII	3	XL	*ibid.*
VIII	25	XLI	8
IX	3	XLII	*ibid.*
X	*ibid.*	XLIII	1
XI	2	XLIV	*ibid.*
XII	*ibid.*	XLV	18
XIII	11	XLVI	9
XIV	18	XLVII	*ibid.*
XV	16	XLVIII	20
XVI	25	XLIX	*ibid.*
XVII	22	L	*ibid.*
XVIII	11	LI	*ibid.*
XIX	16	LII	*ibid.*
XX	25	LIII	*ibid.*
XXI	22	LIV	29
XXII	28	LV	*ibid.*
XXIII	*ibid.*	LVI	*ibid.*
XXIV	26	LVII	*ibid.*
XXV	*ibid.*	LVIII	*ibid.*
XXVI	6	LIX	*ibid.*
XXVII	*ibid.*	LX	31
XXVIII	28	LXI	*ibid.*
XXIX	*ibid.*	LXII	*ibid.*
XXX	19	LXIII	*ibid.*
XXXI	*ibid.*	LXIV	*ibid.*
XXXII	4	LXV	*ibid.*