JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

A. CAYLEY

Sur la généralisation d'un théorème de M. Jellett, qui se rapporte aux attractions

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 13 (1848), p. 264-268.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1848_1_13__264_0>

SUR LA GÉNÉRALISATION D'UN THÉORÈME DE M. JELLETT, QUI SE RAPPORTE AUX ATTRACTIONS;

PAR M. A. CAYLEY.

Les formules qu'a données M. Jellett pour exprimer les attractions d'un ellipsoïde au moyen de l'expression de la surface de l'ellipsoïde réciproque (tome XI de ce Journal, page 92) peuvent s'étendre au cas d'un nombre quelconque de variables.

Pour démontrer cela, je pars de cette formule

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\int \frac{\varphi\left(\frac{x^2}{f^2}+\frac{y^2}{g^2}\cdots\right)dx\,dy\ldots}{[(a-x)^2+(b-y)^2\ldots+u^2]^{\frac{1}{2}n+q}} \quad \left(\text{limites } \frac{x^2}{f^2}+\frac{y^2}{g^2}\cdots=1\right)\\ &= \frac{fg\ldots\pi^{\frac{1}{2}n}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}n+q\right)}\int_{\eta}^{\infty}\frac{S\,s^{-q-1}\,ds}{\sqrt{(s+f^2)(s+g^2)\ldots}},\end{aligned}\right.$$

dans laquelle n est le nombre des variables $x, y,\ldots$, et où

$$(2)\qquad S=\frac{(1-\sigma)^{-q}}{\Gamma(-q)}\int_0^1 t^{-q-1}\,\varphi[\sigma+t(1-\sigma)]\,dt,$$

$$\sigma=\frac{a^2}{s+f^2}+\frac{b^2}{s+g^2}\cdots+\frac{u^2}{s},$$

$$1=\frac{a^2}{\eta+f^2}+\frac{b^2}{\eta+g^2}\cdots+\frac{u^2}{\eta},$$

formule due à M. Boole qui l'a démontrée sous une forme un peu différente (*Irish Transactions,* tome XXI). La modification que j'y ai introduite se trouve démontrée dans le *Cambridge and Dublin Mathematical Journal,* tome II, page 223 [*].

On déduit de là, en écrivant fx, gy,... au lieu de $x, y,\ldots$, en réduisant à zéro les quantités a, b,..., u (ce qui donne aussi $\eta=0$), et en

[*] Cette formule peut d'ailleurs se déduire comme cas particulier de la formule très-générale de M. Boole que M. Cayley a démontrée dans le cahier précédent. (J. L.)

donnant une forme convenable à la fonction φ,

$$(3)\qquad \int \frac{(x^2+y^2\ldots)^{\frac{5}{2}-\frac{1}{2}n}\,dx\,dy\ldots}{(f^2x^2+g^2y^2\ldots)^2} = \frac{2\pi^{\frac{1}{2}n}}{\Gamma(\frac{1}{2}n-2)}\int_0^\infty \frac{s^{\frac{1}{2}n-3}\,ds}{\sqrt{(s+f^2)(s+g^2)\ldots}}$$

(les limites de l'intégrale au premier membre de cette équation étant données par $x^2+y^2\ldots=1$).

Donc, en écrivant

$$\Sigma = f^2g^2\ldots\int \frac{(x^2+y^2\ldots)^{\frac{5}{2}-\frac{1}{2}n}\,dx\,dy\ldots}{(f^2x^2+g^2y^2\ldots)^2},$$

on aura

$$(4)\qquad \Sigma = \frac{2\pi^{\frac{1}{2}n}f^2g^2\ldots}{\Gamma(\frac{1}{2}n-2)}\int_0^\infty \frac{s^{\frac{1}{2}n-3}\,ds}{\sqrt{(s+f^2)(s+g^2)\ldots}}.$$

Soit Σ' ce que devient Σ en écrivant $\frac{1}{f}, \frac{1}{g},\ldots$ au lieu de $f, g,\ldots$; en écrivant en même temps $\frac{1}{s}$ au lieu de s, on obtient

$$(5)\qquad \Sigma' = \frac{2\pi^{\frac{1}{2}n}}{\Gamma(\frac{1}{2}n-2)}\frac{1}{fg\ldots}\int_0^\infty \frac{s\,ds}{\sqrt{(s+f^2)(s+g^2)\ldots}}.$$

Et de là, en écrivant

$$(6)\qquad \frac{1}{f^2}\frac{d}{df}\Sigma' f = F,\quad \frac{1}{g^2}\frac{d}{dg}\Sigma' g = G,\ldots,$$

on déduit

$$(7)\qquad F = \frac{-2\pi^{\frac{1}{2}n}}{\Gamma(\frac{1}{2}n-2)}\frac{1}{fg\ldots}\int_0^\infty \frac{s}{s+f^2}\frac{ds}{\sqrt{(s+f^2)(s+g^2)\ldots}},\ \text{etc.}$$

Cela étant, remarquons que l'intégrale

$$(8)\qquad \int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{(s+f^2)(s+g^2)\ldots}}$$

est fonction homogène de l'ordre $(2-n)$ par rapport aux quantités f, g,... (en effet, cela se voit tout de suite en faisant $s=f^2\theta$). Donc

$$\int_0^\infty \left(\frac{-f^2}{s+f^2}-\frac{g^2}{s+g^2}\ldots\right)\frac{ds}{\sqrt{(s+f^2)(s+g^2)\ldots}}$$
$$=(2-n)\int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{(s+f^2)(s+g^2)\ldots}},$$

ou, en écrivant $\frac{s}{s+f^2}-1$, etc., au lieu de $\frac{-f^2}{s+f^2}$, etc.,

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^\infty \left(\frac{s}{s+f^2}+\frac{s}{s+g^2}+\ldots\right)\frac{ds}{\sqrt{(s+f^2)(s+g^2)\ldots}} \\ &= 2\int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{(s+f^2)(s+g^2)\ldots}}, \end{aligned}\right.$$

et de là aussi

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^\infty \left(\frac{-s}{s+f^2}+\frac{s}{s+g^2}+\ldots\right)\frac{ds}{\sqrt{(s+f^2)(s+g^2)\ldots}} \\ &= 2f^2\int_0^\infty \frac{1}{s+f^2}\frac{ds}{\sqrt{(s+f^2)(s+g^2)\ldots}}, \text{ etc.} \end{aligned}\right.$$

Donc enfin

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^\infty \left(1-\frac{a^2}{s+f^2}\ldots\right)\frac{ds}{\sqrt{(s+f^2)(s+g^2)\ldots}} \\ &= \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{s}{s+f^2}+\frac{s}{s+g^2}+\ldots\right) \\ &-\frac{a^2}{f^2}\left(\frac{-s}{s+f^2}+\frac{s}{s+g^2}+\ldots\right) \\ &-\frac{b^2}{g^2}\left(\frac{s}{s+f^2}-\frac{s}{s+g^2}\ldots\right)-\ldots \end{aligned}\right\}\frac{ds}{\sqrt{(s+f^2)(s+g^2)\ldots}}, \end{aligned}\right.$$

c'est-à-dire

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^\infty \left(1-\frac{a^2}{s+f^2}-\frac{b^2}{s+g^2}\ldots\right)\frac{ds}{\sqrt{(s+f^2)(s+g^2)\ldots}} \\ &= -\frac{\Gamma(\frac{1}{2}n-2).fg\ldots}{4\pi^{\frac{1}{2}n}}\left\{\begin{aligned} &(\mathrm{F}+\mathrm{G}+\ldots)-\frac{a^2}{f^2}(-\mathrm{F}+\mathrm{G}+\ldots) \\ &-\frac{b^2}{g^2}(\mathrm{F}-\mathrm{G}+\ldots)-\ldots \end{aligned}\right\}. \end{aligned}\right.$$

En particularisant d'une manière convenable la formule (1), on obtient, pour le cas de $\frac{a^2}{f^2}+\frac{b^2}{g^2}\ldots > 1$, cette formule connue

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{V} &= \int \frac{dx\,dy\ldots}{[(a-x)^2+(b-y)^2\ldots]^{\frac{1}{2}n-1}} \\ &= \frac{\pi^{\frac{1}{2}n}fg\ldots}{\Gamma(\frac{1}{2}n-1)}\int_0^\infty \left(1-\frac{a^2}{s+f^2}-\ldots\right)\frac{ds}{\sqrt{(s+f^2)\ldots}} \end{aligned}\right.$$

(l'équation des limites étant, comme auparavant, $\frac{x^2}{f^2}+\frac{y^2}{g^2}+\ldots=1$).

Et de là, vu la formule (12), résulte

$$(14)\quad V = -\frac{f^2g^2\ldots}{2(n-2)}\left[(F+G\ldots) - \frac{a^2}{f^2}(-F+G+\ldots) - \frac{b^2}{g^2}(F-G+\ldots)\ldots\right].$$

L'expression de Σ, en écrivant $r\cos\alpha$, $r\cos\beta,\ldots$ au lieu de x, $y,\ldots$, remplaçant $dx\,dy\ldots$ par $r^{n-1}\,dr\,dS$ et intégrant depuis $r=0$ jusqu'à $r=1$, se réduit à

$$(15)\qquad \Sigma = f^2g^2\ldots\int \frac{dS}{(f^2\cos^2\alpha + g^2\cos^2\beta + \ldots)^2},$$

de sorte qu'au cas de $n=3$ cette fonction se réduit à l'expression qu'a donnée M. Jellett de la surface d'un ellipsoïde. Donc, en se rappelant que les attractions sont représentées par $\frac{dV}{da}, \frac{dV}{db}, \frac{dV}{dc}$, on voit que l'équation (14) équivaut, pour ce cas, aux formules de M. Jellett.

Remarquons qu'en transformant l'intégrale (4) de la même manière dont nous avons transformé l'intégrale (8), on obtient

$$(16)\quad \Sigma = \frac{\pi^{\frac{1}{2}n}f^2g^2\ldots}{\Gamma\left(\frac{1}{2}n-1\right)}\int_0^\infty \left(\frac{1}{s+f^2} + \frac{1}{s+g^2}\ldots\right)\frac{s^{\frac{1}{2}n-2}\,ds}{\sqrt{(s+f^2)(s+g^2)\ldots}},$$

ce qui donne pour $n=3$ cette expression très-simple de la surface de l'ellipsoïde aux demi-axes f, g, h,

$$(17)\quad \Sigma = \pi f^2g^2h^2\int_0^\infty \left(\frac{1}{s+f^2} + \frac{1}{s+g^2} + \frac{1}{s+h^2}\right)\frac{s^{-\frac{1}{2}}\,ds}{\sqrt{(s+f^2)(s+g^2)(s+h^2)}},$$

formule qui se vérifie tout de suite au cas de $f=g=h$.

L'expression encore plus simple que donne l'équation (4), savoir,

$$(18)\qquad \Sigma = -\pi f^2g^2h^2\int_0^\infty \frac{s^{-\frac{3}{2}}\,ds}{\sqrt{(s+f^2)(s+g^2)(s+h^2)}},$$

n'est pas exempte de difficulté à cause de la valeur apparemment infinie du second membre de l'équation.

Au cas d'une sphère, cela se réduit à

$$\Sigma = -\pi f^2\int_0^\infty \frac{s^{-\frac{3}{2}}\,ds}{(1+s)^{\frac{3}{2}}},$$

ce qui serait, en effet, exact si la formule

$$\int_0^\infty \frac{s^{m-1}\,ds}{(1+s)^{m+n}} = \frac{\Gamma m\,\Gamma n}{\Gamma(m+n)}$$

subsistait pour les valeurs négatives de m. Cela nous apprend que les intégrales de la forme

$$(19) \qquad \int_0^\infty \frac{s^{-q-1}\,ds}{\sqrt{(s+f^2)(s+g^2)\ldots}}$$

ne sont pas à rejeter au cas des valeurs positives de q; il est même facile, en répétant continuellement le procédé de réduction que nous venons d'employer, de présenter ces intégrales sous une forme où il n'y ait plus de terme infini. En m'aidant de l'analogie de quelques formules qui se trouvent dans mon Mémoire *Sur quelques formules du calcul intégral* (tome XI de ce Journal, page 231), je crois même pouvoir avancer que cette intégrale doit se remplacer par

$$(20) \qquad \frac{-1}{2\sin q\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(k+si)^{-q-1}\,ds}{\sqrt{(k+si+f^2)(k+si+g^2)\ldots}}$$

où, comme à l'ordinaire, $i=\sqrt{-1}$ et où k dénote une quantité quelconque dont la partie réelle ne s'évanouit pas. Mais je renvoie cette discussion à une autre occasion.