JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

V. PUISEUX

Du mouvement d'un solide de révolution posé sur un plan horizontal

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 13 (1848), p. 249-256.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1848_1_13__249_0>

DU MOUVEMENT D'UN SOLIDE DE RÉVOLUTION

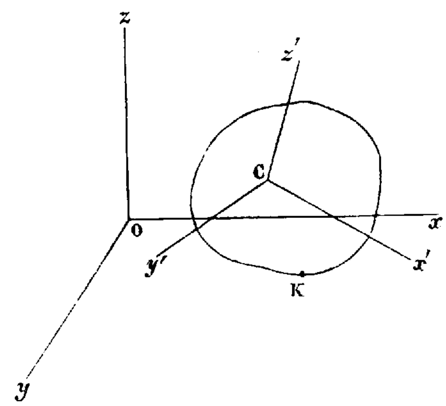
POSÉ SUR UN PLAN HORIZONTAL;

PAR M. V. PUISEUX.

Imaginons qu'un solide de révolution homogène et pesant soit posé sur un plan horizontal, et qu'en même temps on lui donne une impulsion quelconque. En général, l'angle compris entre l'axe de figure et la verticale variera d'une quantité finie dans le cours du mouvement; mais quelle que soit la position primitive du corps, si on lui imprime autour de son axe une vitesse de rotation suffisamment grande, l'angle dont on vient de parler restera toujours aussi peu différent qu'on voudra de sa valeur initiale (on fait abstraction du frottement contre le plan et de la résistance de l'air).

La démonstration de ce théorème fait l'objet de cet article.

Considérons d'abord un corps de forme quelconque posé sur un plan horizontal que nous prendrons pour plan des x, y, et dirigeons l'axe des z en sens contraire de la pesanteur. Soient C le centre de



gravité du corps, K le point par où il touche le plan des x, y. Si nous désignons sa masse par M, la résultante des actions de la pesanteur sera une force verticale Mg appliquée au point C; d'un autre côté, la résistance du plan sera une force verticale N, dirigée en sens contraire. Si donc nous appelons ξ, η, ζ les trois coordonnées du centre de gravité, nous aurons

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2\eta}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2\zeta}{dt^2} = N - Mg. \tag{1}$$

Soient Cx', Cy', Cz' les trois axes principaux du corps ; nommons p, q, r les vitesses de rotation à l'époque t autour de chacun d'eux, A, B, C les moments principaux d'inertie. Désignons par φ et ψ les angles que fait avec Ox et Cz' la trace du plan C$x'y'$ sur le plan Oxy, et par θ l'angle des deux axes Cz', Oz. Soient a'', b'', c'' les cosinus des angles que Cx', Cy', Cz' font avec Oz, et enfin appelons α, β, γ les coordonnées du point K par rapport aux axes Cx', Cy', Cz'.

On aura les équations connues :

$$a'' = \sin\psi \sin\theta, \quad b'' = \cos\psi \sin\theta, \quad c'' = \cos\theta; \tag{2}$$

$$\left\{\begin{aligned} pdt &= d\varphi \sin\psi \sin\theta + d\theta \cos\psi, \\ qdt &= d\varphi \cos\psi \sin\theta - d\theta \sin\psi, \\ rdt &= d\psi + d\varphi \cos\theta; \end{aligned}\right. \tag{3}$$

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{A}dp + (\mathrm{C} - \mathrm{B})\, qrdt &= \mathrm{N}(\beta c'' - \gamma b'')\, dt, \\ \mathrm{B}dq + (\mathrm{A} - \mathrm{C})\, prdt &= \mathrm{N}(\gamma a'' - \alpha c'')\, dt, \\ \mathrm{C}dr + (\mathrm{B} - \mathrm{A})\, pqdt &= \mathrm{N}(\alpha b'' - \beta a'')\, dt. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Comme on a, pour le point K, $z = 0$, il en résulte, en vertu des formules de transformation des coordonnées,

$$\zeta + a''\alpha + b''\beta + c''\gamma = 0. \tag{5}$$

Soit $\mathrm{L} = 0$ l'équation entre α, β, γ qui représente la surface du corps rapportée aux axes principaux; les cosinus des angles que la normale au point K fait avec ces axes sont proportionnels à $\frac{d\mathrm{L}}{d\alpha}$, $\frac{d\mathrm{L}}{d\beta}$, $\frac{d\mathrm{L}}{d\gamma}$, et comme cette normale est parallèle à Oz, on en conclut

$$\frac{1}{a''}\frac{d\mathrm{L}}{d\alpha} = \frac{1}{b''}\frac{d\mathrm{L}}{d\beta} = \frac{1}{c''}\frac{d\mathrm{L}}{d\gamma}. \tag{6}$$

Au moyen de l'équation $L = 0$ et des équations (2) et (6), on pourra chasser a'', b'', c'', α, β, γ dans les équations (1), (3), (4) et (5). On aura ainsi dix équations différentielles pour déterminer en fonction du temps les dix variables ξ, ζ, η, φ, ψ, θ, p, q, r, N, et il est facile de s'assurer que les valeurs de ces variables devront renfermer dix constantes arbitraires.

On peut obtenir comme il suit deux intégrales de ces équations différentielles. Ajoutons les équations (4), après les avoir multipliées respectivement par p, q, r; il viendra

$$\begin{aligned} &\mathrm{A}pdp + \mathrm{B}qdq + \mathrm{C}rdr \\ &= \mathrm{N}\left[\alpha(rb'' - qc'') + \beta(pc'' - ra'') + \gamma(qa'' - pb'')\right] dt; \end{aligned}$$

mais des équations (2) et (3) on conclut

$$(7) \quad (rb'' - qc'')\,dt = da'', \quad (pc'' - ra'')\,dt = db'', \quad (qa^2 - pb'')\,dt = dc'';$$

on a donc

$$\mathrm{A}pdp + \mathrm{B}qdq + \mathrm{C}rdr = \mathrm{N}(\alpha da'' + \beta db'' + \gamma dc'').$$

Mais l'équation (5) nous donne

$$d\zeta + \alpha da'' + \beta db'' + \gamma dc'' + a''d\alpha + b''d\beta + c''d\gamma = 0;$$

or, à cause de l'équation $L = 0$, on a

$$\frac{dL}{d\alpha}\,d\alpha + \frac{dL}{d\beta}\,d\beta + \frac{dL}{d\gamma}\,d\gamma = 0,$$

ou bien, en vertu des équations (6),

$$a''d\alpha + b''d\beta + c''d\gamma = 0;$$

par conséquent

$$d\zeta + \alpha da'' + \beta db'' + \gamma dc'' = 0,$$

ou bien

$$\alpha da'' + \beta db'' + \gamma dc'' = -\,d\zeta.$$

De plus, nous tirons de la troisième équation (1),

$$\mathrm{N} = \mathrm{M}g + \mathrm{M}\,\frac{d^2\zeta}{dt^2}:$$

nous avons donc enfin

$$A p dp + B q dq + C r dr + M g d\zeta + M \frac{d\zeta\, d^2\zeta}{dt^2} = 0,$$

d'où, en intégrant,

$$(8) \qquad A p^2 + B q^2 + C r^2 + 2 M g \zeta + M \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2 = h,$$

h étant une constante.

Ajoutons encore les équations (4), après les avoir multipliées respectivement par a'', b'', c''; il viendra

$$\begin{aligned} A[a'' dp + p(rb'' - qc'')dt] + B[b'' dq + q(pc'' - ra'')dt] \\ + C[c'' dr + r(qa'' - pb'')dt] = 0, \end{aligned}$$

ou bien, en vertu des formules (7),

$$A(a'' dp + p da'') + B(b'' dq + q db'') + C(c'' dr + r dc'') = 0.$$

Cette équation s'intègre immédiatement et nous donne

$$A p a'' + B q b'' + C r c'' = l,$$

l étant une constante, ou bien

$$(9) \qquad A p \sin\psi \sin\theta + B q \cos\psi \sin\theta + C r \cos\theta = l.$$

(Ces deux intégrales (8) et (9) sont données par Poisson dans son *Cours de Mécanique,* tome II, 2e édition.)

Considérons maintenant en particulier le cas d'un solide de révolution homogène; l'un des axes principaux, Cz' par exemple, coïncidera avec l'axe de figure, et l'on aura $B = A$. De plus, L sera une fonction de $\alpha^2 + \beta^2$ et de γ, de sorte qu'on aura

$$\frac{1}{\alpha}\frac{dL}{d\alpha} = \frac{1}{\beta}\frac{dL}{d\beta};$$

de cette équation, jointe aux relations (6), on conclut

$$\alpha b'' - \beta a'' = 0,$$

ce qu'on pouvait trouver encore en observant que la force N normale à la surface du corps rencontre l'axe de figure Cz', et qu'ainsi son moment par rapport à cet axe est zéro.

La troisième équation (4) se réduit donc à

$$\frac{dr}{dt} = 0, \quad \text{d'où} \quad r = n,$$

n étant une constante. Les équations (8) et (9) deviennent alors

$$(10) \qquad A(p^2 + q^2) + 2Mg\zeta + M\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2 = h - Cn^2 = k,$$

$$(11) \quad A(p \sin\psi + q\cos\psi)\sin\theta + Cn(\cos\theta - \cos\theta_0) = l - Cn\cos\theta_0 = \lambda,$$

θ_0 désignant la valeur de θ pour $t = 0$, k et λ des constantes. Si l'on y remplace p et q par leurs valeurs tirées des formules (3), il vient

$$A\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \sin^2\theta + A\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + 2Mg\zeta + M\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2 = k,$$

$$A\frac{d\varphi}{dt}\sin^2\theta + Cn(\cos\theta - \cos\theta_0) = \lambda;$$

d'où, en éliminant $\frac{d\varphi}{dt}$,

$$(12) \quad A\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + M\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2 = k - 2Mg\zeta - \frac{1}{A\sin\theta^2}[\lambda - Cn(\cos\theta - \cos\theta_0)]^2.$$

Avant de conclure de cette équation le théorème à démontrer, il y a quelques remarques à faire. Représentons par φ_0, ψ_0, p_0, etc., les valeurs initiales des variables φ, ψ, p, etc. : je dis qu'on peut se donner arbitrairement φ_0, ψ_0, θ_0, p_0, q_0, r_0 ou n, mais qu'alors ζ_0 et $\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)_0$ sont déterminés. En effet, les quantités φ_0, ψ_0, θ_0 fixent la position du corps autour de son centre de gravité; mais il faut qu'il soit tangent au plan xy : cette condition détermine ζ_0, et même il est aisé de voir que ζ_0 ne dépend que de θ_0. Ensuite, les valeurs de p_0, q_0, n, jointes à celles de φ_0, ψ_0, θ_0, déterminent le mouvement du corps autour de son centre de gravité pendant le premier instant dt; et pendant ce même instant le déplacement de ce centre dans le sens vertical devra être tel, qu'à l'époque dt le corps soit encore tangent au plan xy : cette condition détermine la valeur de $\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)_0$. Il faut même observer que $\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)_0$ ne dépendra pas de n; car, le corps étant de révolution, la grandeur de sa rotation autour de l'axe de figure n'aura aucune influence sur sa position à la fin de l'instant dt.

Ainsi on peut prendre pour six des constantes arbitraires les quantités $\varphi_0, \psi_0, \theta_0, p_0, q_0, n$, et alors ζ_0 et $\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)_0$ deviennent des fonctions des cinq premières, mais sont indépendantes de n. Il est clair d'ailleurs qu'on peut encore se donner à volonté $\xi_0, \eta_0, \left(\frac{d\xi}{dt}\right)_0, \left(\frac{d\eta}{dt}\right)_0$, ce qui complète le nombre des dix constantes arbitraires que comporte la question.

On devra donc pouvoir exprimer au moyen de ces dix quantités toute autre constante introduite par l'intégration et, en particulier, celles désignées ci-dessus par k et λ; mais ce qu'il importe de remarquer, c'est que les expressions de k et de λ ne contiendront que $\varphi_0, \psi_0, \theta_0, p_0, q_0$, et, par conséquent, ne dépendront pas de n. Pour nous en assurer, faisons $t = 0$ dans les équations (10) et (11); il viendra

$$k = \mathrm{A}(p_0^2 + q_0^2) + 2\mathrm{M}g\zeta_0 + \mathrm{M}\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)_0^2,$$
$$\lambda = \mathrm{A}(p_0 \sin\psi_0 + q_0 \cos\psi_0)\sin\theta_0,$$

et comme ζ_0 et $\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)_0$ ne dépendent pas de n, il en sera de même des seconds membres de ces équations.

Cela établi, l'équation (12), dont le premier membre est essentiellement positif, nous montre qu'on aura pendant tout le mouvement

$$k - 2\mathrm{M}g\zeta - \frac{1}{\mathrm{A}\sin^2\theta}[\lambda - \mathrm{C}n(\cos\theta - \cos\theta_0)]^2 > 0,$$

ou bien

$$[\lambda - \mathrm{C}n(\cos\theta - \cos\theta_0)]^2 < \mathrm{A}(k - 2\mathrm{M}g\zeta)\sin^2\theta,$$

ou encore

$$\lambda - \mathrm{C}n(\cos\theta - \cos\theta_0) < \sqrt{\mathrm{A}(k - 2\mathrm{M}g\zeta)\sin^2\theta},$$
$$\lambda - \mathrm{C}n(\cos\theta - \cos\theta_0) > -\sqrt{\mathrm{A}(k - 2\mathrm{M}g\zeta)\sin^2\theta}.$$

Il en résulte, en supposant, pour fixer les idées, que n soit positif,

$$\cos\theta - \cos\theta_0 > \frac{\lambda - \sqrt{\mathrm{A}(k - 2\mathrm{M}g\zeta)\sin^2\theta}}{\mathrm{C}n},$$
$$\cos\theta - \cos\theta_0 < \frac{\lambda + \sqrt{\mathrm{A}(k - 2\mathrm{M}g\zeta)\sin^2\theta}}{\mathrm{C}n}.$$

Or, quelque grand que soit n, les autres constantes arbitraires restant les mêmes, les numérateurs des seconds membres de ces deux inégalités conserveront toujours des valeurs finies; car k et λ ne dépendent pas de n, et ζ reste compris entre le plus petit et le plus grand des rayons vecteurs menés du centre de gravité à la surface du corps. Par exemple, si nous appelons ρ le rayon minimum et λ' la valeur numérique de λ, les valeurs absolues des numérateurs dont il s'agit ne surpasseront jamais la limite

$$\lambda' + \sqrt{\mathrm{A}(k - 2\mathrm{M}g\rho)}.$$

On pourra donc prendre n assez grand pour que la différence $\cos\theta - \cos\theta_0$ soit toujours comprise entre deux fractions aussi voisines de zéro qu'on voudra, et, par conséquent, reste elle-même aussi petite qu'on voudra, ce qui revient à dire qu'en prenant n suffisamment grand, θ s'écartera aussi peu qu'on voudra de sa valeur initiale θ_0. C'est la proposition qu'il s'agissait de prouver.

Pour donner une application, supposons qu'à l'origine du mouvement l'axe de figure soit vertical et que R soit alors la distance du centre de gravité au plan xy : on a, dans ce cas,

$$\theta_0 = 0, \quad \zeta_0 = \mathrm{R}, \quad \alpha_0 = 0, \quad \beta_0 = 0, \quad \gamma_0 = -\mathrm{R};$$

de plus, l'équation

$$d\zeta = -\alpha da'' - \beta db'' - \gamma dc''$$

nous donne

$$\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)_0 = \mathrm{R}\left(\frac{dc''}{dt}\right)_0 = -\mathrm{R}\sin\theta_0\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_0 = 0\,;$$

il suit de là

$$k = \mathrm{A}(p_0^2 + q_0^2) + 2\mathrm{M}g\mathrm{R}, \quad \lambda = 0.$$

D'après les inégalités trouvées ci-dessus, on aura donc dans tout le mouvement, et en supposant, ce qui est permis, $\sin\theta$ positif,

$$1 - \cos\theta < \frac{\sin\theta\sqrt{\mathrm{A}^2(p_0^2 + q_0^2) + 2\mathrm{AM}g(\mathrm{R} - \zeta)}}{\mathrm{C}n},$$

ou bien

$$\operatorname{tang}\frac{\theta}{2} < \frac{\sqrt{\mathrm{A}^2(p_0^2 + q_0^2) + 2\mathrm{AM}g(\mathrm{R} - \zeta)}}{\mathrm{C}n}.$$

ou encore, en appelant comme ci-dessus ρ le plus petit rayon mené du centre de gravité à la surface,

$$\operatorname{tang}\frac{\theta}{2} < \frac{\sqrt{A^2(p_0^2+q_0^2)+2AMg(R-\rho)}}{Cn}.$$

Si donc on veut que l'axe qui était d'abord vertical ne fasse jamais avec sa direction primitive un angle plus grand qu'un angle donné ε, il suffira de remplir la condition

$$\frac{\sqrt{A^2(p_0^2+q_0^2)+2AMg(R-\rho)}}{Cn} < \operatorname{tang}\frac{\varepsilon}{2},$$

d'où

$$n > \frac{\sqrt{A^2(p_0^2+q_0^2)+2AMg(R-\rho)}}{C\operatorname{tang}\frac{\varepsilon}{2}}.$$

On sait qu'un ellipsoïde allongé est en équilibre instable lorsqu'il repose sur un plan horizontal par une des extrémités de son axe de figure, c'est-à-dire que, en général, il s'écartera d'une quantité finie de cette position, si on lui imprime une impulsion même très-petite. Mais, par ce qui précède, on voit que si, dans ce mouvement qu'on lui donne, la vitesse de rotation autour de l'axe de figure est suffisamment grande, le corps s'écartera aussi peu qu'on voudra de sa position primitive. En appelant $2a$ le diamètre de l'équateur et s le rapport de l'axe à ce diamètre, on trouvera que la condition précédente devient

$$n > \frac{\sqrt{a(1+s^2)[a(1+s^2)(p_0^2+q_0^2)+10g(s-1)]}}{2a\operatorname{tang}\frac{\varepsilon}{2}}.$$