JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. BERTRAND

Mémoire sur la théorie des phénomènes capillaires

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 13 (1848), p. 185-208.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1848_1_13__185_0>

MÉMOIRE

SUR LA THÉORIE DES PHÉNOMÈNES CAPILLAIRES;

PAR M. J. BERTRAND.

La théorie proposée par Laplace pour l'explication des phénomènes capillaires a été vivement critiquée par Poisson; les objections de ce célèbre géomètre l'ont conduit à proposer une hypothèse qui n'a pas été généralement adoptée, et qui d'ailleurs laisserait peut-être subsister encore bien des difficultés. On doit reconnaître cependant que ces objections ont quelque chose de fondé et qu'il y a une contradiction évidente dans la manière dont Laplace envisage la question. L'hypothèse d'un fluide incompressible dont les molécules disjointes agissent les unes sur les autres suivant une fonction de la distance est en effet, mathématiquement parlant, impossible. Mais il suffit que cette hypothèse, sans être rigoureusement exacte, se rapproche assez de la réalité pour que ses conséquences soient d'accord avec l'expérience. J'ajouterai, et il semble que cette observation si simple ait échappé à Poisson, que Laplace, malgré son hypothèse inexacte, sur l'incompressibilité des fluides, s'est proposé une question qui, au point de vue mathématique, n'a rien d'absurde. L'introduction de la force, qu'il appelle la pression et dont la valeur se détermine précisément de manière à ce qu'il n'y ait pas changement de volume, permet, en effet, de regarder le fluide comme incompressible. Il est bien vrai que, dans le fluide physique et compressible, cette pression ne peut être distinguée de la résultante des actions moléculaires et doit se calculer, comme Poisson l'a si souvent remarqué, au moyen de la fonction qui les représente. Mais, au point de vue abstrait auquel les géomètres se placent, cette fonction forme une force à part, de la nature de celles qu'on introduit si souvent en mécanique sous le nom de *forces de liaison*, et qui, dans chaque cas, peuvent donner lieu à des objections analogues, si l'on conteste le droit d'introduire dans l'énoncé d'une question les notions des corps rigides, des axes fixes, etc.; si, en un mot, on se refuse à remplacer une question de physique par une question abstraite analogue, mais non identique.

Le principe des vitesses virtuelles, appliqué à un système défini d'une manière quelconque, permet d'éviter cette difficulté apparente qui provient des forces de liaison, laquelle, dans la théorie des phénomènes capillaires, acquiert une nouvelle force par l'introduction des forces moléculaires qui les produisent en réalité et qu'on regarde cependant comme en étant complétement indépendantes. C'est sans doute pour cette raison que, dans son beau Mémoire sur les phénomènes capillaires, M. Gauss s'est attaché à prendre pour base unique de ses raisonnements le principe des vitesses virtuelles; mais, comme il le dit lui-même, cet illustre géomètre avait en même temps pour but de donner un exemple de l'application du calcul des variations à une question relative aux intégrales multiples: il a donc dû, pour exposer cette théorie d'une manière générale, rejeter les nombreuses simplifications géométriques qui auraient pu se présenter à lui. Le but que je me suis proposé dans ce Mémoire est précisément de faire connaître la méthode de M. Gauss et les simplifications dont elle est susceptible et qui la rendent, si je ne me fais pas illusion, la plus facile de celles qui ont été proposées jusqu'ici.

Après avoir donné une démonstration nouvelle des résultats obtenus par M. Gauss, je me suis efforcé d'appliquer sa méthode à des questions assez simples pour qu'on pût comparer l'expérience aux résultats fournis par l'analyse. Les théorèmes suivants, qui, si la théorie est exacte, sont *rigoureusement* vrais, me paraissent remplir cette condition :

1°. Si un tube capillaire est plongé dans un liquide et que la colonne du liquide soulevé soit séparée en plusieurs parties par des bulles d'air introduites artificiellement, la masse totale du liquide soulevé ne dépendra ni du nombre, ni du volume de ces bulles.

2°. Quand une colonne de liquide est suspendue dans un tube capillaire ouvert par les deux bouts et placé verticalement dans l'air libre, le volume total de cette colonne est *tout au plus* égal au produit du volume qui serait soulevé par le tube s'il était plongé dans un vase plein du même liquide par la somme $\left(1 + \frac{1}{\cos i}\right)$, i étant l'angle sous lequel la surface capillaire formée par ce liquide coupe les parois du vase.

3°. Si plusieurs liquides sont superposés dans un même tube capillaire et que ce tube plonge dans un vase de même nature que le liquide inférieur, la somme des poids des liquides soulevés ne dépend que de la nature du tube et de celle du liquide inférieur.

4°. En nommant V le volume d'une goutte de mercure, b la surface de la base de cette goutte, L le contour de cette base, et enfin h la hauteur à laquelle le liquide s'élèverait dans un vase très-large communiquant avec la goutte par un tube plein de mercure, on aura la relation

$$V = bh + \alpha^2 L \sin i,$$

α étant une constante, et i l'angle défini plus haut.

I.

En considérant un liquide comme composé de molécules matérielles $m, m', m'', \ldots$ qui agissent les unes sur les autres suivant une fonction de leur distance mutuelle et proportionnellement au produit de leurs masses, supposant ce liquide renfermé dans un tube fixe dont les différentes molécules ayant pour masse $M, M', M'', \ldots$ attirent $m, m', m'', \ldots$ suivant une autre fonction de la distance; si l'on adopte la notation (m, m') pour représenter les distances des points m et m', et qu'on représente par $mm'f(\overline{m, m'})$, $mMf(\overline{m, M})$ les forces qui s'exercent entre m, m', m, M, le principe des vitesses virtuelles nous apprend que, pour tous les déplacements qui laissent invariable le volume total, on doit avoir

$$(1)\quad 0 = \sum m \left\{ \begin{array}{l} -g\,dz - m'f(m, m')\,d(m, m') - m''f(m, m'')\,d(m, m'')\ldots \\ \qquad - MF(m, M)\,d(m, M) - M'F(m, M')\,d(m, M')\ldots \end{array} \right\},$$

les variations $d(m, m')$, $d(m, M)$ se rapportant au déplacement virtuel du point m.

Introduisons au lieu des fonctions f et F leurs intégrales φ et Φ, ou, en d'autres termes, posons

$$\int_r^\infty f(r)\,dr = -\varphi(r), \quad \int_r^\infty \mathrm{F}(r)\,dr = -\Phi(r),$$

l'équation (1) deviendra

$$\sum m \left\{ \begin{array}{l} -gdz + m'd\varphi(m, m') + m''d\varphi(m, m'') + \ldots \\ \quad + \mathrm{M}d\varphi(m, \mathrm{M}) + \mathrm{M}'d\varphi(m, \mathrm{M}') + \ldots \end{array} \right\},$$

les différentiations se rapportant encore au seul déplacement du point m. Mais il est évident que chacune de ces différentielles partielles pourra être réunie à une autre différentielle qui la complétera et formera avec elle la variation totale de la fonction. Ainsi, par exemple, en faisant la somme relative au point m, nous aurons le terme

$$mm'd\varphi(m, m'),$$

et, dans la somme relative à m',

$$m'md\varphi(m, m'),$$

la première variation se rapportant au déplacement de m, et la seconde à celui de m'; la somme de ces deux termes pourra s'écrire

$$mm'd\varphi(m, m'),$$

le signe d exprimant cette fois la variation totale de la fonction φ.

D'après cela, la somme des moments virtuels des forces qui sollicitent le système peut être considérée comme la variation totale de l'expression

$$\Omega = \sum m \left\{ \begin{array}{l} -gz + \frac{1}{2}m'\varphi(m, m') + \frac{1}{2}m''\varphi(m, m'') + \ldots \\ \quad + \mathrm{M}\Phi(m, \mathrm{M}) + \mathrm{M}'\Phi(m, \mathrm{M}') + \ldots \end{array} \right\};$$

les termes $\varphi(m, m')\,m'm$ sont divisés par 2, parce que chacun d'eux se reproduira évidemment deux fois dans la sommation.

Si nous supposons maintenant que les molécules $m, m', \ldots, \mathrm{M}, \mathrm{M}', \mathrm{M}'', \ldots$ forment deux masses continues, l'expression précédente deviendra, en appelant v le volume occupé par le liquide et ρ sa densité, v' et ρ' le volume et la densité de la matière solide qui forme le tube,

$$\Omega = -g\rho\int z\,dv + \frac{1}{2}\rho^2\int\int dv\,dv_1\,\varphi(dv\,dv_1) + \rho\rho'\int\int dv\,dv'\,\Phi(dv\,dv');$$

dv et dv_1 désignent ici deux éléments quelconques du volume liquide, en sorte que le second terme de la valeur de Ω représente, en réalité, une intégrale sextuple; il en est de même du troisième.

II.

Les deux intégrales sextuples qui entrent dans les valeurs de Ω peuvent être considérées comme provenant l'une et l'autre de la solution du problème suivant :

Deux espaces limités étant donnés, faire la somme des produits obtenus en multipliant un élément quelconque du premier par un élément quelconque du second et par une fonction de la distance de ces deux éléments.

La première de nos deux intégrales se rapporte au cas où les deux espaces sont identiques, et dans la seconde, l'un d'eux étant le volume occupé par le liquide et l'autre le volume occupé par le vase, ces deux espaces sont entièrement distincts; nous considérerons d'une manière générale la réduction de l'intégrale sextuple qui exprime la solution du problème en supposant que les deux volumes dont on s'occupe soient tout à fait quelconques, tant pour la forme que pour la position relative.

En nommant dv, dv' les éléments de nos deux volumes, il s'agit de transformer l'intégrale sextuple

$$\int\int dv\,dv'\,\varphi\,(dv,\,dv').$$

Nous allons voir qu'on peut, dans tous les cas, la ramener à une intégrale quadruple.

Soit μ un élément du volume v' (qui pourra faire ou ne pas faire partie du volume v), et considérons d'abord l'intégrale triple

$$\int dv\,\varphi\,(\mu,\,dv),$$

que nous étendrons à tout le volume v. Concevons une sphère de rayon 1 décrite du point μ comme centre et divisée en éléments infiniment petits; soit $d\Pi$ l'un de ces éléments; considérons $d\Pi$ comme la base d'un cône ayant pour sommet l'un des points de $d\mu$, et soient p', p'', p''',... les points où ce cône coupe la surface s qui limite le volume v, le nombre de ces points étant évidemment impair ou pair, suivant que μ fait ou ne fait pas partie de v; désignons par dt', dt'', dt''' les éléments interceptés par ce cône sur la surface s, et q', q'', q''',... les angles formés par les génératrices avec les normales extérieures à ces éléments, et enfin par v', v'', v''',... les distances $\mu p'$, $\mu p''$, $\mu p'''$,...; nous aurons évidemment

$$d\Pi = \pm \frac{dt' \cos q'}{v'^2} = \mp \frac{dt'' \cos q''}{v''^2} = \pm \frac{dt''' \cos q'''}{v'''^2}, \ldots,$$

les signes supérieurs se rapportant au cas où le point μ est extérieur à v et les signes inférieurs au cas contraire.

Si maintenant nous formons les portions de l'intégrale triple qui est relative aux éléments de v situés dans l'intérieur du cône considéré, cette portion est évidemment représentée :

1°. Si le point μ est extérieur à v, par

$$d\Pi \left[\int_{r'}^{r''} \varphi(r)\, r^2\, dr + \int_{r'''}^{r^{\text{IV}}} \varphi(r)\, r^2\, dr + \ldots \right];$$

2°. Si μ fait partie du volume v, par

$$d\Pi \left[\int_{0}^{r'} \varphi(r)\, r^2\, dr + \int_{r''}^{r'''} \varphi(r)\, r^2\, dr + \ldots \right];$$

en sorte que, si nous posons

$$\int_{r}^{\infty} \varphi(r)\, r^2\, dr = -\psi(r),$$

cette intégrale deviendra, dans le premier cas,

$$d\Pi\,[\psi(r') - \psi(r'') + \psi(r''')\ldots] = \frac{dt' \cos q'\, \psi(r)}{r'^2} + \frac{dt'' \cos q''\, dt''}{v''^2} + \ldots,$$

et, dans le second,

$$d\Pi\, \psi(0) + \frac{dt' \cos q'}{v'^2}\, \psi(r') + \frac{dt'' \cos q''}{r''^2}\, dt'' + \ldots;$$

et si maintenant nous faisons la somme de ces résultats pour toutes les positions possibles de l'élément $d\Pi$, il vient, dans le premier cas,

$$\int \frac{dt \cos q}{v^2}\, \psi(r),$$

et, dans le second,

$$4\,\Pi\, \psi(0) + \int \frac{dt \cos q}{v^2}\, \psi(r),$$

les deux intégrales devant s'étendre à toute la surface qui limite le volume v.

On déduit facilement des résultats précédents, qu'en désignant par σ le volume qui appartient à la fois à v et v', l'intégrale sextuple que nous voulions évaluer est égale à

$$4\Pi\sigma\psi(\mathrm{o})+\int\int\frac{dt\,dv\cos q\,\psi(dt,dv)}{(dt,dv)^2},$$

de sorte que pour la calculer, il suffira de former une intégrale quintuple dans laquelle on considérera successivement les éléments du volume v, combinés avec ceux de la surface t.

Pour réduire cette intégrale quintuple, considérons un élément fixe dt de la surface t, et formons d'abord l'intégrale triple qui se rapporte à la combinaison de cet élément avec tous ceux du volume dv; cette intégrale sera

$$\int\frac{dv\cos q\,\psi(dt,dv)}{(dt,dv)^2},$$

q désignant l'angle de la droite (dv, dt) avec la normale extérieure à dt.

Concevons une sphère de rayon 1 décrite de dt comme centre; soit encore $d\Pi$ un élément de la surface de cette sphère; considérons le cône qui, ayant pour sommet un point de dt, aurait $d\Pi$ pour base: supposons que ce cône coupe la surface T qui limite le volume v aux points P′, P″, P‴,...; soient R′, R″, R‴,... les distances de ces différents points au point μ; dT′, dT″, dT‴ les portions de la surface T interceptées par ce cône infiniment petit, et enfin Q′, Q″, Q‴ les angles formés par le cône avec la normale extérieure à ces éléments: nous aurons

$$d\Pi=\pm\frac{d\mathrm{T}'\cos\mathrm{Q}'}{\mathrm{R}'^2}=\mp\frac{d\mathrm{T}''\cos\mathrm{Q}''}{\mathrm{R}''^2}=\pm\frac{d\mathrm{T}'''\cos\mathrm{Q}'''}{\mathrm{R}'''^2},$$

les signes supérieurs ou inférieurs devant être adoptés suivant que dt est extérieur ou intérieur au volume v. Si maintenant nous intégrons dans toute l'étendue du cône infiniment petit, considéré plus haut, q, dans toute l'étendue de cette intégration, devra être considéré comme constant, et si nous posons

$$\int_r^\infty \psi(r)\,dr = -\,\theta(r),$$

nous verrons, comme dans le cas précédent, que l'intégrale

$$\int \frac{dv \cos q\,\psi(v,\,dt)}{(dv,\,dt)^2},$$

étendue à tous les éléments du cône infiniment petit, sera égale, dans le premier cas, à

$$\cos q\left[\frac{d\mathrm{T}'\cos \mathrm{Q}'}{\mathrm{R}'^2}\,\theta(\mathrm{R}') + \frac{d\mathrm{T}''\cos \mathrm{Q}''}{\mathrm{R}''^2}\,\theta(\mathrm{R}'') + \ldots\right],$$

et, dans le second, à

$$d\Pi \cos q\,\theta(\mathrm{o}) + \cos q\left(\frac{d\mathrm{T}'\cos \mathrm{Q}'}{\mathrm{R}'^2}\,\theta(\mathrm{R}') + \ldots\right).$$

Si maintenant nous intégrons par rapport à $d\Pi$, il viendra :

1°. Dans le cas où l'élément dt est extérieur à v,

$$\int \frac{dv \cos q\,\psi(dt,\,dv)}{(dv,\,dv)^2} = \int \frac{d\mathrm{T}\cos q \cos \mathrm{Q}\,\theta(\mathrm{R})}{\mathrm{R}^2},$$

$d\mathrm{T}$ désignant l'un quelconque des éléments de la surface qui termine v.

2°. Dans le cas où dt est situé dans l'intérieur de v, il faut ajouter à l'expression précédente le terme

$$\theta(\mathrm{o})\int d\Pi \cos q.$$

Il est facile de voir que, si cette intégrale est étendue à tous les éléments de la sphère de rayon 1, les parties qui la composent se détruisent deux à deux et sa valeur totale est o; mais si l'élément dt fait partie de la surface qui limite v, c'est-à-dire si les espaces v et v' sont, en partie, limités par une surface commune, et que dt désigne l'élément de cette surface, l'intégrale

$$\theta(\mathrm{o})\int d\Pi \cos q$$

devra être étendue seulement aux éléments de la surface sphérique pour lesquels la droite $(dt, d\Pi)$ se trouve, dans le voisinage de dt, intérieure au volume v, c'est-à-dire pour tous les éléments qui se trouvent d'un même côté du plan tangent à dt et pour lesquels l'angle q est aigu, si les volumes v et v' sont situés de côtés différents de la surface qui leur est commune, et obtus dans le cas contraire. On trouvera très-facilement que, dans le premier cas, l'intégrale

$$\int d\Pi \cos q = +\Pi,$$

et, dans le second,

$$\int d\Pi \cos q = -\Pi.$$

Il résulte des considérations précédentes que l'intégrale sextuple

$$\int\int dv\, dv'\, \varphi(dv, dv')$$

peut se ramener à la forme suivante:

1°. Si les volumes v et v' ont une partie commune σ, leurs surfaces étant entièrement distinctes,

$$\int\int dv\, dv'\, \varphi(dv, dv') = 4\Pi\sigma\psi(0) + \int\int \frac{dt\, d\mathrm{T} \cos q \cos \mathrm{Q}}{(dt, d\mathrm{T})^2}\, \theta(dt, d\mathrm{T});$$

2°. Si les surfacee t, T, qui limitent v et v', ont une partie commune que nous appellerons S,

$$\int\int dv\, dv'\, \varphi(dv, dv') = 4\Pi\sigma\psi(0) \mp \Pi\rho \mathrm{S}\theta(0)$$
$$+ \int\int \frac{dt\, d\mathrm{T} \cos q \cos \mathrm{Q}\, \theta(dt, d\mathrm{T})}{(dt, d\mathrm{T})^2},$$

le signe supérieur se rapportant au cas où v et v' sont du même côté de leur surface de séparation, et le signe inférieur au cas contraire.

III.

D'après la formule de réduction à laquelle nous sommes parvenus, la quantité Ω, dont la variation représente la somme des moments virtuels des forces qui sollicitent le système, peut être mise sous la forme suivante:

$$\Omega = -g\rho\int z\,dv + \tfrac{1}{2}\rho^2 v\psi(\mathrm{o}) - \tfrac{1}{2}\Pi\rho^2 t\theta(\mathrm{o}) + \Pi\rho\rho'\mathrm{T}\Theta(\mathrm{o})$$
$$+\int\int\frac{dt\,dt'\cos q\cos q'\,\theta(r)}{v^2} + \int\int\frac{dt\,d\mathrm{T}\cos q\cos \mathrm{Q}\,\theta(v)}{v},$$

ρ désignant, comme nous l'avons dit plus haut, la densité de liquide, et ρ' celle du verre; v étant le volume du liquide, t l'aire de la surface qui termine ce volume et T l'aire de la portion de cette surface qui est en contact avec les parois du tube ou avec celles du vase. Les fonctions ψ, θ et Θ se déduiront des fonctions φ et Φ par les équations suivantes :

$$\int_r^\infty r^2\varphi(r)\,dr = -\psi(r),\quad \int_r^\infty \psi(r)\,dr = -\theta(r),$$
$$\int_r^\infty r^2\Phi(r)\,dr = -\Psi(r),\quad \int_r^\infty \Psi(r)\,dr = -\Theta(r).$$

Les fonctions φ et Φ étant totalement inconnues, il en sera de même de θ et Θ qui s'en déduisent. On peut néanmoins admettre que ces deux fonctions, de même que φ et ψ, s'annulent pour toutes les valeurs sensibles de la variable; il suffit, pour cela, de remarquer que l'action des molécules situées à une distance sensible n'ayant aucune influence sur les phénomènes, on ne changera rien à ceux-ci, en admettant que φ et Φ soient rigoureusement nulles pour des valeurs finies de la variable, ce qui entraîne évidemment la même condition pour les fonctions θ et Θ.

D'après cette remarque, on voit sans peine que les deux intégrales quadruples qui entrent dans la valeur de Ω sont l'une et l'autre négligeables.

Considérons, en effet, la première de ces deux intégrales,

$$\int\int\frac{dt\,dt'\cos q\cos q'}{v^2}\,\theta(r).$$

Nous pouvons l'écrire de la manière suivante :

$$\int dt\int\frac{dt'\cos q\cos q'}{v^2}\,\theta(r).$$

Mais, en nommant $d\Pi$ l'élément de surface sphérique de rayon 1 décrite de dt comme centre, on peut poser

$$\frac{dt' \cos q}{v^2} = d\Pi,$$

ce qui ramène l'intégrale considérée à

$$\int dt \int d\Pi \cos q \,.\, \theta(r).$$

Or, sous cette forme, il est évident que

$$\int d\Pi \cos q \,.\, \theta(r)$$

a une valeur négligeable; car si r n'est pas très-petit, $\theta(r)$ est négligeable, et si r est très-petit, la ligne (dt, dt') est très-voisine du plan tangent, et $\cos q$ diffère très-peu de zéro. Un raisonnement tout semblable montrerait qu'on peut négliger la seconde intégrale quadruple, et prendre, par conséquent, pour Ω l'expression suivante :

$$\Omega = -g\rho \int z\,dv + \frac{1}{2}\rho^2 v \psi(o) - \frac{1}{2}\Pi\rho^2 t\theta(o) + \Pi\rho\rho' \mathrm{T}\Theta(o).$$

Cette somme, pour l'équilibre, doit être un minimum. Or il est évident qu'on peut supprimer le terme $\frac{1}{2}\rho^2 v\psi(o)$ qui est constant; si, en outre, on divise par $g\rho$, et qu'on change le signe de Ω après avoir posé

$$\frac{\Pi\rho\theta(o)}{2g} = \alpha^2,$$

$$\frac{\Pi\rho'\Theta(o)}{2g} = \beta^2,$$

on aura

$$\mathrm{K} = \int z\,dv + \alpha^2 t - 2\beta^2 \mathrm{T},$$

et cette fonction K doit être un minimum.

Si l'on désigne par U la surface libre du liquide, on aura

$$t = \mathrm{U} + \mathrm{T},$$

en sorte que l'expression qu'il faut rendre minimum prendra la forme

$$\int z dv + (\alpha^2 - 2\beta^2)\mathrm{T} + \alpha^2 \mathrm{U} = \mathrm{K},$$

U étant la surface libre du liquide et T la portion de cette surface en contact avec les parois du tube ou avec celles du vase.

IV.

Le résultat précédent a été obtenu par M. Gauss, et tout ce qui précède est extrait de son Mémoire. Mais, au lieu de résoudre, comme lui, par le calcul des variations la question de minimum à laquelle nous sommes conduits, nous allons déduire de considérations géométriques très-simples l'équation différentielle de la surface U qui peut rendre K minimum, ainsi que les conditions qui doivent être remplies aux limites.

Pour que K soit un minimum, le volume v restant constant, il faut que la variation de la somme $\mathrm{K} + \lambda v$ soit nulle, λ désignant une constance que l'on détermine ultérieurement.

Supposons d'abord que l'on fasse subir à la surface libre U une variation infiniment petite en conservant le même contour, c'est-à-dire en laissant invariable la portion de la surface du tube mouillée par le liquide qui a été désigné par T_{r}.

J'ai fait voir dans mon Mémoire sur les surfaces isothermes orthogonales que si, sur la surface U, on considère un rectangle infiniment petit $d\omega$ formé par quatre lignes de courbure, les normales menées par les différents points du contour de cet élément intercepteront sur la surface voisine un élément infiniment petit correspondant égal à

$$d\omega\left(\frac{1}{\mathrm{R}} + \frac{1}{\mathrm{R}'}\right)\varepsilon + d\omega,$$

ε étant la distance infiniment petite des deux surfaces que l'on compare.

D'après ce théorème, dont la démonstration géométrique est fort simple, la variation de $\alpha^2 \mathrm{U}$ est égale à

$$\alpha^2 \int d\omega\left(\frac{1}{\mathrm{R}} + \frac{1}{\mathrm{R}'}\right)\varepsilon;$$

quant à $\int z\,dv$, il est évident que sa variation est

$$\int z\varepsilon\,d\omega,$$

et, enfin, la variation de v est égale à

$$\int \varepsilon\,d\omega.$$

On doit donc avoir

$$\int \varepsilon\,d\omega\left[\alpha^2\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)+z+\lambda\right]=0,$$

et, comme ce résultat doit avoir lieu quel que soit ε, on en conclut

$$\alpha^2\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)+z+\lambda=0,$$

ce qui est, en effet, l'équation différentielle connue de la surface capillaire.

Pour déterminer λ, on remarquera que, pour les points appartenant à la surface du liquide extérieur au tube, $R=\infty$, $R'=\infty$; donc $z+\lambda=0$. Si donc z est compté à partir du niveau du liquide dans le vase, $\lambda=0$, et l'équation trouvée devient

$$z+\alpha^2\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)=0.$$

Pour avoir la condition relative au contour de la surface U, nous supposerons que l'on fasse varier la figure du liquide sans conserver à U le même contour; la différence entre U et la portion *correspondante* de la surface infiniment voisine qui la remplace sera toujours

$$\int \varepsilon\,d\omega\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right).$$

Mais il faut encore ajouter la portion de la nouvelle surface qui ne correspond à aucun point de U, c'est-à-dire la petite zone comprise entre le tube et la courbe suivant laquelle les normales aux différents points du contour de U coupent la surface infiniment voisine. Or on voit sans peine qu'en désignant par dP l'élément du contour qui termine U, et par i l'angle compris entre le plan tangent du tube et celui de U, cette petite zone a pour expression

$$\int dP\,\varepsilon \cot i;$$

la variation du volume sera composée du terme écrit précédemment

$$\int d\omega\,\varepsilon$$

représentant le volume compris entre U et la portion correspondante de la surface voisine, et d'un autre terme exprimant le volume infiniment petit du second ordre compris entre les parois du tube et la surface gauche lieu des normales menées à U par les différents points de son contour; mais ce dernier terme peut être négligé comme infiniment petit par rapport aux précédents: il en est de même du terme analogue provenant de la variation de $\int z\,dv$. Quant à la surface T, qui dans le cas précédent n'avait pas varié, on voit sans peine qu'elle a augmenté de la portion de surface du tube comprise entre la courbe qui limite U et le nouveau contour qui la remplace, c'est-à-dire de l'intégrale

$$\int \frac{\varepsilon\,dP}{\sin i};$$

les termes dus à la variation des limites sont donc

$$\int \varepsilon\,dP\left(\frac{\alpha^2-2\beta^2}{\sin i}+\alpha^2\cot i\right).$$

Pour qu'ils disparaissent quel que soit ε, il faut que

$$\frac{(\alpha^2-2\beta^2)}{\sin i}+\alpha^2\cot i=0,$$

c'est-à-dire

$$\cos i=\frac{\alpha^2-2\beta^2}{\alpha^2},$$

ce qui prouve que l'angle i doit avoir une valeur constante qui dépend de la nature du liquide et de celle du tube.

Si $\frac{2\beta^2-\alpha^2}{\alpha^2}$ était plus grand que 1, c'est-à-dire si β^2 surpassait α^2, la formule précédente donnerait pour l'angle i une valeur imaginaire; il faut en conclure que, dans ce cas, les hypothèses faites jusqu'ici sont inadmissibles et que le liquide doit former une couche extrêmement mince qui mouille les parois bien au-dessus de la surface qui limite la masse du liquide soulevé. Dans ce cas, les deux intégrales quadruples que nous avons négligées peuvent ne pas avoir une valeur très-petite. On suppose qu'alors tout se passe comme si le tube était fermé par la couche liquide très-mince qui mouille les parois, auquel cas on aurait $\beta^2 = \alpha^2$, et, par suite, $\cos i = 1$.

V.

Nous avons obtenu les deux résultats qui permettent de ramener à une question d'analyse la solution d'un problème quelconque relatif aux phénomènes capillaires. L'équation différentielle de la surface capillaire avait été obtenue par Laplace d'une manière un peu plus simple; mais le raisonnement au moyen duquel il prouve que l'angle désigné par i est constant, était, comme l'a remarqué M. Gauss, fort peu satisfaisant. Un des résultats les plus remarquables que Laplace ait déduit de ses formules, est l'expression rigoureuse du volume total du liquide soulevé dans le cas d'un tube cylindrique à parois verticales, dont la section peut d'ailleurs être quelconque. Je crois que la démonstration suivante a sur celle de Laplace l'avantage de la simplicité.

En prenant pour plan des xy le niveau du liquide extérieur, l'équation différentielle de la surface capillaire est

$$z = -\alpha^2 \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right).$$

Multiplions les deux membres de cette équation par $dx\,dy$ et intégrons dans toute l'étendue de la surface qui sert de base au cylindre droit dans lequel s'élève le liquide; nous aurons évidemment dans le premier membre le volume total du liquide soulevé, et pour avoir la valeur du second il suffit d'effectuer l'intégration

$$\iint dx\,dy \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right).$$

Or on peut évidemment regarder cette intégrale comme la composante verticale d'un système de forces qui, s'exerçant sur toute la surface du liquide, auraient sur chaque élément $d\omega$ une intensité égale à $d\omega\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)$. Mais un pareil système peut être remplacé de la manière suivante par deux autres systèmes beaucoup plus simples : concevons une surface parallèle à celle du liquide et située à une distance infiniment petite ε, j'entends par là une surface obtenue en portant sur chaque normale une longueur constante ε; supposons que chaque élément $d\omega'$ de cette surface soit pressé par une force $\frac{1}{\varepsilon}\,d\omega'$, et que chaque élément $d\omega$ de la première surface le soit en sens contraire par une force $\frac{1}{\varepsilon}\,d\omega$. Si $d\omega$ et $d\omega'$ sont deux éléments correspondants, d'après un théorème déjà cité dans ce Mémoire, on aura

$$d\omega' - d\omega = d\omega\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)\varepsilon,$$

de sorte que la différence des deux forces est précisément égale à

$$d\omega\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right).$$

On pourra donc, au lieu de composer les forces proposées pour chercher leur composante verticale, chercher séparément la composante provenant de chacun des deux systèmes dont nous avons parlé. Or on sait qu'une surface quelconque étant soumise à une pression normale constante, la résultante des forces qui la sollicitent donne une composante verticale égale au produit de la pression rapportée à l'unité de surface par la projection horizontale de la surface considérée ; nous aurons donc, en nommant P_1 et P_2, les projections de la surface du liquide et de la surface parallèle,

$$\iint dx\,dy\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right) = (P_1 - P_2)\frac{1}{\varepsilon}.$$

Or $P_1 - P_2$ est évidemment la projection de la surface gauche formée par les normales de longueur ε, menées par les points du contour, projection qui, à cause de l'inclinaison constante de ces normales, est égale, comme on le voit facilement, au produit du périmètre de la section droite par $\varepsilon \cos i$, i étant l'angle de la normale à la surface U, avec la normale à la surface cylindrique. Nous avons donc enfin, en nommant L le contour de la section droite du tube et V le volume du liquide soulevé,

$$V = \alpha^2 L \cos i,$$

ce qui est, à la notation près, le résultat de Laplace.

VI.

La méthode de M. Gauss suppose qu'aucune force extérieure autre que la pesanteur n'agisse sur le liquide. Si l'on admet, par exemple, que la pression atmosphérique ne soit pas la même dans l'intérieur du tube qu'à l'extérieur, il faudra, dans l'évaluation des moments virtuels des forces du système, avoir égard à ces forces de pression, et, par conséquent, au lieu d'égaler à zéro la variation de la fonction qui a été désignée plus haut par Ω, il conviendra d'écrire qu'elle est égale et contraire à la somme des moments virtuels des forces de pression. Supposons que la pression qui s'exerce sur le niveau extérieure du liquide soit P, et désignons par P' celle que supporte le liquide soulevé dans le tube; reprenons l'expression de Ω qui a été calculée plus haut,

$$\Omega = -g\rho\int z\,dv + \frac{1}{2}\rho^2 v\psi(0) - \frac{1}{2}\Pi\rho^2 t\theta(0) + \Pi\rho\rho'\mathrm{T}\theta(0),$$

cette expression devient, en y introduisant les conventions

$$\alpha^2 = \frac{\Pi\rho\theta(0)}{2g},$$

$$\beta^2 = \frac{\Pi\rho'\Theta(0)}{2g},$$

$$\Omega = -g\rho\int z\,dv + \frac{1}{2}\rho^2 v\psi(0) - \rho g\alpha^2 t + 2\rho g\beta^2\mathrm{T},$$

ou, en faisant comme plus haut, $t = \mathrm{T} + \mathrm{U}$,

$$\Omega = -g\rho\int z\,dv + \frac{1}{2}\rho^2 v\psi(0) - \rho g\alpha^2\mathrm{U} + \rho g\mathrm{T}(2\beta^2 - \alpha^2).$$

La variation $\delta\Omega$ doit être, pour l'équilibre, égale et de signe contraire à la somme des moments virtuels des forces de pression. Supposons que le tube soit un cylindre droit vertical et écrivons que cette condition est remplie pour un déplacement virtuel consistant à abaisser d'une même quantité dh dans le sens de la verticale tous les points de la portion de surface U qui correspond au liquide situé dans l'intérieur du tube, et à élever en même temps d'une autre quantité dh' tous les points de la surface extérieure. Le rapport de dh à dh' étant calculé de manière à ce que le volume total reste invariable, on verra sans peine que, pour un pareil déplacement, la surface U n'étant pas changée, et nommant L le contour de la section intérieure du tube et L' celui de la section du vase que nous supposerons aussi cylindrique, la variation de Ω sera

$$-g\rho\delta\int z dv + g\rho(\alpha^2 - 2\beta^2)(-ldh + \mathrm{L}dh').$$

Or $\delta\int z dv$ est la somme des moments des différents cylindres tronqués de hauteur dh ou dh' dont le volume liquide s'est diminué ou augmenté; l'un quelconque de ces cylindres ayant pour mesure le produit de dh par sa section droite que l'on peut représenter par $dx dy$, on aura

$$\delta\int z dv = -dh\int z dx dy + dh'\int z dx dy.$$

La première intégrale s'étendant à la portion du liquide intérieur au tube, elle peut représenter le volume du liquide soulevé si z est compté à partir du niveau du liquide extérieur, hypothèse qui annule la seconde intégrale.

Remplaçant $\delta\int z dv$ par cette valeur, et remarquant que le rapport de dh à dh' doit être le rapport inverse de la section du cylindre à celle du vase dans lequel il est plongé, nommant b et B ces sections, il viendra

$$\delta\Omega = \left[-\mathrm{V}g\rho + g\rho(2\beta^2 - \alpha^2)\left(\mathrm{L} - \frac{b\mathrm{L}}{\mathrm{B}}\right)\right] dh.$$

La somme des moments virtuels dus aux forces de pression peut facilement se calculer. Si, en effet, on considère un élément $d\omega$ de la surface U, la pression qu'il supporte sera $\mathrm{P}d\omega$ ou $\mathrm{P}'d\omega$, suivant qu'il appartiendra à la portion de surface intérieure au tube ou au niveau extérieur. Le déplacement virtuel du point d'application sera le produit de dh, par le cosinus de l'angle que l'élément pressé fait avec la verticale, ce qui donnera le produit de $\mathrm{P}dh$ ou de $\mathrm{P}'dh'$ par la projection de l'élément $d\omega$, et, par conséquent, pour intégrale, $\mathrm{P}bdh$ ou $-\mathrm{P}'\mathrm{B}dh'$, suivant qu'il s'agira du liquide intérieur ou extérieur au tube; en remarquant que $bdh = \mathrm{B}dh'$, la somme de ces deux intégrales sera $(\mathrm{P} - \mathrm{P}')bdh$. Nous aurons donc enfin pour équation d'équilibre

$$-\mathrm{V}g\rho + g\rho(2\beta^2 - \alpha^2)\left(\mathrm{L} - \frac{b\mathrm{L}}{\mathrm{B}}\right) = (\mathrm{P}' - \mathrm{P})b.$$

Si nous appelons h la hauteur d'une colonne liquide de volume V, ayant b pour base, ou, en d'autres termes, la hauteur moyenne du liquide soulevé, nous tirerons de cette équation,

$$h = (\alpha^2 - 2\beta^2)\left(\frac{l}{b} - \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{B}}\right) + \frac{(\mathrm{P} - \mathrm{P}')}{g\rho}.$$

On peut négliger, dans ce résultat, $\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{B}}$ par rapport à $\frac{l}{b}$, et si l'on remplace en même temps $\alpha^2 - 2\beta^2$ par sa valeur trouvée plus haut, $\alpha^2 \cos i$, i étant l'angle formé par le liquide avec la surface capillaire, il viendra

$$h = \alpha^2 \frac{l}{b} \cos i + \frac{\mathrm{P} - \mathrm{P}'}{g\rho};$$

ce qui prouve que la hauteur h se composera de deux parties, l'une précisément égale à l'élévation calculée plus haut pour le cas de $\mathrm{P}' = \mathrm{P}$, et l'autre égale à la différence du niveau *due* à l'excès de la pression extérieure sur la pression intérieure.

Si au lieu de considérer, comme dans le raisonnement précédent, le cas d'un tube plongé dans un liquide, nous supposons une colonne liquide suspendue dans un tube et supportant sur ses deux surfaces des pressions différentes, nous verrons qu'en donnant à tous les points un mouvement vertical commun, dans le sens de la verticale, $\delta\mathrm{U}$ et $\delta\mathrm{T}$ seront nuls, et $\delta\Omega$ se réduira à $-g\rho\mathrm{V}$; et en égalant ce moment virtuel à $(\mathrm{P}' - \mathrm{P})b$, nous verrons que le poids de la colonne sera simplement proportionnel à la différence des pressions, et que la capillarité n'aura sur le phénomême aucune influence. Si, comme cas particulier, nous supposions $\mathrm{P} = \mathrm{P}'$, il viendrait $\mathrm{V} = 0$.

Les faits contraires à ce résultat doivent s'expliquer par l'influence du frottement.

On déduit immédiatement des résultats précédents le premier des théorèmes énoncés au commencement de ce Mémoire. Si la colonne de liquide, située dans un tube capillaire ouvert par les deux bouts, est séparée en plusieurs parties par des bulles d'air interposées, quelle que soit la densité de ces bulles d'air et leur nombre, le poids total du liquide soulevé restera le même.

VII.

Je considérerai maintenant un phénomène bien connu qui semble au premier abord contredire les résultats de l'analyse précédente.

On sait qu'un tube capillaire ouvert par les deux bouts peut contenir une colonne à peu près double en hauteur de celle qu'il soulève quand on le plonge dans une masse liquide; il suffit, comme on sait, que la colonne liquide occupe la partie inférieure du tube et y forme un ménisque par la courbure duquel on explique cette augmentation de hauteur. Pour concilier ce fait avec le théorème démontré plus haut, il faut remarquer qu'en général, dans l'application du principe des vitesses virtuelles, la somme des moments virtuels correspondant à un certain déplacement du système ne doit être nulle que quand un déplacement égal et contraire est possible, et fournit une somme de moments précisément de signe contraire à celle qui correspond au premier. Quand cette condition n'est pas remplie, il suffit pour l'équilibre que la somme des moments virtuels, sans être nulle, ne puisse jamais devenir positive. Or, dans le cas qui nous occupe, si, pour appliquer le raisonnement du paragraphe précédent, nous donnons au liquide un mouvement virtuel qui consiste à élever d'une même quantité toutes les molécules contenues dans l'intérieur du tube, de manière à ne pas changer la surface désignée par U et T, un déplacement égal et contraire, déplacement auquel les liaisons ne s'opposent nullement, entraînerait un changement dans la valeur de U et de T; car le tube ne s'étendant plus au-dessus du contour actuel de la surface U, on ne peut abaisser cette surface, sans supposer que le liquide forme au-dessous du niveau inférieur du tube un petit cylindre complétement extérieur, dont la surface convexe doit être considérée comme faisant partie de U. La variation de T cessera également d'être nulle, car la diminution que cette surface éprouve vers le haut de la colonne ne sera plus compensée par un accroissement égal à la partie inférieure.

D'après ces remarques, on trouvera, en nommant dh le mouvement virtuel donné au système et désignant comme à l'ordinaire par L et b le contour et la section droite du tube,

$$\delta\Omega = g\rho V dh - g\rho\alpha^2 L dh - \rho g(2.\beta^2 - \alpha^2) L dh;$$

et comme $\delta\Omega$ doit être négatif, il vient

$$V < 2\beta^2 L.$$

Or on a trouvé plus haut que le volume V′, qui serait soulevé par ce tube plongeant dans une masse indéfinie de liquide, serait

$$V' = \alpha^2 L \cos i.$$

On a donc

$$\frac{V}{V'} < \frac{2\beta^2}{\alpha^2 \cos i},$$

ou, en remarquant que $\frac{2\beta^2}{\alpha^2} = 1 + \cos i$,

$$\frac{V}{V'} < 1 + \frac{1}{\cos i},$$

ce qui est précisément le résultat énoncé au commencement de ce Mémoire.

La méthode précédente ne donne pas la valeur précise du rapport $\frac{V'}{V}$, mais seulement une limite de ce rapport : on doit remarquer qu'une détermination exacte de sa valeur est, en effet, complétement impossible; car si, dans les circonstances que nous avons admises, une certaine colonne liquide peut se maintenir dans le tube, à plus forte raison en sera-t-il de même d'une colonne moindre. Il faudrait néanmoins, pour que la solution fût complétement satisfaisante, pouvoir démontrer que la limite trouvée peut, en réalité, être atteinte.

VIII.

En appliquant la méthode exposée au commencement de ce Mémoire au cas de deux liquides superposés dans un même tube, on trouve sans difficulté qu'en désignant par U la surface qui limite le liquide supérieur, par U′ la surface de séparation des deux liquides dans le tube, par U″ la surface libre du liquide extérieur renfermé dans le vase, par T et T′ les portions appartenant à la surface du tube ou à celles du vase qui sont mouillées par le liquide supérieur et inférieur, par ρ et ρ' les densités du liquide supérieur et inférieur, et enfin par α^2, β^2, α'^2, β'^2, α''^2, β''^2 des constantes analogues à celles qui ont été définies plus haut; il faut pour l'équilibre que la somme

$$K = \rho\int z\,dv + \rho'\int z\,dv' + \alpha^2\rho\,U + (\alpha^2 - 2\beta^2)\,\rho T$$
$$+ (\alpha^2\rho + \alpha'^2\rho' - 2\beta''^2\rho')\,U' + (\alpha'^2\rho' - 2\beta'^2\rho')\,T' + \alpha'^2\rho'\,U''$$

soit un minimum.

Or, en donnant un déplacement virtuel commun à tous les points de la masse intérieure au tube et un déplacement inverse à chaque point de la masse extérieure, on devra avoir

$$0 = -\rho bh - \rho' bh' + (\alpha'^2\rho' - 2\beta'^2\rho')\,L - (\alpha'^2 - 2\beta'^2)\frac{Lb}{B}\,\rho',$$

d'où l'on peut tirer pour $\rho h + \rho' h'$ une valeur qui ne dépend nullement de la nature du liquide supérieur.

IX.

Parmi les nombreux phénomènes qui se rattachent à la capillarité, l'un des plus simples et des plus faciles à étudier expérimentalement me semble celui de la formation des gouttes de mercure sur un plan horizontal de verre. Les principes précédents s'appliquent sans difficulté à l'étude de ces phénomènes et conduisent à quelques résultats dont peut-être on pourra tirer parti.

Si une goutte de mercure repose sur un plan horizontal, l'équation différentielle de la surface libre sera la même que celle d'un liquide placé dans un tube, c'est-à-dire

$$h - z = \alpha^2 \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right);$$

seulement la constante h qui, dans les problèmes précédents, était déterminée par la position du niveau extérieur restera ici inconnue et ne pourra être obtenue qu'en égalant le volume calculé de la goutte au volume donné du liquide qui la forme. Dans le cas particulier où la goutte est fort large, R et R' peuvent être considérés comme infinis pour les points de la surface supérieure; en sorte que, pour ces points, on doit supposer $z = h$, et que la constante h représente alors *l'épaisseur* de la goutte. Dans le cas général, pour définir cette constante, il faudrait supposer que la plaque sur laquelle repose le mercure est percée au centre même de la goutte qui communique, par un canal plein de liquide, avec un vase assez large pour que le liquide y soit horizontal; h désignerait alors l'élévation du niveau de ce liquide au-dessus de la plaque de verre.

En supposant que l'on parvienne à réaliser les circonstances que je viens d'indiquer et à déterminer ainsi par l'expérience la valeur de h, on peut obtenir entre les éléments mesurables d'une goutte de mercure une relation simple dont la vérification me paraîtrait importante.

Considérons l'équation

$$h - z = \alpha^2 \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right).$$

Multiplions par $dxdy$ et intégrons dans toute l'étendue de la projection de la goutte et pour tous les points de la surface libre de celle-ci, c'est-à-dire en prenant deux fois, avec des signes contraires, les ordonnées qui pourraient répondre à une même valeur de x et de y; nous aurons, en nommant V le volume de la goutte et b la surface de la base par laquelle elle repose sur le plan de verre,

$$bh - V = \int\int \alpha^2 \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) dx\, dy.$$

Or le second membre peut être considéré comme représentant la composante verticale d'un système de forces s'exerçant normalement sur chaque élément $d\omega$ de la surface de la goutte avec une intensité égale à $\alpha^2 d\omega\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)$; mais nous avons vu qu'un pareil système pouvait être remplacé par deux autres, dans lesquels une pression $\frac{\alpha^2 d\omega}{\varepsilon}$ s'exercerait sur chaque élément de la surface de la goutte et de la surface parallèle menée à la distance ε. Or chacun de ces systèmee de forces donne naissance à une composarte verticale égale au produit de $\frac{\alpha^2}{\varepsilon}$ par la projection de la surface pressée; on voit facilement que la différence de ces deux projections est $\alpha L \varepsilon \sin i$, L étant le contour de la goutte et i l'inclinaison constante de son plan tangent sur le plan horizontal : l'intégrale qui est dans le second membre a donc pour valeur $-\alpha^2 L \sin i$, et nous avons

$$bh - V = -\alpha^2 L \sin i,$$

d'où

$$V = bh + \alpha^2 L \sin i,$$

relation qui paraît susceptible d'être vérifiée par l'expérience.