JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

WILLIAM ROBERTS

Démonstration de deux théorèmes généraux sur les périmètres de quelques courbes dérivées des hyperboles conjuguées

Journal de mathématiques pures et appliquées 1^re série, tome 13 (1848), p. 179-184.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1848_1_13__179_0>

DÉMONSTRATION

De deux théorèmes généraux sur les périmètres de quelques courbes dérivées des hyperboles conjuguées;

PAR M. WILLIAM ROBERTS.

Dans le numéro de janvier 1847 de ce Journal, j'ai étendu à l'ensemble d'une hyperbole quelconque et de sa conjuguée une propriété que M. Talbot avait constatée depuis longtemps pour l'hyperbole équilatère, et j'ai ajouté aussi quelques théorèmes analogues, relativement à une classe de courbes dérivées l'une de l'autre successivement, d'après une loi donnée, en partant d'une hyperbole. Les résultats que j'ai obtenus peuvent être compris, comme je l'ai remarqué, dans les énoncés de deux théorèmes généraux; mais la marche assez pénible que j'ai suivie ne me permettait de les vérifier que dans un petit nombre de cas particuliers. Or, en y réfléchissant, je suis parvenu à démontrer mes propositions d'une manière générale, en faisant usage des coordonnées elliptiques. La méthode étant la même dans les deux cas, je n'en considérerai qu'un seul. Voici le théorème que je me propose de démontrer :

Étant donnée une hyperbole ayant pour équation

$$\frac{x^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(*où l'on suppose $c > b$*), *traçons la courbe, lieu des projections orthogonales du centre sur ses tangentes; faisons dériver de cette seconde courbe une troisième en répétant la même construction, et ainsi de suite; et désignons par S_n la longueur du quadrant de la courbe qui* *occupe le $n^{\text{ième}}$ rang dans cette série. Considérons aussi le système des courbes dérivées de l'hyperbole conjuguée*

$$\frac{x^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1,$$

d'après la même construction, et appelons Σ_n la longueur du quadrant de la $n^{\text{ième}}$ courbe dans cette nouvelle suite. Je dis qu'une combinaison quelconque des quadrants dont il s'agit, telle que

$$S_{2p} S_{2q+1} + \Sigma_{2p} \Sigma_{2q+1},$$

s'exprimera par des fonctions elliptiques de la première et de la seconde espèce, de la manière suivante :

$$S_{2p} S_{2q+1} + \Sigma_{2p} \Sigma_{2q+1} = \pi[\alpha + \beta F(k, \lambda) + \gamma E(k, \lambda)],$$

où

$$k^2 = \frac{c^2}{b^2 + c^2}, \quad \cos\lambda = \frac{b^2}{c^2},$$

et où α, β, γ sont des fonctions algébriques de b et c.

En se reportant au tome X de ce Journal, page 185, on y trouvera, pour le quadrant S_n, les deux expressions suivantes (dans lesquelles on suppose $b^2 + c^2 = 1$) :

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} & b^n c^n \int_c^\infty \frac{nr^2 + (n-1)(r^2 + b^2 - c^2)}{r^{n-1}(r^2 + b^2 - c^2)^{\frac{n+1}{2}}} \frac{dr}{\sqrt{(r^2 + b^2)(r^2 - c^2)}}, \\ & \int_{\frac{1}{c}}^\infty \frac{(n-1) b^2 c^2 \rho^2 + n(b^2 c^2 \rho^2 + c^2 - b^2)}{\rho^n (b^2 c^2 \rho^2 + c^2 - b^2)^{\frac{n}{2}}} \frac{d\rho}{\sqrt{(b^2 \rho^2 + 1)(c^2 \rho^2 - 1)}}. \end{aligned} \right.$$

Faisons dans la première de ces formules

$$n = 2q + 1 \quad \text{et} \quad r = \frac{bc}{\sqrt{\mu^2 - c^2}},$$

ce qui nous donnera

$$S_{2q+1} = bc \int_c^1 \frac{(2q+1) b^2 c^2 + 2q[c^4 - (c^2 - b^2)\mu^2]}{[c^4 - (c^2 - b^2)\mu^2]^{q+1}} \frac{(\mu^2 - c^2)^{2q} d\mu}{\sqrt{(1 - \mu^2)(\mu^2 - c^2)}}.$$

Faisons aussi dans la seconde

$$n = 2p \quad \text{et} \quad \rho = \frac{1}{\sqrt{c^2 - \nu^2}}:$$

on aura cette autre expression,

$$S_{2p} = \int_0^c \frac{(2p-1)\,b^2c^2 + 2p\,[c^4 - (c^2 - b^2)\,\nu^2]}{[c^4 - (c^2 - b^2)\,\nu^2]^p}\,\frac{(c^2 - \nu^2)^{p-1}\,d\nu}{\sqrt{(1-\nu^2)\,(c^2-\nu^2)}}.$$

D'ailleurs il est évident qu'on obtiendra la valeur de Σ_n en permutant b et c dans les expressions (1); on trouvera alors, en faisant dans la première

$$n = 2q + 1 \quad \text{et} \quad r = \frac{bc}{\sqrt{c^2 - \nu^2}},$$

et dans la seconde

$$n = 2p \quad \text{et} \quad \rho = \frac{1}{\sqrt{\mu^2 - c^2}},$$

$$\Sigma_{2q+1} = bc\int_0^c \frac{(2q+1)\,b^2c^2 + 2q\,[c^4 - (c^2 - b^2)\,\nu^2]}{[c^4 - (c^2 - b^2)\,\nu^2]^{q+1}}\,\frac{(c^2 - \nu^2)^q\,d\nu}{\sqrt{(1-\nu^2)\,(c^2-\nu^2)}}.$$

$$\Sigma_{2p} = \int_c^1 \frac{(2p-1)\,b^2c^2 + 2p\,[c^4 - (c^2 - b^2)\,\mu^2]}{[c^4 - (c^2 - b^2)\,\mu^2]^p}\,\frac{(\mu^2 - c^2)^{p-1}\,d\mu}{\sqrt{(1-\mu^2)\,(c^2-\mu^2)}}.$$

Supposons maintenant, pour fixer les idées, que $p < q$, et posons

$$M = (\mu^2 - c^2)^{2q-2p+1}\,\{(2p-1)\,b^2c^2 + 2p\,[c^4 - (c^2 - b^2)\,\nu^2]\}\,\{(2q+1)\,b^2c^2 + 2q\,[c^4 - (c^2 - b^2)\,\mu^2]\},$$
$$N = (c^2 - \nu^2)^{2q-2p+1}\,\{(2p-1)\,b^2c^2 + 2p\,[c^4 - (c^2 - b^2)\,\mu^2]\}\,\{(2q+1)\,b^2c^2 + 2q\,[c^4 - (c^2 - b^2)\,\nu^2]\};$$

et l'on verra aisément que

$$S_{2p}\,S_{2q+1} + \Sigma_{2p}\,\Sigma_{2q+1}$$

pourra s'écrire de la manière suivante :

$$bc\int_c^1\int_0^c \left\{\frac{M\,[c^4 - (c^2 - b^2)\,\nu^2]^{q-p+1} + N\,[c^4 - (c^2 - b^2)\,\mu^2]^{q-p+1}}{[c^4 - (c^2 - b^2)\,\mu^2]^{q+1}\,[c^4 - (c^2 - b^2)\,\nu]^{q+1}}\right\}\frac{(\mu^2 - c^2)^{2p-1}\,(c^2 - \nu^2)^{2p-1}\,d\mu\,d\nu}{\sqrt{(1-\mu^2)\,(\mu^2-c^2)\,(1-\nu^2)\,(c^2-\nu^2)}}.$$

Mais, si l'on considère le polynôme

$$\{M\,[c^4 - (c^2 - b^2)\,\nu^2]^{q-p+1} + N\,[c^4 - (c^2 - b^2)\,\mu^2]^{q-p+1}\}\,(\mu^2 - c^2)^{2p-1}\,(c^2 - \nu^2)^{2p-1},$$

on s'apercevra, en examinant sa formation avec un peu de soin, qu'il peut être résolu dans une suite de termes dont chacun sera de la forme $A\mu^{2m}\nu^{2m}(\mu^{2n}-\nu^{2n})$, A étant un coefficient fonction de b et c. Or ce terme se compose d'une suite d'autres dont le type général sera $(\mu^2-\nu^2)\mu^{2m}\nu^{2m}(\mu^{2n}+\nu^{2n})$ (abstraction faite du coefficient), et en exprimant $\mu^{2n}+\nu^{2n}$ au moyen de $\mu^2+\nu^2$ et de $\mu^2\nu^2$, ce dernier terme sera résolvable encore dans une suite d'expressions dont une quelconque aura la forme $(\mu^2-\nu^2)\mu^{2m}\nu^{2m}(\mu^2+\nu^2)^n$. Donc la fonction

$$S_{2p}S_{2q+1}+\Sigma_{2p}\Sigma_{2q+1}$$

sera exprimable par une série finie de termes, dont voici le type général :

$$(2)\qquad \int_c^1\int_0^c \frac{\mu^{2m}\nu^{2m}(\mu^2+\nu^2)^n}{[c^4-(c^2-b^2)\mu^2]^{q+1}[c^4-(c^2-b^2)\nu^2]^{q+1}}\frac{(\mu^2-\nu^2)\,d\mu d\nu}{\sqrt{(1-\mu^2)(\mu^2-c^2)(1-\nu^2)(c^2-\nu^2)}}.$$

Cela posé, considérons un ellipsoïde ayant pour équation

$$\frac{x^2}{c^4}+\frac{y^2}{b^2c^2}+\frac{z^2}{b^4}=\frac{1}{c^2-b^2},$$

et soient, comme de coutume, μ et ν les coordonnées elliptiques d'un point quelconque appartenant à cette surface. On aura, en désignant par R le rayon vecteur central, par P la perpendiculaire abaissée du centre sur un plan tangent, et par $d\omega$ l'élément superficiel correspondant, et en prenant b^2+c^2 pour unité,

$$R^2=\mu^2+\nu^2+\frac{b^4+b^2c^2-c^4}{c^2-b^2},$$

$$P=\frac{b^2c^2}{\sqrt{c^2-b^2}}\frac{1}{\sqrt{[c^4-(c^2-b^2)\mu^2][c^4-(c^2-b^2)\nu^2]}},$$

$$d\omega=\frac{d\mu d\nu}{c^2-b^2}\frac{(\mu^2-\nu^2)\sqrt{[c^4-(c^2-b^2)\mu^2][c^4-(c^2-b^2)\nu^2]}}{\sqrt{(1-\mu^2)(\mu^2-c^2)(1-\nu^2)(c^2-\nu^2)}}$$

(*voir* la Lettre de M. Liouville à M. Blanchet, tome XI, pages 218-220); d'où il suit que le calcul du terme (2) dépendra de l'évaluation de l'intégrale double définie $\left(\text{à cause de } x=\frac{c\mu\nu}{\sqrt{c^2-b^2}}\right)$,

$$(3)\qquad \iint R^{2n}P^{2q+3}x^{2m}\,d\omega,$$

que l'on doit étendre à la huitième partie de l'ellipsoïde entier.

Mais en faisant

$$x = \frac{c^2 \cos\theta}{\sqrt{c^2 - b^2}}, \quad y = \frac{bc \sin\theta \cos\varphi}{\sqrt{c^2 - b^2}}, \quad z = \frac{b^2 \sin\theta \sin\varphi}{\sqrt{c^2 - b^2}};$$

on aura, en vertu de formules bien connues,

$$R^2 = \frac{c^4 \cos^2\theta + b^2 c^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi + b^4 \sin^2\theta \sin^2\varphi}{c^2 - b^2},$$

$$\frac{1}{p^2} = \frac{c^2 - b^2}{b^4 c^4}\left(b^4 \cos^2\theta + b^2 c^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi + c^4 \sin^2\theta \sin^2\varphi\right),$$

$$d\omega = \frac{bc}{\sqrt{c^2 - b^2}} \sqrt{b^4 \cos^2\theta + b^2 c^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi + c^4 \sin^2\theta \sin^2\varphi}\, \sin\theta\, d\theta d\varphi;$$

en sorte que la détermination de l'intégrale (3) se trouvera réduite, en dernière analyse, à celle de l'intégrale définie,

$$(4) \qquad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^{2m+1}\theta \cos^{2n}\varphi\, d\theta d\varphi}{(b^4 \cos^2\theta + b^2 c^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi + c^4 \sin^2\theta \sin^2\varphi)^{q+1}}.$$

La première intégration, par rapport à φ, peut s'effectuer avec facilité, ce qui nous donnera π pour coefficient; et l'autre, par rapport à θ, introduira des fonctions elliptiques de première et de seconde espèce, ayant toujours même module et même amplitude, quels que soient m, n, q: en sorte qu'on trouvera, pour la valeur de (4), une expression qui peut s'écrire ainsi,

$$(5) \qquad \pi\left[\alpha + \beta F(k, \lambda) + \gamma E(k, \lambda)\right],$$

α, β, γ étant des fonctions algébriques de b et c. Afin de déterminer k et λ en fonction de ces quantités, nous supposerons

$$m = n = q = 0,$$

ce qui nous donnera, comme on sait (*Legendre*, tome I, page 284):

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin\theta\, d\theta d\varphi}{b^4 \cos^2\theta + b^2 c^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi + c^4 \sin^2\theta \sin^2\varphi} = \frac{\pi}{2bc\sqrt{c^4 - b^4}} F(k, \lambda);$$

où

$$k^2 = \frac{c^2}{b^2 + c^2} \quad \text{et} \quad \cos\lambda = \frac{b^2}{c^2}.$$

Il est évident donc que

$$S_{2p} S_{2q+1} + \Sigma_{2p} \Sigma_{2q+1}$$

est composé d'une suite finie de termes ayant pour type l'expression (5), et, par conséquent, que cette fonction elle-même pourra se présenter sous une forme pareille.

On doit observer que nous avons supposé $p < q$ dans la démonstration précédente; mais des changements très-légers suffiront pour établir la proposition dont il s'agit dans le cas opposé.

Il existe une autre combinaison des périmètres de nos courbes, qui conduit à un résultat tout à fait semblable à celui qu'on vient d'obtenir, savoir,

$$S_p \Sigma_{p+2q} - \Sigma_p S_{p+2q}.$$

Cette fonction conserve aussi le type (5), comme on pourra s'en assurer sans difficulté en suivant la marche indiquée ci-dessus.