

JOURNAL  
DE  
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

---

HERMITE

Note de M. Hermite

*Journal de mathématiques pures et appliquées 1<sup>re</sup> série*, tome 13 (1848), p. 15.

[http://www.numdam.org/item?id=JMPA\\_1848\\_1\\_13\\_\\_15\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1848_1_13__15_0)

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc  
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

*Note de M. HERMITE.*

Depuis longtemps j'avais trouvé de mon côté la démonstration élémentaire suivante du théorème relatif aux nombres premiers  $4k + 1$ .

Supposant

$$a^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p},$$

convertissons  $\frac{a}{p}$  en fraction continue jusqu'à ce qu'on obtienne deux réduites consécutives  $\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'}$ , telles que  $n$  soit  $< \sqrt{p}$  et  $n' > \sqrt{p}$ ; on aura, comme on sait,

$$\frac{a}{p} = \frac{m}{n} + \frac{\varepsilon}{nn'},$$

où  $\varepsilon$  est  $< 1$ . De là on tire

$$na - mp = \varepsilon \cdot \frac{p}{n'}$$

done

$$(na - mp)^2 < p.$$

Ajoutant membre à membre avec

$$n^2 < p,$$

il vient

$$(na - mp)^2 + n^2 < 2p.$$

Or le premier membre de cette inégalité est un multiple entier de  $p$  d'après la condition

$$a^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p};$$

il faut donc qu'on ait précisément

$$(na - mp)^2 + n^2 = p.$$

