JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

HERMITE

Note de M. Hermite

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 13 (1848), p. 15.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1848_1_13__15_0>

Note de M. Hermite.

Depuis longtemps j'avais trouvé de mon côté la démonstration élémentaire suivante du théorème relatif aux nombres premiers $4k+1$.

Supposant

$$a^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p},$$

convertissons $\frac{a}{p}$ en fraction continue jusqu'à ce qu'on obtienne deux réduites consécutives $\frac{m}{n}$, $\frac{m'}{n'}$, telles que n soit $< \sqrt{p}$ et $n' > \sqrt{p}$; on aura, comme on sait,

$$\frac{a}{p} = \frac{m}{n} + \frac{\varepsilon}{nn'},$$

où ε est < 1. De là on tire

$$na - mp = \varepsilon \cdot \frac{p}{n'};$$

donc

$$(na - mp)^2 < p.$$

Ajoutant membre à membre avec

$$n^2 < p,$$

il vient

$$(na - mp)^2 + n^2 < 2p.$$

Or le premier membre de cette inégalité est un multiple entier de p d'après la condition

$$a^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p};$$

il faut donc qu'on ait précisément

$$(na - mp)^2 + n^2 = p.$$