JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

F.-E. NEUMANN

Recherches sur la théorie mathématique de l'induction

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 13 (1848), p. 113-178.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1848_1_13__113_0>

RECHERCHES

SUR LA

THÉORIE MATHÉMATIQUE DE L'INDUCTION,

PAR F.-E. NEUMANN,

Professeur à l'Université de Kœnigsberg.

(Lu à l'Académie des Sciences de Berlin, le 27 octobre 1845.)

Traduit par M. A. BRAVAIS.

Lorsqu'une résultante magnétique ou électrodynamique, appliquée sur un élément d'un conducteur, vient à changer de grandeur, il se développe dans cet élément une force électromotrice qui, dans le cas où il appartient à un circuit fermé, fait naître dans ce circuit un courant électrique connu sous le nom de *courant d'induction, courant induit.* Nous supposerons que la rapidité avec laquelle varie la résultante considérée soit notablement moindre que la rapidité avec laquelle le courant induit se développe, de sorte qu'à un instant donné, le courant induit puisse être considéré comme conservant la même valeur pendant un laps de temps à la vérité très-court, mais suffisant pour que les lois de Ohm soient applicables. On voit que cette restriction range dans une catégorie à part les courants induits développés par des décharges électriques; ainsi les considérations qui vont suivre ne leur seront pas applicables.

L'élément induit peut être filiforme, lamellaire, ou de forme quelconque. Dans le premier cas, l'induction sera dite *linéaire*, et c'est l'examen de ce cas particulier qui forme le but du présent Mémoire. Il est d'ailleurs plus simple à traiter que les deux autres, puisqu'ici la route que doit suivre l'électricité est déjà définie, tandis qu'elle ne l'est pas d'avance, lorsque le conducteur est étendu suivant plusieurs dimensions. J'examinerai les lois relatives à ce dernier cas, dans un second Mémoire. Je ne parlerai pas non plus des courants développés par le changement de forme des conducteurs, ni de la réaction exercée par le courant induit sur le courant inducteur; mais les principes nécessaires à la solution de ces nouvelles questions ne diffèrent pas de ceux que nous allons développer [*].

[*] L'auteur place ici un résumé que le traducteur a cru devoir renvoyer à la fin du Mémoire.

§ I.

Pour déterminer la direction qu'adopte un courant induit, Lenz a établi la loi suivante : « Lorsqu'un conducteur métallique se meut dans le voisinage d'un courant » électrique ou d'un aimant, le sens du courant induit doit être tel, qu'en le supposant » établi dans ce conducteur, au repos, il détermine le circuit induit à se mouvoir » dans la direction opposée à celle du mouvement primitif, ce mouvement primitif » et son opposé étant supposés être les seuls dont le circuit induit soit susceptible. »

On sait, d'autre part, que « l'induction qui se produit alors, dans un temps très-» court et déterminé, est proportionnelle à la vitesse avec laquelle se meut le conduc-» teur. »

En combinant entre elles ces deux lois, on peut obtenir une loi unique de l'induction, comme je vais l'établir dans ce Mémoire.

Et d'abord la loi de Lenz peut s'énoncer de la manière suivante : « L'action électro-» dynamique exercée par le courant inducteur sur le courant induit, étant décomposée » suivant la direction du mouvement du circuit induit, est toujours négative (c'est-à-dire » contraire à ce dernier mouvement). »

Supposons pour un moment que tous les éléments du circuit induit aient des vitesses parallèles et égales à v : supposons que la composante de l'action électrodynamique suivant la commune direction du mouvement, le conducteur induit étant censé parcouru par un courant d'intensité 1, dont le sens a été arbitrairement fixé, ait la même valeur absolue pour chacun des éléments de ce conducteur ; Ds étant la longueur d'un de ces éléments infiniment petits, CDs sera cette composante commune : pour la longueur totale λ du conducteur induit, toutes ces composantes se combineront en une seule égale à $C\lambda$ que nous nommerons C'. Si l'intensité du courant induit est égale à k, l'action électrodynamique suivant la direction du mouvement du conducteur sera kC' ; k étant proportionnel à la vitesse v, on peut écrire

$$k = Lv, \quad kC' = LvC' ;$$

et puisque, d'après la loi de Lenz, la composante électrodynamique kC' est toujours opposée au mouvement, LvC' sera nécessairement une quantité négative.

On ne peut déterminer à priori la quantité L qui est évidemment une fonction de la composante C' ; mais il résulte de la loi de Lenz que son signe change en même temps que celui de C', et la supposition la plus simple à faire consistera à écrire

$$L = -eC'.$$

Cela revient à admettre que l'intensité du courant induit est proportionnelle à la composante électrodynamique suivant le sens du mouvement. Les conséquences de cette hypothèse prouvent, en se vérifiant, qu'elle est suffisamment exacte.

Ainsi l'intensité du courant induit sera de la forme

$$k = Lv = -evC'.$$

En nommant l la *résistance totale* du circuit induit, qui est soumis, avons-nous dit, aux lois de Ohm, on voit que la force électromotrice qui lui a donné naissance sera

$$l \times - evC' = - elvC';$$

les quantités e, l dépendant toutes les deux de la nature et de la forme du conducteur induit, nous pouvons poser $el = \varepsilon$; nous aurons alors pour la force électromotrice du courant induit,

$$- \varepsilon v C',$$

et si nous revenons à l'élément infiniment petit Ds, nous devrons remplacer C' par CDs, de sorte que la force électromotrice qui réside dans cet élément aura pour valeur

$$- \varepsilon v CDs.$$

Or il est à peu près évident que la force électromotrice développée dans chaque élément est indépendante de celle qui se développe dans l'élément voisin. Ainsi il devient inutile de supposer que tous les éléments du conducteur induit sont animés de la même vitesse v, et soumis à la même composante électrodynamique C; il suffit d'admettre que v est la vitesse de l'élément Ds, C la composante électrodynamique suivant la direction de cette vitesse, pour le même élément, et alors l'expression $- \varepsilon v CDs$ représentera la force électromotrice spéciale à l'élément Ds.

Ainsi la loi générale de l'induction pourra s'énoncer de la manière suivante :

« Pour obtenir la force électromotrice qui s'établit dans l'élément Ds d'un conduc-
» teur qui se meut en présence d'un courant, multipliez une certaine constante ε par
» la vitesse de cet élément, et par la composante, suivant la direction inverse de
» cette vitesse, de la force électromagnétique qu'exercerait le courant inducteur sur
» l'élément Ds, supposé parcouru par un courant d'intensité 1. »

En nommant EDs la force électromotrice élémentaire de l'élément Ds du circuit induit, on pourra écrire

$$EDs = - \varepsilon v CDs. \tag{1}$$

Faraday et Lenz ont montré que cette constante ε restait la même, quelles que soient la forme et la nature du conducteur induit; ainsi sa valeur numérique dépend seulement des unités adoptées pour la longueur, le temps et l'intensité des courants. Cependant certains phénomènes prouvent que l'induction n'est pas aussi instantanée que la cause qui l'a produite, de sorte que la constante ε est, jusqu'à un certain point, une fonction du temps. J'éclaircirai cette partie de la question en traitant de l'induction dans les corps étendus suivant deux ou trois dimensions : dans les conducteurs à petite section, on peut se dispenser d'avoir égard à cette circonstance.

§ II.

Dans un circuit fermé et composé de conducteurs linéaires, je désigne par s la distance d'une tranche de longueur Ds à un point fixe de ce circuit pris pour origine :

la force électromotrice développée dans cette tranche, à l'époque t, est $\mathrm{E}\,\mathrm{D}s$, E étant à la fois une fonction de l'arc s et du temps t. Si E était indépendant du temps, tout serait constant dans le circuit; les lois de Ohm seraient applicables, et en appelant ω la résistance totale du circuit, l'intensité du courant induit serait

$$\frac{1}{\omega}\int \mathrm{E}\,\mathrm{D}s,$$

l'intégrale étant étendue à tout le circuit.

Je vais démontrer que cette formule est encore applicable dans le cas où E varie avec le temps, pourvu que cette variation ne soit pas extrêmement rapide: la vitesse d'écoulement de l'électricité pour une force électromotrice égale à 1 sera représentée par k; elle sera supposée très-grande, et la même dans toutes les parties du circuit.

On doit concevoir que l'induction agit en produisant à l'époque t, dans l'élément $\mathrm{D}s$, une tension électrique U, laquelle sera

$$\mathrm{U} + \frac{d\mathrm{U}}{ds}\,\mathrm{D}s$$

dans l'élément voisin : la différence de ces deux tensions produit une force électromotrice induite E, c'est-à-dire une tendance du fluide à se mouvoir du lieu de la plus forte tension au lieu de la plus faible, de sorte que l'on a

$$\mathrm{E} = -\frac{d\mathrm{U}}{ds},$$

et l'électricité qui va traverser la section q de l'élément $\mathrm{D}s$ pendant l'unité de temps sera

$$-qk\frac{d\mathrm{U}}{ds}.$$

D'autre part, soit u la tension électrique effective en $\mathrm{D}s$ à l'époque t, u étant une fonction de s et de t; l'écoulement actuel d'électricité par la section q sera

$$-qk\frac{du}{ds};$$

l'accumulation d'électricité dans l'élément $\mathrm{D}s$ sera donc

$$qk\frac{d^2u}{ds^2}\,\mathrm{D}s.$$

En ajoutant l'effet de l'induction à l'époque t, l'électricité de $\mathrm{D}s$ devra être augmentée de

$$qk\frac{d^2\mathrm{U}}{ds^2}\cdot\mathrm{D}s = -qk\frac{d\mathrm{E}}{ds}\,\mathrm{D}s.$$

Ainsi l'augmentation effective d'électricité, dans le cylindre de longueur $\mathrm{D}s$ et de section q, sera

$$qk\left(\frac{d^2u}{ds^2} - \frac{d\mathrm{E}}{ds}\right)\mathrm{D}s.$$

Mais il est visible, d'autre part, que cette augmentation peut être représentée par

$$q\,\mathrm{D}s\,\frac{du}{dt},$$

de sorte que l'on a

$$\frac{du}{dt} = k\left(\frac{d^2u}{ds^2} - \frac{d\mathrm{E}}{ds}\right),$$

où E est une fonction supposée connue de t et de s.

Lorsque u aura été déterminée par cette équation, la quantité d'électricité qui traverse la section q dans l'unité de temps, c'est-à-dire la force du courant, sera

$$-kq\left(\frac{du}{ds} - \mathrm{E}\right).$$

L'intégrale complète de la précédente équation se compose de deux parties dont l'une est l'intégrale de

$$\frac{du}{dt} = k\,\frac{d^2u}{ds^2},$$

et dont la seconde dépend de la forme de la fonction E. La première partie peut se développer en série suivant les puissances négatives de e^{kt}, e étant la base du système népérien, et elle s'évanouit pour des valeurs sensibles de t, à cause de la grandeur du nombre k. La seconde partie peut se développer suivant les puissances négatives de k, sous la forme

$$u = a + bs + \int \mathrm{E}\mathrm{D}s + \frac{1}{k}\int\!\!\int\!\!\int \frac{d\mathrm{E}}{dt}\,\mathrm{D}s^3 + \frac{1}{k^2}\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \frac{d^2\mathrm{E}}{dt^2}\,\mathrm{D}s^5 + \ldots,$$

a et b étant deux constantes arbitraires. Si donc E ne change pas de valeur extrêmement vite avec le temps, c'est-à-dire si $\frac{d\mathrm{E}}{dt}$ n'a pas une grandeur comparable à celle du nombre k, on pourra écrire

$$u = a + bs + \int \mathrm{E}\mathrm{D}s.$$

Le conducteur étant fermé et de longueur L, la tension u doit être la même pour $s = 0$ et pour $s = \mathrm{L}$; d'où l'on déduit

$$0 = b\mathrm{L} + \int_0^{\mathrm{L}} \mathrm{E}\mathrm{D}s,$$

équation qui détermine b. On a ainsi pour l'intensité du courant,

$$-qk\left(\frac{du}{ds} - \mathrm{E}\right) = -qkb = \frac{qk}{\mathrm{L}}\int_0^{\mathrm{L}} \mathrm{E}\mathrm{D}s.$$

Cette formule est précisément celle que l'on déduirait de la loi de Ohm; puisque

$\int_0^L \mathrm{ED}s$ est la somme des forces électromotrices, et que $\frac{\mathrm{L}}{qk}$ représente celle des résistances. A la vérité, j'ai supposé le conducteur homogène et d'égale section dans toute son étendue ; mais les conditions contraires n'altéreraient pas le résultat que nous venons d'obtenir.

§ III.

Il résulte des deux précédents paragraphes que l'intensité du courant induit peut s'exprimer par l'intégrale

$$-\varepsilon\varepsilon'\mathrm{S}.v\mathrm{CD}s,$$

ε' étant le quotient de l'unité par la résistance totale du conducteur induit, et l'intégrale S devant être étendue à tout ce conducteur.

Nous mesurerons la force du courant par l'action qu'il exerce en un temps donné, par exemple sur une aiguille magnétique. Le coefficient constant ε sera déterminé en opérant sur un courant d'induction qui ne varie pas avec le temps, et en égalant l'expression ci-dessus à l'effet total produit dans l'unité de temps.

Lorsque le courant induit variera avec le temps, l'action qui mesure son énergie sera, pendant l'élément de temps dt,

$$(1) \qquad -\varepsilon\varepsilon' dt\,\mathrm{S}.v\mathrm{CD}s;$$

et entre les époques t_0, t_1, elle sera

$$(2) \qquad -\varepsilon\varepsilon'\int_{t_0}^{t_1} dt\,\mathrm{S}.v\mathrm{CD}s.$$

Je nommerai l'expression (1) l'action momentanée du courant (*differential Ström*), et je la désignerai par la lettre D. Je représenterai par J l'expression (2); ce sera l'action finie du courant (*integral Ström*) : c'est ordinairement cette dernière action qui est mesurée.

Ces deux expressions peuvent se mettre sous une autre forme. Nommons w l'arc de la route parcourue par le milieu de l'élément Ds ; on aura

$$v = \frac{dw}{dt},$$

et ainsi

$$(3) \qquad \mathrm{D} = -\varepsilon\varepsilon'\mathrm{S}.\mathrm{C}dw\mathrm{D}s,$$

$$(4) \qquad \mathrm{J} = -\varepsilon\varepsilon'\int_{w_0}^{w_1}\mathrm{S}.\mathrm{C}dw\mathrm{D}s,$$

w_0 et w_1 étant les valeurs de w correspondant à $t = t_0$, $t = t_1$.

Ainsi l'action momentanée peut être considérée comme se rapportant au chemin parcouru dw, et l'action finie comme se rapportant au chemin compris entre w_0 et w_1. Leurs valeurs ne dépendent donc pas de la vitesse de transport du circuit, mais seulement de la longueur des chemins parcourus.

Le produit $\varepsilon C dw Ds$ représente la vitesse virtuelle (*virtuelle Moment*) de la force électrodynamique que l'inducteur exercerait sur l'élément Ds, supposé parcouru par un courant d'intensité ε : je le nomme *moment virtuel de l'inducteur*. La force électromotrice du courant momentané est la somme de ces moments virtuels, pris avec le signe —, dans toute l'étendue du circuit induit, c'est-à-dire $-\varepsilon S.C dw Ds$; mais cette somme représente, comme on sait, la demi-perte de force vive dans l'instant dt: ainsi on peut dire que « la force électromotrice de l'action finie du courant est égale à la demi-perte de force vive que le circuit induit parcouru par le courant ε éprouverait par suite de l'action électrodynamique du courant inducteur, en se mouvant de w_0 à w_1. »

Lorsque le circuit induit, au lieu d'être parcouru par le courant ε, le sera par le courant

$$-\varepsilon\varepsilon' S.vCDs,$$

la perte de force vive dans le temps dt sera

$$(2\varepsilon S.C dw Ds)(-\varepsilon' S.vCDs) = -2\varepsilon\varepsilon' dt\,(S.vCDs)^2.$$

Je désignerai par x, y, z les trois coordonnées rectangulaires de l'élément Ds, et ses projections sur les axes par Dx, Dy, Dz; par dx, dy, dz les projections, sur les mêmes axes, du chemin dw parcouru dans le temps dt: les composantes de l'action électrodynamique de l'inducteur agissant sur l'élément Ds supposé parcouru par un courant 1 seront représentées par

$$X_\sigma Ds,\quad Y_\sigma Ds,\quad Z_\sigma Ds.$$

Ces composantes seront positives, si elles agissent dans le sens des coordonnées positives croissantes.

On a alors

$$CDs = Ds\left(X_\sigma \frac{dx}{dw} + Y_\sigma \frac{dy}{dw} + Z_\sigma \frac{dz}{dw}\right).$$

Les équations (3) et (4) deviennent ainsi

$$D = -\varepsilon\varepsilon' S.Ds\,(X_\sigma dx + Y_\sigma dy + Z_\sigma dz), \tag{5}$$

$$J = -\varepsilon\varepsilon' \int_{w_0}^{w_1} S.Ds\,(X_\sigma dx + Y_\sigma dy + Z_\sigma dz). \tag{6}$$

Le signe S se rapporte aux divers éléments du circuit induit, le signe $\int$ aux éléments de la route parcourue.

Si le circuit induit se meut parallèlement à lui-même, dx, dy, dz sont les mêmes dans tout le circuit, et l'on peut écrire

$$(7)\qquad J = -\varepsilon\varepsilon'\int_{w_0}^{w_1}(dx\,\mathrm{S}.\mathrm{X}_\sigma \mathrm{D}s + dy\,\mathrm{S}.\mathrm{Y}_\sigma \mathrm{D}s + dz\,\mathrm{S}.\mathrm{Z}_\sigma \mathrm{D}s).$$

Si la quantité sous le signe $\int$ est la différentielle exacte d'une fonction de x, y, z que je représenterai par V, en sorte que l'on ait

$$(8)\qquad d\mathrm{V} = dx\,\mathrm{S}.\mathrm{X}_\sigma \mathrm{D}s + dy\,\mathrm{S}.\mathrm{Y}_\sigma \mathrm{D}s + dz\,\mathrm{S}.\mathrm{Z}_\sigma \mathrm{D}s,$$

en appelant V_{w_0}, V_{w_1} les valeurs de cette fonction pour les positions initiale et finale du conducteur mobile, on aura

$$(9)\qquad J = -\varepsilon\varepsilon'(\mathrm{V}_{w_1} - \mathrm{V}_{w_0}).$$

Posons alors $\varepsilon\mathrm{V} = p$, p étant un paramètre arbitraire; cette dernière équation sera celle de la surface de niveau d'un fluide de densité ε sollicité en chaque point par la résultante des forces

$$\mathrm{S}.\mathrm{X}_\sigma \mathrm{D}s,\quad \mathrm{S}.\mathrm{Y}_\sigma \mathrm{D}s,\quad \mathrm{S}.\mathrm{Z}_\sigma \mathrm{D}s,$$

et p sera la pression du fluide, constante sur une même surface de niveau, mais variable de l'une des surfaces à sa voisine.

On peut écrire alors

$$(10)\qquad J = -\varepsilon'(p_{w_1} - p_{w_0}),$$

et l'on voit que, si la condition (8) est satisfaite, « la force électromotrice de l'action finie du courant sera égale à la différence des pressions sur la surface de niveau initiale, et sur la surface finale, » et cette force sera indépendante de la route suivie par le conducteur pour passer de sa position initiale à sa position finale.

§ IV.

On doit se rappeler que C représente la somme algébrique des actions exercées par chaque élément de l'inducteur sur l'élément constant Ds du conducteur induit, supposé parcouru par un courant égal à 1, chacune de ces actions étant préalablement estimée suivant la direction du mouvement de l'élément induit.

Soient σ l'arc du circuit inducteur compté d'une origine fixe, $\mathrm{D}\sigma$ un élément de cet arc, et $c\mathrm{D}\sigma$ l'action électrodynamique due à cet élément et qui entre dans la somme C. On voit qu'en remplaçant, dans $\varepsilon v\mathrm{C}\mathrm{D}s$, C par $c\mathrm{D}\sigma$, on aura

$$-\varepsilon v c\,\mathrm{D}s\,\mathrm{D}\sigma$$

pour la force électromotrice développée en Ds par l'influence de l'élément $\mathrm{D}\sigma$. En intégrant cette expression dans toute la longueur s du circuit induit, intégration que je continuerai à représenter par le signe S, et en intégrant dans toute la longueur σ du circuit inducteur, intégration à laquelle j'attribuerai le signe Σ, on aura la force électromotrice totale engendrée par le circuit inducteur dans le circuit induit.

J'ai supposé jusqu'ici que le circuit inducteur était en repos, et le circuit induit, en mouvement. Or l'induction ne peut évidemment dépendre que du mouvement relatif des deux circuits; car, quels que soient leurs mouvements propres, on peut ramener l'un d'eux au repos en donnant au système un mouvement commun, de translation ou de rotation, convenablement choisi, et ce mouvement commun ne peut développer aucun phénomène d'induction, comme le prouve l'exemple de la terre et des circuits fermés et susceptibles d'induction qui sont placés à sa surface.

On n'altérera donc en rien l'apparence des phénomènes à observer, en supposant l'élément Ds en repos, et transportant à $D\sigma$ son mouvement, pris en sens contraire. Nous considérerons donc $D\sigma$ comme se mouvant avec une vitesse v, v étant actuellement fonction de σ. La force électromotrice sera maintenant

$$+\,\varepsilon v c Ds\, D\sigma,$$

expression dans laquelle le facteur $cDs\,D\sigma$ représente l'action électrodynamique exercée par $D\sigma$ sur l'unité positive de courant en Ds, décomposée parallèlement au mouvement de $D\sigma$, et suivant le sens de ce mouvement.

En nommant γ la réaction simultanée de Ds sur $D\sigma$ décomposée suivant la même direction, on a $\gamma = -c$, et la force électromotrice développée en Ds par $D\sigma$ deviendra

$$-\,\varepsilon v \gamma Ds D\sigma.$$

En intégrant, relativement à toute la longueur de l'arc s, cette expression dans laquelle γ est le seul facteur variable, nous pourrons représenter l'intégrale $S.\gamma Ds$ par Γ, et la force électromotrice développée par l'élément $D\sigma$ dans tout le circuit du conducteur induit sera

$$(1) \qquad -\,\varepsilon v \Gamma D\sigma = E' D\sigma.$$

On voit que Γ est la composante, parallèle au mouvement de l'inducteur, de l'action électrodynamique exercée par le conducteur induit parcouru par l'unité de courant sur l'élément $D\sigma$.

En étendant l'intégrale de la formule (1) à tout le circuit inducteur, on aura, comme ci-dessus, pour l'expression de l'action momentanée, que je nommerai D', et qui correspond à l'élément de temps dt,

$$(2) \qquad D' = -\,\varepsilon\varepsilon' dt\, \Sigma\, v\Gamma D\sigma,$$

et pour celle de l'action finie du même courant, ou J',

$$(3) \qquad J' = -\,\varepsilon\varepsilon' \int_{t_0}^{t_1} dt\, \Sigma . v\Gamma D\sigma.$$

En appelant ω l'arc décrit par le milieu de $D\sigma$ et désignant l'élément de route par $d\omega$, on pourra mettre ces expressions sous la forme

(4) $$D' = -\varepsilon\varepsilon'\Sigma.\Gamma dw\, D\sigma,$$

(5) $$J' = -\varepsilon\varepsilon'\int_{w_0}^{w_1}\Sigma.\Gamma dw\, D\sigma.$$

Si l'on compare la formule (1) de ce paragraphe avec la formule (1) du § I, on voit que, dans celle-là, CDs, et dans celle-ci, $\Gamma D\sigma$ représentent la composante efficace [*] de l'action électrodynamique du conducteur en repos sur l'élément mobile, le conducteur induit étant toujours censé parcouru par un courant égal à l'unité.

Je vais démontrer maintenant que, si les circuits sont fermés, il se développera la même force électromotrice, quel que soit celui des deux conducteurs qui se meuve par rapport à l'autre.

Je représenterai par ξ, η, ζ les coordonnées courantes du milieu de l'élément $D\sigma$ supposé mobile; $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ seront les projections, sur les trois axes coordonnés, de l'élément de route dw. Les trois composantes de l'action électrodynamique exercée par le conducteur induit en repos et parcouru par l'unité de courant sur l'élément $D\sigma$ du conducteur mobile, seront

$$X_s D\sigma,\quad Y_s D\sigma,\quad Z_s D\sigma.$$

On aura alors

$$\Gamma D\sigma = \left(X_s\frac{d\xi}{dw} + Y_s\frac{d\eta}{dw} + Z_s\frac{d\zeta}{dw}\right)D\sigma,$$

et les équations (4) et (5) deviennent

(6) $$D' = -\varepsilon\varepsilon'\Sigma.(X_s d\xi + Y_s d\eta + Z_s d\zeta)D\sigma,$$

(7) $$J' = -\varepsilon\varepsilon'\int_{w_0}^{w_1}\Sigma.(X_s d\xi + Y_s d\eta + Z_s d\zeta)D\sigma.$$

Soient maintenant $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ les coordonnées de l'élément Ds. Les *accents placés au bas des lettres* indiquent ici et indiqueront dans la suite de ce Mémoire que ces coordonnées se rapportent à un conducteur *en repos;* si ce conducteur devenait mobile, les axes de ces mêmes coordonnées seraient censés entraînés dans ce mouvement, de sorte que $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ conserveraient leurs valeurs. Les mêmes coordonnées non affectées d'accents se rapportent au conducteur mobile et à des axes fixes dans l'espace; elles changent pendant le mouvement du conducteur.

Je representerai par $R\,Ds\,D\sigma$ la valeur absolue de l'action électrodynamique de l'unité de courant en Ds sur l'élément $D\sigma$ parcouru par un courant inducteur égal à j. D'après les lois d'Ampère, on a

(8) $$R = \frac{j}{r^2}\left(r\frac{D^2 r}{Ds\,D\sigma} - \frac{1}{2}\frac{Dr}{Ds}\cdot\frac{Dr}{D\sigma}\right),$$

[*] Je désignerai sous le nom de *composante efficace* la composante d'une action électrodynamique suivant la direction du mouvement propre de l'élément mobile. A. B.

r étant la distance qui sépare Ds de $D\sigma$, de sorte que l'on a

(9) $$r^2 = (x_{,} - \xi)^2 + (y_{,} - \eta)^2 + (z_{,} - \zeta)^2.$$

Je nomme

$$XDsD\sigma, \quad YDsD\sigma, \quad ZDsD\sigma,$$

les trois composantes de cette force, de sorte que l'on ait

$$X = -\frac{(x_{,} - \xi)}{r}R, \quad Y = -\frac{(y_{,} - \eta)}{r}R, \quad Z = -\frac{(z_{,} - \zeta)}{r}R.$$

Il en résulte

$$X_s = -S.\frac{x_{,} - \xi}{r}RDs, \quad Y_s = -S.\frac{y_{,} - \eta}{r}RDs, \quad Z_s = -S.\frac{z_{,} - \zeta}{r}RDs.$$

Comme $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ sont des grandeurs constantes, on a, en faisant varier t,

$$(x_{,} - \xi)\,d\xi + (y_{,} - \eta)\,d\eta + (z_{,} - \zeta)\,d\zeta = -rdr;$$

donc

$$X_s d\xi + Y_s d\eta + Z_s d\zeta = S.RdrDs,$$

et, par suite,

(10) $$D' = -\varepsilon\varepsilon'\Sigma S.RdrDsD\sigma,$$

(11) $$J' = -\varepsilon\varepsilon'\int_{r_0}^{r_1}\Sigma S.RdrDsD\sigma.$$

Les signes d et $\int$ se rapportent toujours au changement de position du conducteur mobile, les signes S et Σ à l'intégration le long de l'arc s ou le long de l'arc σ, le signe D à la différentiation par rapport à ces mêmes arcs.

Soient $\xi_{,}$, $\eta_{,}$, $\zeta_{,}$ les coordonnées d'un point du conducteur mobile par rapport à des axes mobiles avec lui; $\xi_{,}$, $\eta_{,}$, $\zeta_{,}$ seront indépendants du temps, et l'on aura

(12) $$\begin{cases} \xi = \alpha + a\xi_{,} + b\eta_{,} + c\zeta_{,}, \\ \eta = \beta + a_{,}\xi_{,} + b_{,}\eta_{,} + c_{,}\zeta_{,}, \\ \zeta = \gamma + a_{,,}\xi_{,} + b_{,,}\eta_{,} + c_{,,}\zeta_{,}. \end{cases}$$

Les quantités a, b, c, $a_{,}$, $b_{,}$, $c_{,}$, etc., sont soumises à des relations connues; elles sont d'ailleurs, ainsi que α, β, γ, des fonctions du temps déterminées par la nature du mouvement du conducteur mobile.

Ainsi, en différentiant par rapport au temps, on aura

$$d\xi = d\alpha + \xi_{,}da + \eta_{,}db + \zeta_{,}dc,$$
$$d\eta = \text{etc.}\ldots,$$

et, en différentiant par rapport à l'arc σ,

$$D\xi = aD\xi_, + bD\eta_, + cD\zeta_,,$$
$$D\eta = \text{etc.}\ldots$$

La substitution des valeurs de ξ, η, ζ dans l'équation (9) donne

$$\begin{aligned} r^2 = {} & (x_, - \alpha)^2 + (y_, - \beta)^2 + (z_, - \gamma)^2 + \xi_,^2 + \eta_,^2 + \zeta_,^2 \\ & - 2\xi_, [a(x_, - \alpha) + a_,(y_, - \beta) + a_{,,}(z_, - \gamma)] \\ & - 2\eta_, [b(x_, - \alpha) + b_,(y_, - \beta) + b_{,,}(z_, - \gamma)] \\ & - 2\zeta_, [c(x_, - \alpha) + c_,(y_, - \beta) + c_{,,}(z_, - \gamma)]. \end{aligned}$$

Si, au contraire, c'est le courant induit qui se meut, l'inducteur restant fixe, on a, au lieu de l'équation (9),

$$r^2 = (x - \xi_,)^2 + (y - \eta_,)^2 + (z - \gamma_,)^2;$$

et si l'on veut exprimer x en $x_,$, y en $y_,$, z en $z_,$, il faut, dans les équations (12), remplacer ξ, η, ζ, $\xi_,$, $\eta_,$, $\zeta_,$ par $x_,$, $y_,$, $z_,$, x, y, z: on en déduit

$$(13) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= (x_, - \alpha)\,a + (y_, - \beta)\,a_, + (z_, - \gamma)\,a_{,,}, \\ y &= (x_, - \alpha)\,b + (y_, - \beta)\,b_, + (z_, - \gamma)\,b_{,,}, \\ z &= (x_, - \alpha)\,c + (y_, - \beta)\,c_, + (z_, - \gamma)\,c_{,,}. \end{aligned} \right.$$

Si l'on substitue ces valeurs de x, y, z dans l'expression de r^2, après le développement, on retombe sur la même expression que ci-dessus.

Ainsi r a la même valeur dans les deux cas; il en est de même de ses coefficients différentiels par rapport à s et à σ: donc l'action électrodynamique R est la même. L'élément dr conservant aussi la même grandeur, $\mathrm{R}\,dr\,\mathrm{D}s\,\mathrm{D}\sigma$ ne change pas: donc, si dans les deux cas les limites d'intégration par rapport à s et à σ restent les mêmes, D' conservera dans l'équation (10) la même valeur, et la force électromotrice engendrée, ou $\frac{\mathrm{D}'}{\varepsilon'}$, sera la même, quel que soit le conducteur en repos.

Ainsi, quel que soit celui des deux conducteurs dans lequel on fasse circuler le courant d'intensité j, l'autre étant parcouru par un courant égal à 1, la force électromotrice développée par l'induction aura la même valeur dans les deux cas.

Donc « la force électromotrice développée par induction dans un circuit passif placé » en présence d'un circuit actif parcouru par le courant j, reste la même quel que soit » celui des deux circuits qui est le circuit actif, et aussi quel que soit celui des deux » qui est mobile, pourvu que le mouvement relatif des deux circuits reste le même. » L'intensité du courant induit successivement dans l'un et dans l'autre des deux circuits est alors inversement proportionnelle aux résistances de ces circuits. »

Cette loi peut aussi s'appliquer à des portions de circuits; mais une partie quelconque du circuit mobile ne peut rester inactive qu'autant qu'elle participe au repos du circuit immobile; et de même une partie du circuit fixe ne peut rester inactive que si elle participe au mouvement général du circuit mobile : alors on peut considérer l'un des circuits comme réduit à sa partie active, et comme n'étant pas fermé sur lui-même. On connaît des exemples de dispositions semblables; Weber a fait connaître un de ces modes dans ses expériences sur l'induction unipolaire. Mais dans tous les cas pareils, où l'un des deux conducteurs se compose de deux parties, l'une fixe, l'autre mobile, il faut, si l'on transporte le mouvement de l'un des deux conducteurs à l'autre, n'appliquer la loi précédente que dans le cas où les limites de l'intégration, par rapport à s ou à σ, restent les mêmes après ce changement.

Cette loi n'est pas seulement applicable au cas de deux circuits; elle l'est aussi à celui de deux systèmes de circuits, l'un fixe et l'autre mobile.

Montrons, en terminant, que les formules (5) et (6) du paragraphe précédent dérivent facilement des formules (6) et (7) de ce paragraphe. De ces dernières, on déduit d'abord les formules (10) et (11). En substituant dans ces dernières la valeur de r, relative au cas où σ est fixe, et où s devient mobile, savoir,

$$r^2 = (x - \xi_,)^2 + (y - \eta_,)^2 + (z - \zeta_,)^2,$$

nous aurons

$$dr = \left(\frac{x - \xi_,}{r}\right) dx + \left(\frac{y - \eta_,}{r}\right) dy + \left(\frac{z - \zeta_,}{r}\right) dz,$$

$$\mathrm{D}' = -\varepsilon\varepsilon' \Sigma \mathrm{S}.\mathrm{D}s\,\mathrm{D}\sigma\,\mathrm{R} \left(\frac{x - \xi_,}{r} dx + \frac{y - \eta_,}{r} dy + \frac{z - \zeta_,}{r} dz\right).$$

Mais $\mathrm{X}_\sigma \mathrm{D}s$, $\mathrm{Y}_\sigma \mathrm{D}s$, $\mathrm{Z}_\sigma \mathrm{D}s$ sont les composantes de l'action électrodynamique exercée par l'arc σ sur $\mathrm{D}s$, et l'on a

$$\mathrm{X}_\sigma = \Sigma.\mathrm{D}\sigma\,\mathrm{R}\,\frac{x - \xi_,}{r},$$

$$\mathrm{Y}_\sigma = \Sigma.\mathrm{D}\sigma\,\mathrm{R}\,\frac{y - \eta_,}{r},$$

$$\mathrm{Z}_\sigma = \Sigma.\mathrm{D}\sigma\,\mathrm{R}\,\frac{z - \zeta_,}{r}.$$

Donc

$$\mathrm{D}' = -\varepsilon\varepsilon' \mathrm{S}.\mathrm{D}s\,(\mathrm{X}_\sigma dx + \mathrm{Y}_\sigma dy + \mathrm{Z}_\sigma dz);$$

ce qui est la formule (5) du paragraphe précédent. Il en serait de même pour la formule (6) de ce paragraphe.

§ V.

Les considérations précédentes s'appliquent à l'induction développée par le pôle d'un aimant, si, conformément aux idées d'Ampère, on considère un pôle d'aimant comme le point de départ d'un solénoïde dont l'autre extrémité est à l'infini. Des lois de l'induction magnétique unipolaire, on déduit celles de l'induction par les aimants, celles de l'induction produite par l'aimantation et la désaimantation, et même celles de l'induction galvanique ordinaire, attendu que, d'après une autre loi d'Ampère, un courant fermé peut toujours être assimilé à un certain système de pôles magnétiques.

Lorsqu'un solénoïde est en mouvement par rapport à un conducteur fixe, on emploiera, pour déterminer l'action soit momentanée, soit finie du courant induit, les formules (2) et (3) du paragraphe précédent, et l'on prendra, par rapport à l'arc σ du solénoïde, l'intégrale de $v\Gamma D\sigma$. Mais on peut substituer au mouvement du solénoïde le mouvement inverse du conducteur. Cela est évident pour le cas d'un conducteur fermé. Si le circuit n'est pas complet, il devra satisfaire aux conditions déjà énoncées à la page 125, d'après lesquelles la substitution précédente est permise; une portion de ce conducteur doit alors être liée au solénoïde, de manière à participer à son mouvement si le solénoïde se meut, et à rester fixe dans le cas où le solénoïde serait fixe lui-même.

Je vais démontrer maintenant que, si le conducteur induit forme un circuit complet, l'induction ne dépend que des mouvements des deux pôles du solénoïde; que, si le circuit est incomplet, l'induction se compose de deux termes dont l'un dépend seulement des mouvements des deux pôles, tandis que l'autre terme dépend du mouvement des deux extrémités du conducteur relativement au solénoïde considéré comme immobile.

Nous allons donc considérer un conducteur se mouvant dans le voisinage d'un solénoïde fixe, et unipolaire, son autre pôle étant situé à l'infini.

Les signes s, Ds, x, y, z, Dx, Dy, Dz se rapporteront au conducteur induit et conserveront leurs significations antérieures. Le chemin de l'élément Ds sera désigné par w, l'élément de la route par dw, et ses projections par dx, dy, dz. Les lettres $\xi_{,}$, $\eta_{,}$, $\zeta_{,}$ seront les coordonnées du pôle du solénoïde.

L'action finie du courant induit sera, d'après la formule (6) du § III,

$$J = -\varepsilon\varepsilon' \int_{w_0}^{w_1} \mathrm{S}.Ds\,(X_\sigma dx + Y_\sigma dy + Z_\sigma dz). \tag{1}$$

D'après des formules connues d'Ampère, les composantes de l'action d'un tel pôle de solénoïde sur l'élément Ds parcouru par un courant égal à 1, sont

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} X_\sigma Ds &= \frac{\varkappa'}{r^3}\left[(z-\zeta_{,})Dy - (y-\eta_{,})Dz\right],\\ Y_\sigma Ds &= \frac{\varkappa'}{r^3}\left[(x-\xi_{,})Dz - (z-\zeta_{,})Dx\right],\\ Z_\sigma Ds &= \frac{\varkappa'}{r^3}\left[(y-\eta_{,})Dx - (x-\xi_{,})Dy\right];\end{aligned}\right.$$

on a d'ailleurs

$$r^2 = (x-\xi_{,})^2 + (y-\eta_{,})^2 + (z-\zeta_{,})^2. \tag{3}$$

Quant au facteur constant $\varkappa'$, il a pour valeur $\frac{1}{2}\alpha\lambda j$, j étant l'intensité du courant qui parcourt les circuits du solénoïde, λ l'aire constante de l'un de ces circuits, et α le nombre de circuits partiels contenu dans une longueur prise sur l'axe du solénoïde et égale à l'unité.

Soient maintenant $x_{\prime}, y_{\prime}, z_{\prime}$ les coordonnées fixes de l'élément Ds, par rapport à des axes mobiles avec le conducteur; on aura

$$(4)\quad \begin{cases} x = \alpha + ax_{\prime} + by_{\prime} + cz_{\prime}, \\ y = \beta + a_{\prime}x_{\prime} + b_{\prime}y_{\prime} + c_{\prime}z_{\prime}, \\ z = \gamma + a_{\prime\prime}x_{\prime} + b_{\prime\prime}y_{\prime} + c_{\prime\prime}z_{\prime}. \end{cases}$$

α, β, γ sont des fonctions du temps, d'ailleurs indépendantes entre elles; $a, b, c, a_{\prime}, b_{\prime}, c_{\prime}, a_{\prime\prime}, b_{\prime\prime}, c_{\prime\prime}$ sont aussi des fonctions du temps liées entre elles par six équations connues.

On a alors, en différentiant par rapport au temps,

$$(5)\quad \begin{cases} dx = d\alpha + x_{\prime}da + y_{\prime}db + z_{\prime}dc, \\ dy = d\beta + x_{\prime}da_{\prime} + y_{\prime}db_{\prime} + z_{\prime}dc_{\prime}, \\ dz = d\gamma + x_{\prime}da_{\prime\prime} + y_{\prime}db_{\prime\prime} + z_{\prime}dc_{\prime\prime}, \end{cases}$$

et, en différentiant par rapport à l'arc s,

$$(6)\quad \begin{cases} Dx = a\,Dx_{\prime} + b\,Dy_{\prime} + c\,Dz_{\prime}, \\ Dy = a_{\prime}Dx_{\prime} + b_{\prime}Dy_{\prime} + c_{\prime}Dz_{\prime}, \\ Dz = a_{\prime\prime}Dx_{\prime} + b_{\prime\prime}Dy_{\prime} + c_{\prime\prime}Dz_{\prime}. \end{cases}$$

Éliminons $x_{\prime}, y_{\prime}, z_{\prime}$ des équations (5) au moyen des équations (4); nous aurons

$$\begin{aligned} dx &= d\alpha + (z - \gamma)\,dM - (y - \beta)\,dN, \\ dy &= d\beta + (x - \alpha)\,dN - (z - \gamma)\,dL, \\ dz &= d\gamma + (y - \beta)\,dL - (x - \alpha)\,dM, \end{aligned}$$

en faisant, pour abréger,

$$(7)\quad \begin{cases} dL = a_{\prime}da_{\prime\prime} + b_{\prime}db_{\prime\prime} + c_{\prime}dc_{\prime\prime} = -(a_{\prime\prime}da_{\prime} + b_{\prime\prime}db_{\prime} + c_{\prime\prime}dc_{\prime}), \\ dM = a_{\prime\prime}da + b_{\prime\prime}db + c_{\prime\prime}dc = -(a\,da_{\prime\prime} + b\,db_{\prime\prime} + c\,dc_{\prime\prime}), \\ dN = a\,da_{\prime} + b\,db_{\prime} + c\,dc_{\prime} = -(a_{\prime}da + b_{\prime}db + c_{\prime}dc). \end{cases}$$

Je pose maintenant

$$(8)\quad \begin{cases} d\alpha + (\zeta_{\prime} - \gamma)\,dM - (\eta_{\prime} - \beta)\,dN = d\lambda, \\ d\beta + (\xi_{\prime} - \alpha)\,dN - (\zeta_{\prime} - \gamma)\,dL = d\mu, \\ d\gamma + (\eta_{\prime} - \beta)\,dL - (\xi_{\prime} - \alpha)\,dM = d\nu. \end{cases}$$

Les équations (5) deviennent

$$(9)\quad \begin{cases} dx = d\lambda + (z - \zeta_{\prime})\,dM - (y - \eta_{\prime})\,dN, \\ dy = d\mu + (x - \xi_{\prime})\,dN - (z - \zeta_{\prime})\,dL, \\ dz = d\nu + (y - \eta_{\prime})\,dL - (x - \xi_{\prime})\,dM. \end{cases}$$

On sait, par la théorie mécanique des mouvements de rotation des corps, que dL

représente l'angle de rotation autour de l'axe des x pendant le temps dt; que $d\mathrm{M}$, $d\mathrm{N}$ ont la même signification par rapport aux axes des y et des z. On voit, par les équations (8), que $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$ représentent les petits déplacements qu'éprouverait, parallèlement aux x, y, z, le pôle $(\xi_{,}, \eta_{,}, \zeta_{,})$, s'il participait au mouvement du conducteur.

On voit aussi que les quantités dx, dy, dz se composent : 1° des déplacements $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$, du pôle du solénoïde supposé pour un instant lié avec le conducteur; 2° des déplacements produits par la rotation simultanée du conducteur autour de ce pôle.

La substitution de ces valeurs de dx, dy, dz dans le second membre de l'équation (1) le décompose en deux parties, l'une dépendante de $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$, l'autre dépendante de la rotation. Je représente la première de ces parties par J_p, la seconde par J_d.

On trouve ainsi

$$(10)\qquad \mathrm{J}_p = -\varepsilon\varepsilon' \int_{w_0}^{w_1} \mathrm{S}.\mathrm{D}s\,(\mathrm{X}_\sigma d\lambda + \mathrm{Y}_\sigma d\mu + \mathrm{Z}_\sigma d\nu),$$

$$(11)\qquad \mathrm{J}_d = -\varepsilon\varepsilon' \int_{w_0}^{w_1} \mathrm{S}.\mathrm{D}s \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{X}_\sigma [(z-\zeta_{,})\,d\mathrm{M} - (y-\eta_{,})\,d\mathrm{N}] \\ + \mathrm{Y}_\sigma [(x-\xi_{,})\,d\mathrm{N} - (z-\zeta_{,})\,d\mathrm{L}] \\ + \mathrm{Z}_\sigma [(y-\eta_{,})\,d\mathrm{L} - (x-\xi_{,})\,d\mathrm{M}] \end{array} \right\},$$

et

$$\mathrm{J} = \mathrm{J}_p + \mathrm{J}_d.$$

Si le conducteur est simplement soumis à un mouvement de translation, on aura $\mathrm{J}_d = 0$: s'il n'a qu'un mouvement de rotation autour du pôle du solénoïde, on aura, au contraire, $\mathrm{J}_p = 0$.

Développons J_p en y substituant les valeurs de $\mathrm{X}_\sigma \mathrm{D}s$, $\mathrm{Y}_\sigma \mathrm{D}s$, $\mathrm{Z}_\sigma \mathrm{D}s$, déduites des équations (2); puis remplaçons $\mathrm{D}x$, $\mathrm{D}y$, $\mathrm{D}z$ par leurs valeurs en $\mathrm{D}x_{,}$, $\mathrm{D}y_{,}$, $\mathrm{D}z_{,}$; nous aurons

$$(12)\qquad \mathrm{J}_p = -\varepsilon\varepsilon'\varkappa' \int \mathrm{S}.(\mathrm{A}\mathrm{D}x_{,} + \mathrm{B}\mathrm{D}y_{,} + \mathrm{C}\mathrm{D}z_{,}),$$

après avoir posé, pour abréger,

$$(13)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{A} = \dfrac{1}{r^3} \left\{ \begin{array}{l} [(z-\zeta_{,})\,a_{,} - (y-\eta_{,})\,a_{,,}]\,d\lambda \\ + [(x-\xi_{,})\,a_{,,} - (z-\zeta_{,})\,a\,]\,d\mu \\ + [(y-\eta_{,})\,a - (x-\xi_{,})\,a_{,}\,]\,d\nu \end{array} \right\}, \\[2ex] \mathrm{B} = \dfrac{1}{r^3} \{\text{la même expression, en y remplaçant } a \text{ par } b\}, \\[2ex] \mathrm{C} = \dfrac{1}{r^3} \{\text{la même expression, en y remplaçant } a \text{ par } c\}. \end{array} \right.$$

Substituons dans ces équations les valeurs de x, y, z en $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, tirées des équations (4); le facteur entre parenthèses de la première des formules (13) deviendra

$$(14)\qquad \left\{ \begin{array}{l} [(\gamma-\zeta_{,})\,a_{,} - (\beta-\eta_{,})\,a_{,,} + y_{,}(a_{,}b_{,,} - a_{,,}b_{,}) - z_{,}(a_{,,}c_{,} - a_{,}c_{,,})]\,d\lambda \\ + [(\alpha-\xi_{,})\,a_{,,} - (\gamma-\zeta_{,})\,a + y_{,}(a_{,,}b - ab_{,,}) - z_{,}(ac_{,,} - a_{,,}c)]\,d\mu \\ + [(\beta-\eta_{,})\,a - (\alpha-\xi_{,})\,a_{,} + y_{,}(ab_{,} - a_{,}b) - z_{,}(a_{,}c - ac_{,})]\,d\nu. \end{array} \right.$$

Or les quantités a, b, c, $a_{,}$, $b_{,}$, $c_{,}$, $a_{,,}$, $b_{,,}$, $c_{,,}$ sont liées par les relations

$$(15)\quad \left\{\begin{array}{lll} a_{,}b_{,,} - a_{,,}b_{,} = c, & a_{,,}c_{,} - a_{,}c_{,,} = b, & b_{,}c_{,,} - b_{,,}c_{,} = a, \\ a_{,,}b - ab_{,,} = c_{,}, & ac_{,,} - a_{,,}c = b_{,}, & b_{,,}c - bc_{,,} = a_{,}, \\ ab_{,} - a_{,}b = c_{,,}, & a_{,}c - ac_{,} = b_{,,}, & bc_{,} - b_{,}c = a_{,,}. \end{array}\right.$$

A la vérité, dans le cas général, les seconds membres de ces neuf équations pourraient offrir quelquefois le signe —; mais si l'un des systèmes d'axes dérive de l'autre par un mouvement de rotation, les formules (15) sont toujours exactes.

Ainsi le facteur (14) se change en

$$(16)\quad \left\{\begin{array}{l} \quad[(\gamma - \zeta_{,})a_{,} - (\beta - \eta_{,})a_{,,} + y_{,}c - z_{,}b]\,d\lambda \\ + [(\alpha - \xi_{,})a_{,,} - (\gamma - \zeta_{,})a + y_{,}c_{,} - z_{,}b_{,}]\,d\mu \\ + [(\beta - \eta_{,})a - (\alpha - \xi_{,})a_{,} + y_{,}c_{,,} - z_{,}b_{,,}]\,d\nu \end{array}\right.$$

Soient maintenant ξ, η, ζ les coordonnées du pôle par rapport aux axes de $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, lesquelles varient avec le temps; on aura

$$(17)\quad \left\{\begin{array}{l} \xi = a(\xi_{,} - \alpha) + a_{,}(\eta_{,} - \beta) + a_{,,}(\zeta_{,} - \gamma), \\ \eta = b(\xi_{,} - \alpha) + b_{,}(\eta_{,} - \beta) + b_{,,}(\zeta_{,} - \gamma), \\ \zeta = c(\xi_{,} - \alpha) + c_{,}(\eta_{,} - \beta) + c_{,,}(\zeta_{,} - \gamma). \end{array}\right.$$

On peut déduire de là les valeurs de $\alpha - \xi_{,}$, $\beta - \eta_{,}$, $\gamma - \zeta_{,}$ en fonction de ξ, η, ζ, les substituer dans la formule (16), et après les transformations fournies par les équations (15), cette dernière formule devient

$$\begin{array}{l} \quad[c\,(y_{,} - \eta) - b\,(z_{,} - \zeta)]\,d\lambda \\ + [c_{,}(y_{,} - \eta) - b_{,}(z_{,} - \zeta)]\,d\mu \\ + [c_{,,}(y_{,} - \eta) - b_{,,}(z_{,} - \zeta)]\,d\nu. \end{array}$$

J'écris maintenant

$$(18)\quad \left\{\begin{array}{l} ad\lambda + a_{,}d\mu + a_{,,}d\nu = dl, \\ bd\lambda + b_{,}d\mu + b_{,,}d\nu = dm, \\ cd\lambda + c_{,}d\mu + c_{,,}d\nu = dn. \end{array}\right.$$

La quantité A se réduira à la forme

$$A = \frac{1}{r^3}[(y_{,} - \eta)\,dn - (z_{,} - \zeta)\,dm],$$

et l'on aura de même

$$B = \frac{1}{r^3}[(z_{,} - \zeta)\,dl - (x_{,} - \xi)\,dn],$$

$$C = \frac{1}{r^3}[(x_{,} - \xi)\,dm - (y_{,} - \eta)\,dl].$$

La substitution de ces valeurs dans l'équation (12) la change en

$$J_p = -\varepsilon\varepsilon'\varkappa'\int_{w_0}^{w_1} S\cdot\frac{1}{r^3}\left\{\begin{array}{l}[(z_, - \zeta)\,Dy_, - (y_, - \eta)\,Dz_,]\,dl\\ +[(x_, - \xi)\,Dz_, - (z_, - \zeta)\,Dx_,]\,dm\\ +[(y_, - \eta)\,Dx_, - (x_, - \xi)\,Dy_,]\,dn\end{array}\right\}.$$

On doit se rappeler que $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$ sont les déplacements absolus qu'éprouve le pôle du solénoïde supposé lié avec le conducteur s, par rapport aux axes des x, y, z. Les équations (18) montrent que dl, dm, dn sont les composantes de ce même déplacement dans l'espace par rapport aux positions actuelles des axes des $x_,$, $y_,$, $z_,$ supposés fixes. Or le déplacement absolu du pôle supposé entraîné par le solénoïde est précisément inverse du déplacement du pôle relativement au solénoïde supposé fixe, et puisque les composantes de ce dernier déplacement sont, d'après nos conventions, $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$, on doit avoir

$$dl = -d\xi,\quad dm = -d\eta,\quad dn = -d\zeta.$$

D'ailleurs on peut aussi obtenir ces dernières équations en combinant entre elles les équations (8) et (17).

Ceci posé, l'équation ci-dessus devient

$$(19)\qquad J_p = -\varepsilon\varepsilon'\varkappa'\int_{w_0}^{w_1} S\cdot\frac{1}{r^3}\left\{\begin{array}{l}[(y_, - \eta)\,Dz_, - (z_, - \zeta)\,Dy_,]\,d\xi\\ +[(z_, - \zeta)\,Dx_, - (x_, - \xi)\,Dz_,]\,d\eta\\ +[(x_, - \xi)\,Dy_, - (y_, - \eta)\,Dx_,]\,d\zeta\end{array}\right\}.$$

Soient maintenant X_p, Y_p, Z_p les composantes de l'action électrodynamique exercée par tout le conducteur supposé fixe sur le pôle du solénoïde; on aura, par les formules d'Ampère,

$$(20)\qquad \left\{\begin{array}{l} X_p = S\cdot\dfrac{\varkappa'}{r^3}[(y_, - \eta)\,Dz_, - (z_, - \zeta)\,Dy_,],\\[2ex] Y_p = S\cdot\dfrac{\varkappa'}{r^3}[(z_, - \zeta)\,Dx_, - (x_, - \xi)\,Dz_,],\\[2ex] Z_p = S\cdot\dfrac{\varkappa'}{r^3}[(x_, - \xi)\,Dy_, - (y_, - \eta)\,Dx_,].\end{array}\right.$$

Donc

$$(21)\qquad J_p = -\varepsilon\varepsilon'\int_{w_0}^{w_1}(X_p\,d\xi + Y_p\,d\eta + Z_p\,d\zeta),$$

et l'action momentanée correspondante sera

$$(22)\qquad D_p = -\varepsilon\varepsilon'(X_p\,d\xi + Y_p\,d\eta + Z_p\,d\zeta).$$

On voit ainsi que « la force électromotrice engendrée par le mouvement de trans-
» lation du conducteur est égale à la vitesse du pôle du solénoïde par rapport à ce

» conducteur multipliée par la composante efficace de l'action électrodynamique qui » le conducteur parcouru par un courant d'intensité ε exercerait sur le pôle. »

Considérons maintenant cette partie de l'induction, due à la rotation, qui est représentée par la formule (11). En ordonnant cette formule par rapport aux quantités $d\mathrm{L}$, $d\mathrm{M}$, $d\mathrm{N}$, elle devient

$$(23)\qquad \mathrm{J}_d = -\varepsilon\varepsilon'\int \mathrm{S}.\mathrm{D}s \left\{ \begin{array}{l} [\mathrm{Z}_\sigma(y-\eta_{,})-\mathrm{Y}_\sigma(z-\zeta_{,})]\,d\mathrm{L} \\ +[\mathrm{X}_\sigma(z-\zeta_{,})-\mathrm{Z}_\sigma(x-\xi_{,})]\,d\mathrm{M} \\ +[\mathrm{Y}_\sigma(x-\xi_{,})-\mathrm{X}_\sigma(y-\eta_{,})]\,d\mathrm{N} \end{array} \right\}.$$

Traitons d'abord le terme qui a $d\mathrm{L}$ pour facteur, savoir

$$-\varepsilon\varepsilon'\int \mathrm{S}.[\mathrm{Z}_\sigma(y-\eta_{,})-\mathrm{Y}_\sigma(z-\zeta_{,})]\,d\mathrm{L}\,\mathrm{D}s,$$

et substituons-y les valeurs de Z_σ, Y_σ tirées des équations (2); ce terme devient

$$-\varepsilon\varepsilon'\varkappa'\int \mathrm{S}.\frac{1}{r^3}\left\{ \begin{array}{l} [(x-\xi_{,})^2+(y-\eta_{,})^2+(z-\zeta_{,})^2]\,\mathrm{D}x \\ -(x-\xi_{,})\,[(x-\xi_{,})\,\mathrm{D}x+(y-\eta_{,})\,\mathrm{D}y+(z-\zeta_{,})\,\mathrm{D}z] \end{array} \right\} d\mathrm{L}.$$

Or, si l'on différentie l'expression $\dfrac{x-\xi_{,}}{r}$ par rapport à l'arc s du conducteur induit, dont ξ, η, ζ ne dépendent pas, on trouve

$$\mathrm{D}\,\frac{x-\xi_{,}}{r} = \frac{1}{r^3}\,[r^2\,\mathrm{D}x-(x-\xi_{,})\,r\,\mathrm{D}r].$$

Ainsi, le terme que nous avons considéré est égal à

$$-\varepsilon\varepsilon'\varkappa'\int\left[\frac{x-\xi_{,}}{r}\right]d\mathrm{L},$$

en représentant par $\left[\dfrac{x-\xi_{,}}{r}\right]$ la différence des deux valeurs qu'acquiert $\dfrac{x-\xi_{,}}{r}$ pour chacune des extrémités du conducteur; en opérant de même pour les termes en $d\mathrm{M}$, $d\mathrm{N}$, on aura

$$(24)\qquad \mathrm{J}_d = -\varepsilon\varepsilon'\varkappa'\int\left\{\left[\frac{x-\xi_{,}}{r}\right]d\mathrm{L}+\left[\frac{y-\eta_{,}}{r}\right]d\mathrm{M}+\left[\frac{z-\zeta_{,}}{r}\right]d\mathrm{N}\right\}.$$

et

$$(25)\qquad \mathrm{D}_d = -\varepsilon\varepsilon'\varkappa'\left\{\left[\frac{x-\xi_{,}}{r}\right]d\mathrm{L}+\left[\frac{y-\eta_{,}}{r}\right]d\mathrm{M}+\left[\frac{z-\zeta_{,}}{r}\right]d\mathrm{N}\right\}.$$

Si le conducteur est fermé, les trois expressions $\left[\dfrac{x-\xi_{,}}{r}\right]$, $\left[\dfrac{y-\eta_{,}}{r}\right]$, $\left[\dfrac{z-\zeta_{,}}{r}\right]$ se réduisent à zéro, et cette partie de l'induction totale est nulle.

On déduit de là :

1°. Un conducteur fermé qui se meut dans le voisinage du pôle fixe d'un solénoïde et dont le mouvement total se compose d'un mouvement de rotation autour de ce pôle et d'un mouvement de translation, éprouve la même induction que s'il n'avait été soumis qu'à ce dernier mouvement, et pour connaître celui-ci, il suffira de concevoir le pôle lié avec le conducteur, dès l'origine, et entraîné avec lui dans son mouvement.

2°. Si un conducteur fermé tourne autour d'un axe qui contient le pôle d'un solénoïde, il n'éprouve aucun phénomène d'induction de la part de ce pôle.

3°. Si un conducteur fermé tourne autour de la ligne de jonction des deux pôles d'un solénoïde, il ne s'y développe aucun courant d'induction.

4°. Le courant induit qui se développe dans un arc de conducteur non fermé par la rotation de cet arc autour du pôle d'un solénoïde ne dépend pas de la forme du conducteur, mais seulement du mouvement de ses deux extrémités.

Nommons maintenant $d\psi$ l'angle de rotation infiniment petit du conducteur, angle qui a pour valeur

$$d\psi = \sqrt{d\mathrm{L}^2 + d\mathrm{M}^2 + d\mathrm{N}^2}.$$

Soient l, m, n les angles que fait l'axe de rotation avec les trois axes coordonnés des x, y, z ; on aura

$$d\mathrm{L} = \cos l\, d\psi, \quad d\mathrm{M} = \cos m\, d\psi, \quad d\mathrm{N} = \cos n\, d\psi.$$

La formule (25) se change, par la substitution de ces valeurs, en

$$(26) \qquad \mathrm{D}_d = -\varepsilon\varepsilon'\varkappa' \left\{ \cos l \left[\frac{x-\xi_{,}}{r}\right] + \cos m \left[\frac{y-\eta_{,}}{r}\right] + \cos n \left[\frac{z-\zeta_{,}}{r}\right] \right\} d\psi.$$

La quantité entre parenthèses est égale à la différence des cosinus des deux angles que fait l'axe avec chacun des rayons vecteurs menés du pôle du solénoïde à chacune des deux extrémités du conducteur.

On arriverait aux mêmes résultats en supposant le conducteur immobile, et le solénoïde tournant autour de son pôle supposé fixe.

Soient $d\mathrm{L}_{,}$, $d\mathrm{M}_{,}$, $d\mathrm{N}_{,}$ les composantes de ce mouvement angulaire autour de chacun des axes des coordonnées $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$; on aura entre $d\mathrm{L}$, $d\mathrm{M}$, $d\mathrm{N}$, $d\mathrm{L}_{,}$, $d\mathrm{M}_{,}$, $d\mathrm{N}_{,}$, les trois relations

$$\begin{aligned} d\mathrm{L} &= a\,d\mathrm{L}_{,} + b\,d\mathrm{M}_{,} + c\,d\mathrm{N}_{,}, \\ d\mathrm{M} &= a_{,}d\mathrm{L}_{,} + b_{,}d\mathrm{M}_{,} + c_{,}d\mathrm{N}_{,}, \\ d\mathrm{N} &= a_{,,}d\mathrm{L}_{,} + b_{,,}d\mathrm{M}_{,} + c_{,,}d\mathrm{N}_{,}. \end{aligned}$$

Transportons ces valeurs dans l'équation (24) ; mettons au lieu de x, y, z les valeurs empruntées aux équations (4) ; enfin remplaçons $\xi_{,}$, $\eta_{,}$, $\zeta_{,}$ par leurs valeurs en ξ,

η, ζ tirées des équations (17); nous aurons

$$(27)\qquad D_d = -\varepsilon\varepsilon'\varkappa'\left\{\left[\frac{x_, - \xi}{r}\right] dL_, + \left[\frac{y_, - \eta}{r}\right] dM_, + \left[\frac{z_, - \zeta}{r}\right] dN_,\right\},$$

$$(28)\qquad J_d = -\varepsilon\varepsilon'\varkappa'\int\left\{\left[\frac{x_, - \xi}{r}\right] dL_, + \left[\frac{y_, - \eta}{r}\right] dM_, + \left[\frac{z_, - \zeta}{r}\right] dN_,\right\}.$$

et, en écrivant $dL_, = \cos l'\, d\psi$, $dM_, = \cos m'\, d\psi$, $dN_, = \cos n'\, d\psi$,

$$(29)\qquad D_d = -\varepsilon\varepsilon'\varkappa'\left\{\cos l'\left[\frac{x_, - \xi}{r}\right] + \cos m'\left[\frac{y_, - \eta}{r}\right] + \cos n'\left[\frac{z_, - \zeta}{r}\right]\right\} d\psi.$$

La quantité entre parenthèses est la différence des cosinus des deux angles que forme l'axe de rotation du solénoïde avec les rayons vecteurs qui joignent son pôle aux deux extrémités du conducteur.

§ VI.

La substitution du mouvement du solénoïde à celui du conducteur induit a facilité les calculs précédents, parce que nous n'avons eu à considérer que le mouvement d'un point, au lieu du mouvement des éléments du conducteur. Cette substitution est permise, puisque le solénoïde représente le circuit inducteur, et qu'entre le circuit inducteur et le circuit induit, l'induction ne dépend que du mouvement relatif.

Si donc nous avions eu à traiter le cas où un solénoïde se meut vers un conducteur, nous aurions trouvé de même :

1°. Que l'induction développée ne dépend que du mouvement des deux pôles du solénoïde;

2°. Que le courant induit est alors exprimé par les formules (21), (22), (27), (28) et (29) du paragraphe précédent.

Il faut donc distinguer, dans le mouvement d'un pôle de solénoïde et quoique ce pôle soit un simple point mathématique, un mouvement de translation et aussi un mouvement de rotation. Nous représenterons, comme ci-dessus, par D'_p, J'_p les courants provenant de la translation, D'_d, J'_d, ceux provenant de la rotation, et l'on aura

$$D' = D'_p + D'_d,$$
$$J' = J'_p + J'_d.$$

Soient maintenant ξ, η, ζ les coordonnées du pôle variables avec le temps. Concevons que ce pôle se meuve sur un arc de courbe ϖ; les projections de $d\varpi$ sur les trois axes seront $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$. Soient X_p, Y_p, Z_p les composantes de l'action électrodynamique exercée par le conducteur sur le pôle, le conducteur étant toujours supposé parcouru par l'unité de courant; on aura, d'après les formules (21) et (22) du paragraphe précédent,

$$(1)\qquad D'_p = -\varepsilon\varepsilon'(X_p d\xi + Y_p d\eta + Z_p d\zeta),$$

$$(2)\qquad J'_p = -\varepsilon\varepsilon'\int(X_p d\xi + Y_p d\eta + Z_p d\zeta).$$

Ces équations représentent la partie du courant induit correspondant au mouvement de translation du pôle.

S'il a autour de lui-même un mouvement de rotation dont la valeur soit l'angle $d\psi$, dans le temps dt, autour d'un axe faisant, avec ceux des ξ, η, ζ, les angles l', m', n', on aura

$$(3)\qquad D'_d = -\varepsilon\varepsilon'\varkappa'\left\{\cos l'\left[\frac{x_, - \xi}{r}\right] + \cos m'\left[\frac{y_, - \eta}{r}\right] + \cos n'\left[\frac{z_, - \zeta}{r}\right]\right\},$$

$$(4)\qquad J'_p = -\varepsilon\varepsilon'\varkappa'\int\left\{\cos l'\left[\frac{x_, - \xi}{r}\right] + \cos m'\left[\frac{y_, - \eta}{r}\right] + \cos n'\left[\frac{z_, - \zeta}{r}\right]\right\}.$$

Dans ces formules, les quantités entre parenthèses sont la différence des valeurs que prennent ces quantités en passant de l'une des extrémités du conducteur à l'autre.

On conclut de là :

Le courant d'induction que produit le pôle d'un solénoïde en mouvement vers un circuit fermé ne dépend que de la translation de ce pôle.

Si le pôle n'a pas de mouvement de translation, il n'y a pas de courant induit dans un circuit fermé.

Il y a induction, quoique le pôle soit sans mouvement de translation, par la simple rotation de ce pôle autour de lui-même, si le conducteur n'est pas fermé.

Ce dernier théorème explique les phénomènes d'induction produits par la rotation d'un aimant autour de son axe, phénomènes auxquels Weber a donné le nom d'*induction unipolaire*.

§ VII.

J'arrive maintenant à l'induction développée par des aimants. D'après les idées d'Ampère, un aimant est un assemblage d'un nombre infiniment grand de solénoïdes infiniment petits. A ce point de vue, un solénoïde infiniment petit est synonyme d'un *atome magnétique*.

Je cherche d'abord l'expression du courant d'induction que développe dans un conducteur un solénoïde d'infiniment petites dimensions.

Le solénoïde étant censé fixe, soient toujours s l'arc du conducteur, Ds un élément de cet arc, x, y, z les coordonnées du milieu de cet élément; soient w l'arc de la courbe qu'il décrit, dw l'élément de cette courbe, et dx, dy, dz les projections de cet élément sur les axes. Soient $\xi_,$, $\eta_,$, $\zeta_,$ les coordonnées du pôle sud du solénoïde [*]; soient $\xi_, + \alpha$, $\eta_, + \beta$, $\zeta_, + \gamma$ celles du pôle nord : α, β, γ sont de très-petites quantités, dont les puissances supérieures peuvent se négliger devant $\xi_,$, $\eta_,$, $\zeta_,$. L'intensité de l'un des pôles sera $\varkappa'$; celle de l'autre $-\varkappa'$. Si le solénoïde est remplacé par un atome magné-

[*] J'appelle ainsi celui qui se dirigerait vers le sud, si le solénoïde était libre.

tique, les coordonnées des pôles de l'atome magnétique seront les mêmes que celles des pôles du solénoïde : $\varkappa'$ représentera la quantité de fluide boréal accumulée au pôle sud; $-\varkappa'$ celle de fluide austral accumulée à l'autre pôle; $\varkappa'$ sera donc la quantité absolue de fluide magnétique libre.

D'après la formule (1) du § V, le courant induit par le pôle sud $(\xi_{,}, \eta_{,}, \zeta_{,})$ sera représenté par la formule

$$(1) \qquad J = -\varepsilon\varepsilon' \int_{w_0}^{w_1} S.Ds\,(X_\sigma dx + Y_\sigma dy + Z_\sigma dz),$$

$X_\sigma Ds$, $Y_\sigma Ds$, $Z_\sigma Ds$ étant les trois composantes parallèles aux x, y, z de l'action électrodynamique exercée par le pôle $(\xi_{,}, \eta_{,}, \zeta_{,})$ sur l'élément Ds parcouru par un courant égal à 1. Les valeurs de ces composantes sont données par les équations (2) du § V. Remplaçons-y $\xi_{,}, \eta_{,}, \zeta_{,}$ par $\xi_{,}+\alpha$, $\eta_{,}+\beta$, $\zeta_{,}+\gamma$, et changeons le signe : nous aurons le courant développé par le second pôle. La somme des actions de ces deux courants, en tenant compte des signes, sera désignée par $J^{(a)}$, et représentera l'intensité du courant d'induction engendré par l'atome magnétique.

En développant par le théorème de Taylor, et rejetant toutes les puissances supérieures de α, β, γ, on trouve

$$(2) \qquad J^{(a)} = +\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varkappa'} \int_{w_0}^{w_1} S.Ds \left\{ \begin{array}{l} \left(a\dfrac{dX_\sigma}{d\xi_{,}} + b\dfrac{dX_\sigma}{d\eta_{,}} + c\dfrac{dX_\sigma}{d\zeta_{,}}\right)dx \\ + \left(a\dfrac{dY_\sigma}{d\xi_{,}} + b\dfrac{dY_\sigma}{d\eta_{,}} + c\dfrac{dY_\sigma}{d\zeta_{,}}\right)dy \\ + \left(a\dfrac{dZ_\sigma}{d\xi_{,}} + b\dfrac{dZ_\sigma}{d\eta_{,}} + c\dfrac{dZ_\sigma}{d\zeta_{,}}\right)dz \end{array} \right\}.$$

Dans cette formule, on a $a = \varkappa'\alpha$, $b = \varkappa'\beta$, $c = \varkappa'\gamma$: ce sont les *moments magnétiques de l'atome*, suivant la terminologie de M. Gauss : $\frac{dX_\sigma}{d\xi_{,}}$, $\frac{dX_\sigma}{d\eta_{,}}$, ... représentent des coefficients différentiels. Le facteur $\frac{1}{\varkappa'}$ doit disparaître de la formule (2) développée, attendu que le facteur $\varkappa'$ est implicitement contenu en X_σ, Y_σ, Z_σ.

Je considère maintenant, tout autour du pôle $\xi_{,}, \eta_{,}, \zeta_{,}$, un petit espace Δv, assez grand pour enfermer un grand nombre d'atomes magnétiques, et je nomme $J^{(e)}$ la somme des courants d'induction développés par tous les éléments contenus dans cet espace; je désigne par a', b', c' la moyenne arithmétique des valeurs de a, b, c appartenant aux divers éléments contenus dans l'espace Δv; enfin je représente par $n\Delta v$ le nombre de ces solénoïdes.

On pourra, dans la formule (2), changer J_a en J_e, pourvu que l'on substitue aux lettres a, b, c les lettres a', b', c', et que l'on multiplie le second membre par $n\Delta v$. Ceci fait, remplaçons na', nb', nc', par α', β', γ'; le courant d'induction produit par l'espace Δv sera

$$(3)\qquad J^{(e)} = \frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varkappa'}\int_{w_0}^{w_1} S.\left\{\begin{aligned} &\left(\alpha'\frac{dX_\sigma}{d\xi_\prime}+\beta'\frac{dY_\sigma}{d\eta_\prime}+\gamma'\frac{dZ_\sigma}{d\zeta_\prime}\right)dx\\ +&\left(\alpha'\frac{dY_\sigma}{d\xi_\prime}+\beta'\frac{dY_\sigma}{d\eta_\prime}+\gamma'\frac{dZ_\sigma}{d\zeta_\prime}\right)dy\\ +&\left(\alpha'\frac{dZ_\sigma}{d\xi_\prime}+\beta'\frac{dZ_\sigma}{d\eta_\prime}+\gamma'\frac{dZ_\sigma}{d\zeta_\prime}\right)dz\end{aligned}\right\}Ds\,\Delta v.$$

Les quantités α', β', γ' sont les trois moments magnétiques que posséderait l'unité de volume d'un espace magnétique à distribution uniforme, où les atomes, aussi abondants que dans Δv, auraient chacun pour moment magnétique la valeur moyenne des moments des atomes de l'espace Δv.

En faisant la somme de cette expression par rapport à Δv, et l'étendant à tout le volume de l'aimant sur lequel on opère, on obtiendra le courant total d'induction que l'aimant doit développer dans le conducteur. Les moments magnétiques α', β', γ' sont fonctions des coordonnées $\xi_\prime$, $\eta_\prime$, $\zeta_\prime$ de l'élément Δv, et à cause de la petitesse de Δv, la somme de tous les termes correspondant aux différents volumes élémentaires Δv peut être considérée comme une intégrale triple; nous la désignerons par Σ. Je vais faire voir qu'on peut toujours remplacer cette triple intégrale par une intégrale double, prise relativement aux éléments à deux dimensions de la surface de l'aimant.

Je tire des équations (2) du § V les valeurs de X_σ, Y_σ, Z_σ et je les mets sous la forme suivante :

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} X_\sigma Ds &= \varkappa'\left\{\frac{d\frac{1}{r}}{d\zeta_\prime}Dy-\frac{d\frac{1}{r}}{d\eta_\prime}Dz\right\},\\ Y_\sigma Ds &= \varkappa'\left\{\frac{d\frac{1}{r}}{d\xi_\prime}Dz-\frac{d\frac{1}{r}}{d\zeta_\prime}Dx\right\},\\ Z_\sigma Ds &= \varkappa'\left\{\frac{d\frac{1}{r}}{d\eta_\prime}Dx-\frac{d\frac{1}{r}}{d\xi_\prime}Dy\right\},\end{aligned}\right.$$

formules où r est donné par l'équation

$$r^2=(x-\xi_\prime)^2+(y-\eta_\prime)^2+(z-\zeta_\prime)^2.$$

Je substitue ces valeurs dans l'équation (3), et j'écris, pour abréger,

$$P=\alpha'\frac{d\frac{1}{r}}{d\xi_\prime}+\beta'\frac{d\frac{1}{r}}{d\eta_\prime}+\gamma'\frac{d\frac{1}{r}}{d\zeta_\prime}:$$

l'équation (3) devient

$$J^{(e)} = \varepsilon\varepsilon' \int_{w_0}^{w_1} S. \left\{ \begin{aligned} &\left(Dy \frac{dP}{d\zeta_,} - Dz \frac{dP}{d\eta_,}\right) dx \\ + &\left(Dz \frac{dP}{d\xi_,} - Dx \frac{dP}{d\zeta_,}\right) dy \\ + &\left(Dx \frac{dP}{d\eta_,} - Dy \frac{dP}{d\xi_,}\right) dz \end{aligned} \right\} \Delta v,$$

ou

(5) $$J^{(e)} = \varepsilon\varepsilon' \int_{w_0}^{w_1} S. \left\{ \begin{aligned} &(dy\, Dz - dz\, Dy) \frac{dP}{d\xi_,} \\ + &(dz\, Dx - dx\, Dz) \frac{dP}{d\eta_,} \\ + &(dx\, Dy - dy\, Dx) \frac{dP}{d\zeta_,} \end{aligned} \right\} \Delta v.$$

Ceci posé, écrivons

(6) $$\Delta v = D\xi_, D\eta_, D\zeta_,,$$

et

$$Q = \Sigma . P\, D\xi_, D\eta_, D\zeta_,.$$

Intégrons dans toute l'étendue de l'aimant, et remplaçons les coefficients différentiels $\frac{dP}{d\xi_,}, \frac{dP}{d\eta_,}, \frac{dP}{d\zeta_,}$ par leurs équivalents $-\frac{dP}{dx}, -\frac{dP}{dy}, -\frac{dP}{dz}$; alors en tenant compte de l'équation (6), nous avons pour l'action totale de l'aimant,

(7) $$J^{(m)} = -\varepsilon\varepsilon' \int_{w_0}^{w_1} S. \left\{ \begin{aligned} &(dy\, Dz - dz\, Dy) \frac{dQ}{dx} \\ + &(dz\, Dx - dx\, Dz) \frac{dQ}{dy} \\ + &(dx\, Dy - dy\, Dx) \frac{dQ}{dz} \end{aligned} \right\}.$$

En nommant $X_m Ds$, $Y_m Ds$, $Z_m Ds$ les trois composantes de l'action électrodynamique que l'aimant exerce sur l'élément Ds parcouru par un courant égal à 1, on a le système d'équations

(8) $$\left\{ \begin{aligned} X_m Ds &= \frac{dQ}{dz} Dy - \frac{dQ}{dy} Dz, \\ Y_m Ds &= \frac{dQ}{dx} Dz - \frac{dQ}{dz} Dx, \\ Z_m Ds &= \frac{dQ}{dy} Dx - \frac{dQ}{dx} Dy; \end{aligned} \right.$$

donc

(9) $$J_m = -\varepsilon\varepsilon' \int_{w_0}^{w_1} S. Ds\,(X_m dx + Y_m dy + Z_m dz).$$

Je nommerai Q le *potentiel* de l'aimant par rapport à un pôle magnétique situé au point (x, y, z). On sait que les coefficients différentiels de Q, $\frac{dQ}{dx}, \frac{dQ}{dy}, \frac{dQ}{dz}$, sont les composantes de l'action de l'aimant sur ce pôle. M. Gauss a montré que, si ce pôle est extérieur à l'aimant, ce potentiel peut être remplacé par le potentiel de la surface de l'aimant, cette surface étant supposée magnétique et offrant une distribution convenable des fluides magnétiques. Si donc on nomme $\varkappa$ l'épaisseur de la couche de fluide magnétique boréal en un élément $D\omega$ de cette surface idéale, $\varkappa$ devenant négatif là où le fluide est austral, on a

$$(10) \qquad Q = \Sigma . \frac{\varkappa D\omega}{r}.$$

$\varkappa$ est une certaine fonction des coordonnées de l'élément $D\omega$, et Σ représente une intégrale étendue à toute la surface de l'aimant.

Poisson a démontré que, si la distribution des fluides magnétiques dans l'aimant a été déterminée, à l'origine, par des forces électrodynamiques susceptibles d'être représentées par un potentiel, les moments magnétiques α', β', γ' du point $\xi_,$, $\eta_,$, $\zeta_,$ situé dans l'intérieur de l'aimant sont les trois coefficients différentiels d'une certaine fonction φ de ces coordonnées; de sorte que l'on a

$$\alpha' = \frac{d\varphi}{d\xi_,}, \quad \beta' = \frac{d\varphi}{d\eta_,}, \quad \gamma' = \frac{d\varphi}{d\zeta_,},$$

et la fonction φ satisfait alors à l'équation

$$(11) \qquad \frac{d^2\varphi}{d\xi_,^2} + \frac{d^2\varphi}{d\eta_,^2} + \frac{d^2\varphi}{d\zeta_,^2} = 0.$$

Alors, si l'on fait varier φ, en se transportant du point de la surface correspondant à l'élément $D\omega$, à un point intérieur situé sur une normale à la surface, à une distance dN de cette surface, en intégrant par parties l'équation (6), en tenant compte de l'équation (11), et faisant intervenir les angles que fait la normale dN avec les axes [*], on trouve

$$(12) \qquad Q = \Sigma \cdot \frac{d\varphi}{dN} \frac{d\omega}{r};$$

de sorte que, dans ce cas, on a

$$\varkappa = \frac{d\varphi}{dN}.$$

Si l'on tire de l'équation (10) la valeur de Q pour la substituer dans les équations (8) et (9), on obtient

$$(13) \qquad J^{(m)} = -\varepsilon\varepsilon' \Sigma . \varkappa D\omega \int_{w_0}^{w_1} S . \frac{1}{r^3} \left\{ \begin{array}{l} [(y-\eta_,) Dz - (z-\zeta_,) Dy]\, dx \\ + [(z-\zeta_,) Dx - (x-\xi_,) Dz]\, dy \\ + [(x-\xi_,) Dy - (y-\eta_,) Dx]\, dz \end{array} \right\}.$$

[*] Il suffit de traiter cette équation de la même manière que sera traitée ci-dessous l'équation (10) du § VIII. A. B.

C'est là la forme la plus simple sous laquelle puisse être mise la valeur du courant d'induction que développe un aimant fixe dans un conducteur en mouvement.

On obtient la même expression si, dans l'équation (1) du § V, on substitue les valeurs de $X_\sigma Ds$, $Y_\sigma Ds$, $Z_\sigma Ds$, tirées des équations (2) du même paragraphe, si ensuite on y change $\varkappa'$ en $-\varkappa D\omega$, et si l'on étend l'intégrale à toute la surface de l'aimant.

En supprimant le signe Σ dans l'équation (13), elle donne la valeur du courant induit dû au seul élément $D\omega$, et l'on verrait, comme ci-dessus, en substituant le mouvement de l'aimant à celui du conducteur, que ce courant se décompose en deux, l'un dû à la translation de $D\omega$ et que je nommerai $J_p^{(m)}$, l'autre à la rotation de $D\omega$ et que je nommerai $J_d^{(m)}$.

Alors, en donnant à $x_,, y_,, z_,, \xi, \eta, \zeta, \lambda, \mu, \nu, d\psi$ la même signification que possèdent ces lettres dans le § V, on aura

$$J^{(m)} = J_p^{(m)} + J_d^{(m)}, \tag{14}$$

$$J_p^{(m)} = -\varepsilon\varepsilon'\Sigma.\varkappa D\omega \int_{w_0}^{w_1} S.\frac{1}{r^3}\left\{\begin{array}{l} [(z_, - \zeta)Dy - (y_, - \eta)Dz]\,d\xi \\ + [(x_, - \xi)Dz - (z_, - \zeta)Dx]\,d\eta \\ + [(y_, - \eta)Dx - (x_, - \xi)Dy]\,d\zeta \end{array}\right\}, \tag{15}$$

$$J_d^{(m)} = +\varepsilon\varepsilon'\Sigma.\varkappa D\omega \int_{w_0}^{w_1} d\psi \left\{\left[\frac{x_, - \xi}{r}\right]\cos\lambda + \left[\frac{y_, - \eta}{r}\right]\cos\mu + \left[\frac{z_, - \zeta}{r}\right]\cos\nu\right\}, \tag{16}$$

$$r^2 = (x_, - \xi)^2 + (y_, - \eta)^2 + (z_, - \zeta)^2. \tag{17}$$

Si l'on veut passer du cas d'un aimant en repos agissant sur un conducteur mobile, au cas de l'aimant en mouvement agissant sur un conducteur en repos, il suffira de donner au système un mouvement commun qui ramène l'aimant au repos. On tombe alors de l'équation (13) sur le système des équations (14), (15) et (16).

Les théorèmes suivants sont des conséquences de ce qui précède :

I. Lorsqu'un circuit fermé ou non fermé, mais de forme invariable, obéit à un mouvement de translation en présence d'un aimant, on peut remplacer cette translation par le mouvement inverse de l'aimant, et la force électromotrice du courant induit momentané est toujours exprimée par la vitesse de ce mouvement multipliée par la composante efficace de l'action électrodynamique que l'aimant exerce sur le conducteur supposé en repos, et parcouru par le courant d'intensité ε.

II. Si le circuit est fermé, cette force est égale à la somme des produits de la vitesse relative des éléments de la surface magnétique idéale de l'aimant par les composantes efficaces des actions qu'ils exercent sur le conducteur parcouru par le courant ε.

III. Si le conducteur n'est pas fermé et s'il obéit à un double mouvement de translation et de rotation, la rotation engendrera une deuxième force électromotrice qui dépendra de la situation des extrémités de l'arc du conducteur.

IV. Si un aimant se meut parallèlement à lui-même vis-à-vis d'un conducteur fixe, la force électromotrice du courant induit sera égale, au signe près, à la vitesse du mouvement multipliée par la composante efficace de l'action électrodynamique de l'aimant sur le conducteur parcouru par le courant ε.

V. Si un aimant obéit à un double mouvement de translation et de rotation, son action électromotrice sur un conducteur fermé sera égale à la somme des produits de la vitesse des éléments de la surface magnétique par les composantes efficaces des actions exercées par chaque élément sur le conducteur parcouru par le courant ε.

VI. Si le circuit n'est pas fermé, il se développera une seconde force électromotrice dépendant de la position des deux extrémités de l'arc du conducteur.

§ VIII.

Je vais m'occuper maintenant des courants d'induction produits par l'aimantation et la désaimantation, en considérant ces phénomènes comme dus à la séparation ou à la réunion des deux fluides de nom contraire. Dans le paragraphe suivant, j'envisagerai ce même sujet sous un autre point de vue, au moyen d'un principe nouveau qui dérive des résultats précédents généralisés, et permet de déterminer facilement les courants d'induction engendrés par un changement d'intensité du courant inducteur.

Je suppose donc que la désaimantation consiste en ce que les deux fluides distribués d'une certaine manière à la surface d'un atome magnétique viennent se neutraliser en se réunissant en un ou plusieurs points centraux. Soient toujours ξ, η, ζ les coordonnées du milieu de l'atome *magnétique;* $\xi+\xi_0$, $\eta+\eta_0$, $\zeta+\zeta_0$, celles de l'élément $D\omega$ de la surface de cet atome; $\xi+a$, $\eta+b$, $\zeta+c$, celles du point intérieur où la neutralisation s'opère. Soit $\varkappa D\omega$ la quantité de fluide répandue sur l'élément $D\omega$, $\varkappa$ étant une fonction de ξ_0, η_0, ζ_0. L'expression $\Sigma.\varkappa D\omega$, intégrée relativement à toute la surface, doit être égale à zéro. Soit $\varkappa' D\omega$ la quantité qui se meut du point (ξ_0, η_0, ζ_0) vers le point intérieur (a, b, c); $\varkappa'$ est une fonction de ξ_0, η_0, ζ_0, et satisfait à l'équation

$$\Sigma.\varkappa' D\omega = 0.$$

Soient $\delta\xi_0$, $\delta\eta_0$, $\delta\zeta_0$ les trois projections de l'élément de la route que parcourt le fluide $\varkappa' D\omega$ dans ce mouvement. Nous sommes ici dans les conditions de translation d'un pôle magnétique, en présence d'un conducteur immobile; ainsi nous aurons à appliquer la formule (15) du paragraphe précédent. Toutefois, à cause de la petitesse de l'élément magnétique, les composantes de l'action électrodynamique peuvent être regardées comme constantes pendant tout le mouvement des fluides; et en représentant ces composantes par $A\varkappa' D\omega$, $B\varkappa' D\omega$, $C\varkappa' D\omega$, on aura

$$(1) \qquad \left\{\begin{aligned} A &= S.\frac{1}{r^3}[(z_{,}-\zeta)Dy-(y_{,}-\eta)Dz], \\ B &= S.\frac{1}{r^3}[(x_{,}-\xi)Dz-(z_{,}-\zeta)Dx], \\ C &= S.\frac{1}{r^3}[(y_{,}-\eta)Dx-(x_{,}-\xi)Dy], \end{aligned}\right.$$

équations qui se déduisent facilement des équations (2) du § V.

Alors, en nommant J le courant d'induction, on aura

$$(1\ bis)\qquad J = -\varepsilon\varepsilon'\Sigma.\int \varkappa' D\omega\,(A\delta\xi_0 + B\delta\eta_0 + C\delta\zeta_0).$$

Si l'on effectue l'intégration relativement à la route parcourue, on fera disparaître le signe $\int$, et l'on aura

$$J = \varepsilon\varepsilon'\Sigma.\varkappa' D\omega\,[A(\xi_0 - a) + B(\eta_0 - b) + C(\zeta_0 - c)].$$

Intégrant par décomposition relativement à Σ, remarquant que a, b, c sont constants, et que $\Sigma.\varkappa' D\omega = 0$, on trouve

$$(2)\qquad J = \varepsilon\varepsilon'[A\Sigma.\varkappa'\xi_0 D\omega + B\Sigma.\varkappa'\eta_0 D\omega + C\Sigma.\varkappa'\zeta_0 D\omega].$$

Ainsi le courant J est indépendant de la position du point de neutralisation (a, b, c) : si donc l'on désigne par $\varkappa'' D\omega$, $\varkappa''' D\omega$ les quantités de fluide qui partent de l'élément $D\omega$ pour venir se neutraliser en un second, un troisième point, etc., on aura pour le courant total E provenant de l'élément magnétique considéré, et à cause de $\varkappa' + \varkappa'' + \varkappa''' \ldots = \varkappa$,

$$E = \varepsilon\varepsilon'(A\Sigma.\varkappa\xi_0 D\omega + B\Sigma.\varkappa\eta_0 D\omega + C\Sigma.\varkappa\zeta_0 D\omega).$$

Les quantités $\Sigma.\varkappa\xi_0 D\omega$, $\Sigma.\varkappa\eta_0 D\omega$, $\Sigma.\varkappa\zeta_0 D\omega$ sont précisément les moments magnétiques de l'atome, quantités représentées par a, b, c dans le § VII. On peut donc écrire, en les désignant ici par α, β, γ,

$$(3)\qquad E = \varepsilon\varepsilon'(A\alpha + B\beta + C\gamma).$$

On obtiendrait de même le courant dû à l'aimantation de l'atome magnétique. Il suffit de changer le signe du second membre de la dernière équation : en nommant M le courant induit, il viendra

$$(4)\qquad M = -\varepsilon\varepsilon'(A\alpha + B\beta + C\gamma).$$

Renfermons maintenant le point ξ, η, ζ dans un petit espace $D\nu$, et concevons que α, β, γ soient les moments magnétiques moyens de cet espace; soit $nD\nu$ le nombre des atomes contenu en $D\nu$, et posons

$$n\alpha = \alpha',\quad n\beta = \beta',\quad n\gamma = \gamma'.$$

Le courant induit M', dû à l'aimantation de l'espace magnétique $D\nu$, sera

$$(5)\qquad M' = -\varepsilon\varepsilon'(A\alpha' + B\beta' + C\gamma')\,D\nu.$$

Les quantités α', β', γ' sont, comme dans le § VII, les moments magnétiques moyens de l'unité de volume au point considéré.

Si donc l'on intègre relativement à tout le volume de l'aimant, on aura, en nommant $J^{(\mu)}$ le courant total d'induction,

$$(6)\qquad J^{(\mu)} = -\varepsilon\varepsilon'\Sigma.(A\alpha' + B\beta' + C\gamma')\,D\nu.$$

C'est une triple intégrale à étendre à tout le volume de l'aimant.

D'après une loi d'Ampère, l'action d'un circuit fermé sur un pôle magnétique se laisse toujours exprimer par un potentiel [*]. En nommant V cette fonction, on a donc

$$A = \frac{dV}{d\xi}, \quad B = \frac{dV}{d\eta}, \quad C = \frac{dV}{d\zeta}.$$

D'autre part, la distribution du magnétisme dans l'intérieur de l'aimant doit être considérée comme ayant été primitivement le résultat de l'action de forces électrodynamiques dont la résultante pouvait aussi s'exprimer par un certain potentiel ; car l'aimantation a été produite soit par d'autres aimants, soit par des courants galvaniques, et les forces provenant de ces sources électrodynamiques s'expriment toujours par des potentiels.

Ainsi α', β', γ' doivent pouvoir se mettre sous la forme

$$(8) \qquad \alpha' = \frac{d\varphi}{d\xi}, \quad \beta' = \frac{d\varphi}{d\eta}, \quad \gamma' = \frac{d\varphi}{d\zeta},$$

la fonction φ étant convenablement choisie, et satisfaisant d'ailleurs à l'équation

$$(9) \qquad \frac{d^2\varphi}{d\xi^2} + \frac{d^2\varphi}{d\eta^2} + \frac{d^2\varphi}{d\zeta^2} = 0.$$

Posons, en outre,

$$D\upsilon = D\xi\, D\eta\, D\zeta.$$

L'équation (6), transformée par le moyen de ces dernières équations, deviendra

$$(10) \qquad J^{(\mu)} = -\varepsilon\varepsilon'\Sigma.\left[\frac{dV}{d\xi}\frac{d\varphi}{d\xi} + \frac{dV}{d\eta}\frac{d\varphi}{d\eta} + \frac{dV}{d\zeta}\frac{d\varphi}{d\zeta}\right] D\xi\, D\eta\, D\zeta.$$

Intégrons par parties le premier des trois termes du second membre; nous aurons

$$\Sigma.\frac{dV}{d\xi}\frac{d\varphi}{d\xi} D\xi\, D\eta\, D\zeta = \Sigma.\left[V\frac{d\varphi}{d\xi}\right] D\eta\, D\zeta - \Sigma.V\frac{d^2\varphi}{d\xi^2} D\xi\, D\eta\, D\zeta.$$

Les parenthèses indiquent la différence des valeurs que prend la quantité $V\frac{d\varphi}{d\xi}$ aux deux points où la droite $y = \eta$, $z = \zeta$, parallèle à l'axe des x, coupe la surface de l'aimant. Si l'on opère de même sur les autres membres, en tenant compte de l'équation (9), on aura

$$J^{(\mu)} = -\varepsilon\varepsilon'\Sigma.\left\{\left[V\frac{d\varphi}{d\xi}\right] D\eta\, D\zeta + \left[V\frac{d\varphi}{d\eta}\right] D\xi\, D\zeta + \left[V\frac{d\varphi}{d\zeta}\right] D\xi\, D\eta\right\}.$$

L'intégration indiquée par le signe Σ ne se rapporte plus maintenant qu'aux points de la

[*] Lorsque j'annonce qu'une action mécanique exercée sur un point se laisse exprimer par un potentiel, cela veut dire qu'il existe une fonction des coordonnées ξ, η, ζ de ce point, telle que ses coefficients différentiels par rapport à ξ, η, ζ sont les trois composantes de cette action parallèlement aux axes des ξ, η et ζ.

surface de l'aimant. Si l'on nomme $D\omega$ l'élément de cette surface qui correspond au point (ξ, η, ζ); (N, ξ), (N, η), (N, ζ), les angles que la normale à la surface au point (ξ, η, ζ) fait avec les trois axes coordonnés, on aura

$$D\eta D\zeta = D\omega \cos(N, \xi), \quad D\xi D\zeta = D\omega \cos(N, \eta), \quad D\xi D\eta = D\omega \cos(N, \zeta),$$

et, par conséquent,

$$(11) \qquad J^{(\mu)} = -\varepsilon\varepsilon' \Sigma . \left[V \frac{d\varphi}{d\xi} \cos(N, \xi) + V \frac{d\varphi}{d\eta} \cos(N, \eta) + V \frac{d\varphi}{d\zeta} \cos(N, \zeta) \right] D\omega.$$

Soit maintenant $\frac{d\varphi}{dN} dN$ la variation de la fonction φ, en passant d'un point de la surface à un point intérieur situé sur la normale à cette surface et à une distance dN du premier point; les coordonnées de ce point seront

$$\xi + dN \cos(N, \xi), \quad \eta + dN \cos(N, \eta), \quad \zeta + dN \cos(N, \zeta);$$

ainsi

$$dN \cos(N, \xi), \quad dN \cos(N, \eta), \quad dN \cos(N, \zeta)$$

seront les trois variations de ξ, η, ζ, en passant du premier point au second, et l'on aura

$$\frac{d\varphi}{dN} dN = \frac{d\varphi}{d\xi} dN \cos(N, \xi) + \frac{d\varphi}{d\eta} dN \cos(N, \eta) + \frac{d\varphi}{d\zeta} dN \cos(N, \zeta).$$

Ainsi l'équation (11) peut être mise sous la forme

$$(12) \qquad J^{(\mu)} = -\varepsilon\varepsilon' \Sigma . V \frac{d\varphi}{dN} D\omega.$$

La quantité $\frac{d\varphi}{dN}$ est le coefficient différentiel relatif à la variation de la fonction le long de la normale à la surface.

Si au lieu de décomposer par rapport à φ l'équation (10), nous l'eussions décomposée par rapport à V, nous aurions eu de même, à cause de

$$\frac{d^2V}{d\xi^2} + \frac{d^2V}{d\eta^2} + \frac{d^2V}{d\zeta^2} = 0,$$

$$(13) \qquad J^{(\mu)} = -\varepsilon\varepsilon' \Sigma . \varphi \frac{dV}{dN} D\omega.$$

Les intégrations indiquées par les équations (12) et (13) doivent s'étendre à toute la surface de l'aimant; les quantités φ, V, $\frac{d\varphi}{dN}$, $\frac{dV}{dN}$ sont des fonctions des coordonnées de l'élément $D\omega$.

En changeant le signe du second membre de ces équations, on aurait la valeur du courant induit dû à la désaimantation.

Jusqu'ici nous avons supposé que le corps passait de l'état neutre à un certain état magnétique, ou réciproquement. S'il y avait une simple altération de l'état magnétique, il faudrait considérer la fonction φ comme variable, par exemple comme étant égale à φ' au commencement du changement d'état, et égale à φ'' lorsque ce changement est effectué; on aurait alors les deux équations suivantes :

$$(14)\qquad J^{\mu} = \varepsilon\varepsilon' \Sigma . V \frac{d(\varphi' - \varphi'')}{dN} D\omega,$$

$$(15)\qquad J^{\mu} = \varepsilon\varepsilon' \Sigma . \frac{dV}{dN} (\varphi' - \varphi'') D\omega.$$

La triple intégration sous-entendue par l'équation (6) se laisse toujours ramener à une double intégration relative à la surface. On peut en effet, comme M. Gauss l'a démontré, substituer à la distribution magnétique des fluides dans l'aimant une certaine distribution superficielle, produisant à l'extérieur les mêmes effets; or les composantes de l'action électrodynamique de l'aimant sur un pôle magnétique extérieur à cet aimant sont représentées par les dérivées partielles de la quantité Q de l'équation (6) du paragraphe précédent; elles le sont par les dérivées de la quantité $\Sigma . \frac{\varkappa D\omega}{r}$ dans le cas de la distribution superficielle, r étant la distance d'un élément $D\omega$ au pôle considéré. On a ainsi

$$\Sigma \cdot \left\{ \alpha' \frac{d\frac{1}{r}}{d\xi} + \beta' \frac{d\frac{1}{r}}{d\eta} + \gamma' \frac{d\frac{1}{r}}{d\zeta} \right\} D\xi\, D\eta\, D\zeta = \Sigma \cdot \frac{\varkappa}{r} D\omega.$$

En multipliant les deux membres par la masse indéterminée m, que l'on supposera concentrée au pôle extérieur que l'on considère, on aura

$$\Sigma \cdot \left\{ \alpha' \frac{d\frac{m}{r}}{d\xi} + \beta' \frac{d\frac{m}{r}}{d\eta} + \gamma' \frac{d\frac{m}{r}}{d\zeta} \right\} D\xi\, D\eta\, D\zeta = \Sigma . \varkappa \frac{m}{r} D\omega.$$

Considérons une série d'autres pôles placés à des distances r', r'',... de l'élément $D\omega$ et possédant des masses de fluide m', m'',...; en formant pour ces pôles des équations analogues, les ajoutant ensemble, et posant

$$U = \frac{m}{r} + \frac{m'}{r'} + \frac{m''}{r''} \cdots,$$

on aura

$$\Sigma \cdot \left\{ \alpha' \frac{dU}{d\xi} + \beta' \frac{dU}{d\eta} + \gamma' \frac{dU}{d\zeta} \right\} D\xi\, D\eta\, D\zeta = \Sigma . \varkappa\, U\, D\omega.$$

Reportons-nous maintenant à l'équation (6) de ce paragraphe: les quantités A, B, C sont les dérivées partielles d'un certain potentiel V; en outre, ce potentiel V peut toujours être considéré comme représentant l'action qu'exerceraient certaines masses de fluides magnétiques, extérieures à l'aimant, sur cet aimant lui-même; on en conclura qu'on peut toujours déterminer la fonction U de manière à avoir $U = V$, et, par conséquent, l'équation (6) devient

$$J^{(\mu)} = -\varepsilon\varepsilon'\Sigma . \varkappa V D\omega. \tag{16}$$

Si l'on suppose que le magnétisme superficiel passe du mode de distribution indiqué par la fonction $\varkappa'$ au mode indiqué par la nouvelle fonction $\varkappa''$, le courant induit, résultat de ce changement, aura pour valeur

$$J^{(\mu)} = \varepsilon\varepsilon'\Sigma . (\varkappa' - \varkappa'') V D\omega. \tag{17}$$

§ IX.

Je vais maintenant démontrer que le courant induit par un aimant dans un conducteur dépend seulement du changement de valeur que le mouvement relatif des deux corps détermine dans le potentiel dont les dérivées représentent les trois composantes de l'action totale qu'exerce le conducteur parcouru par un courant égal à 1 sur l'aimant que l'on considère; de sorte que l'on peut énoncer le principe suivant :

« Le changement de ce potentiel est la cause de l'induction et lui sert de mesure,
» et de quelque manière que ce potentiel vienne à éprouver un changement constant
» et défini, l'induction produite est toujours la même. »

Je reprends l'équation (1 *bis*) du § VIII, et je remarque qu'elle représente le courant total qui se développe en un conducteur fermé par l'effet du transport $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ de la masse de fluide $\varkappa' D\omega$. Je mets cette équation sous la forme

$$J = -\varepsilon\varepsilon'\Sigma \cdot \int \varkappa (A\delta\xi + B\delta\eta + C\delta\zeta) D\omega;$$

A, B, C sont les composantes de l'action de l'unité de courant du conducteur sur l'unité de fluide en $D\omega$.

Le conducteur étant fermé, on peut employer les équations (7) du § VIII, et l'on a

$$J = -\varepsilon\varepsilon'\Sigma \cdot \int \varkappa \left\{ \frac{dV}{d\xi}\delta\xi + \frac{dV}{d\eta}\delta\eta + \frac{dV}{d\zeta}\delta\zeta \right\} D\omega.$$

Intégrons cette expression relativement au chemin parcouru, et soient V′, V″ les deux valeurs que prend le potentiel V aux deux extrémités de ce chemin; on aura

$$J = \varepsilon\varepsilon'\Sigma . \varkappa (V' - V'') D\omega. \tag{1}$$

Si l'aimant vient d'une distance infinie, on a $V' = 0$, et

$$J = -\varepsilon\varepsilon'\Sigma . \varkappa V'' D\omega. \tag{2}$$

Les mêmes équations (1) et (2) s'appliquent aussi au cas du mouvement du conducteur, l'aimant restant en repos.

Nous avons déjà vu que, si l'état magnétique de l'aimant est le résultat de forces extérieures expressibles par des potentiels, $\varkappa$ pouvait se mettre sous la forme

$$\varkappa = \frac{d\varphi}{dN}. \tag{3}$$

La quantité εV est le potentiel du conducteur parcouru par le courant ε et agissant sur l'unité de fluide magnétique en $D\omega$. D'après cela, $\varepsilon\Sigma.\varkappa VD\omega$ est la somme des potentiels du conducteur étendue à toutes les masses magnétiques de l'aimant, et j'appellerai cette somme *le potentiel du conducteur agissant sur tout l'aimant*, ou, ce qui revient au même, *le potentiel de l'aimant relativement au conducteur.*

D'après ces définitions, on voit que « la force électromotrice, développée en un cir- » cuit fermé par le mouvement d'un aimant, est égale à la différence des valeurs ini- » tiale et finale du potentiel du conducteur parcouru par le courant ε relativement à » l'aimant. »

Cette loi est tout à fait générale quelle que soit la grandeur ou la nature du mouvement de l'aimant : « Ainsi toute circonstance qui changera la valeur de ce potentiel dé- » veloppera un courant d'induction, » et c'est ce changement de valeur qui peut être considéré comme étant la cause de l'induction. Parmi ces circonstances, on peut mentionner le changement de l'état magnétique de l'aimant. Nous avons déjà trouvé que, dans ce cas, on avait

$$J^{(\mu)} = \varepsilon\varepsilon'\Sigma.(\varkappa' - \varkappa'')VD\omega; \tag{4}$$

ainsi la force électromotrice développée est égale à $\varepsilon\Sigma.\varkappa' VD\omega - \varepsilon'\Sigma.\varkappa'' VD\omega$, c'est-à-dire à la différence des valeurs des deux potentiels.

§ X.

Nous allons appliquer les mêmes principes à la recherche du courant d'induction que développent en un conducteur les variations d'intensité d'un courant situé dans son voisinage. L'induction qui se développe dans un conducteur en mouvement sous l'influence d'un courant fixe a pour expression [*voyez* équation (6), § III],

$$J = -\varepsilon\varepsilon'\int_{w_0}^{w_1} S.(X_\sigma\delta x + Y_\sigma\delta y + Z_\sigma\delta z)\,Ds. \tag{1}$$

Ds est un élément du conducteur induit: ses projections sur les axes sont Dx, Dy, Dz; δx, δy, δz sont les déplacements de cet élément dans le temps dt; X_σ, Y_σ, Z_σ sont les composantes de l'action électrodynamique exercée par tout le courant sur l'élément Ds parcouru par un courant égal à 1.

Par le circuit fermé du courant inducteur faites passer une surface courbe de forme arbitraire que vous limiterez extérieurement à la ligne courbe du circuit; décomposez cette surface ainsi limitée en éléments de surface contigus, et supposez qu'autour de chacun de ces éléments circule un courant de même sens et de même intensité que le courant primitif. La réunion de tous ces petits circuits équivaudra évidemment au circuit initial. Soit $D\omega$ un de ces éléments : le courant j qui parcourt sa périphérie agira sur l'élément Ds, d'après une loi connue d'Ampère, comme le ferait un atome magnétique situé au centre de $D\omega$, ayant pour axe la normale à la surface et pour moment magnétique $\frac{1}{2} j\, D\omega$, j étant l'intensité du courant général.

Soient X, Y, Z les composantes de l'action électrodynamique que cet atome magnétique exerce sur l'unité de courant en Ds ; en intégrant dans les limites de la surface idéale considérée, on aura

$$(2) \qquad X_\sigma Ds = \Sigma . X, \quad Y_\sigma Ds = \Sigma . Y, \quad Z_\sigma Ds = \Sigma . Z.$$

Les formules (2) du § V donnent l'action qu'un pôle de solénoïde exerce sur un élément Ds du conducteur induit parcouru par un courant égal à 1. Pour en déduire l'action d'un solénoïde infiniment court, il faut calculer la variation des seconds membres, relativement à l'axe du solénoïde : si donc $d\nu$ représente la distance des deux pôles, mesurée sur l'axe du solénoïde, normal à la surface en $D\omega$, on aura

$$(3) \left\{ \begin{aligned} X &= \tfrac{1}{2} \frac{\alpha\lambda j}{r^3} \frac{d}{d\nu} [(z-\zeta_{,}) Dy - (y - \eta_{,}) Dz]\, d\nu \\ &= \tfrac{1}{2} \frac{j}{r^3} \frac{d}{d\nu} [(z-\zeta_{,}) Dy - (y - \eta_{,}) Dz]\, D\omega, \\ Y &= \tfrac{1}{2} \frac{\alpha\lambda j}{r^3} \frac{d}{d\nu} [(x-\xi_{,}) Dz - (z - \zeta_{,}) Dx]\, d\nu \\ &= \tfrac{1}{2} \frac{j}{r^3} \frac{d}{d\nu} [(x-\xi_{,}) Dz - (z - \zeta_{,}) Dx]\, D\omega, \\ Z &= \tfrac{1}{2} \frac{\alpha\lambda j}{r^3} \frac{d}{d\nu} [(y-\eta_{,}) Dx - (x - \xi_{,}) Dy]\, d\nu \\ &= \tfrac{1}{2} \frac{j}{r^3} \frac{d}{d\nu} [(y-\eta_{,}) Dx - (x - \xi_{,}) Dy]\, D\omega. \end{aligned} \right.$$

On a, en effet, $\lambda = D\omega$ et $\alpha d\nu = 1$. Les quantités entre les crochets [ ] dépendent du signe d du numérateur voisin.

La comparaison des équations (1), (2), (3) de ce paragraphe avec les équations (1) et (2) du § V fait voir qu'elles n'en diffèrent que par la substitution de $\frac{1}{2} j D\omega$ à $\varkappa'$, par l'introduction du signe Σ relatif à la surface dont $D\omega$ est l'élément, enfin par ce que les fonctions entre deux crochets sont ici remplacées par leurs dérivées par rapport à ν. On pourra donc effectuer ici les mêmes transformations déjà effectuées dans le § V, et décomposer la valeur de J en deux parties J_p et J_d, l'une dépendant de la translation et l'autre de la rotation du conducteur. On aura ainsi

$$J = J_p + J_d,$$

$$(4) \qquad J_p = -\tfrac{1}{2} \varepsilon\varepsilon' j \Sigma . D\omega \frac{d}{d\nu} \int_{w_0}^{w_1} (X_p \delta\xi + Y_p \delta\eta + Z_p \delta\zeta),$$

$$(5)\quad \begin{cases} X_p = S \cdot \frac{1}{r^3}[(y_, - \eta)\,Dz_, - (z_, - \zeta)\,Dy_,], \\ Y_p = S \cdot \frac{1}{r^3}[(z_, - \zeta)\,Dx_, - (x_, - \xi)\,Dz_,], \\ Z_p = S \cdot \frac{1}{r^3}[(x_, - \xi)\,Dy_, - (y_, - \eta)\,Dx_,], \end{cases}$$

$$r^2 = (x_, - \xi)^2 + (y_, - \eta)^2 + (z_, - \zeta)^2,$$

$$(6)\quad J_d = -\tfrac{1}{2}\varepsilon\varepsilon' j \Sigma . D\omega \frac{d}{d\nu} \int \left[\cos l' \frac{x_, - \xi}{r} + \cos m' \frac{y_, - \eta}{r} + \cos n' \frac{z_, - \zeta}{r} \right] d\psi.$$

Ces expressions supposent que le conducteur induit est en repos : c'est le courant inducteur qui se meut, entraînant avec lui la surface auxiliaire dont $D\omega$ est un des éléments.

Si le conducteur induit est une courbe fermée, on a

$$J_d = 0.$$

Les quantités X_p, Y_p, Z_p, qui représentent les composantes de l'action du conducteur fixe sur l'unité de fluide magnétique condensée au point (ξ, η, ζ), peuvent toujours être considérées, d'après la loi déjà souvent citée d'Ampère, comme étant les dérivées par rapport à ξ, η, ζ d'une certaine fonction V_p de ces coordonnées. Ainsi V_p représentera le potentiel du conducteur relatif à l'unité de fluide en ξ, η, ζ. On aura donc

$$X_p = \frac{dV_p}{d\zeta}, \quad Y_p = \frac{dV_p}{d\eta}, \quad Z_p = \frac{dV_p}{d\zeta}.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (4), intégrant depuis l'origine du mouvement jusqu'à la fin, et nommant V'_p et V''_p les valeurs initiale et finale de ce potentiel, on aura

$$(7)\quad J_p = \tfrac{1}{2}\varepsilon\varepsilon' j \Sigma . D\omega \frac{d}{d\nu} (V'_p - V''_p).$$

La quantité $\frac{1}{2}\varepsilon j \Sigma . D\omega \frac{dV_p}{d\nu}$ est, d'après notre définition du potentiel, le potentiel du conducteur induit relatif au circuit inducteur. Ainsi « la force électromotrice développée dans un circuit induit par le mouvement relatif d'un inducteur est égale à la différence des deux valeurs que prend le potentiel, au commencement et à la fin du mouvement. »

Les formules (4) et (6) supposent que le circuit inducteur est fermé. Si le conducteur induit est aussi un circuit fermé, on peut opérer sur ce circuit comme nous avons opéré sur le circuit inducteur, et le transformer en une multitude de petits circuits d'aire $D\omega$ dont la réunion forme une surface qui s'appuie sur ce conducteur.

Alors, soit $D\sigma$ l'élément du courant inducteur supposé mobile; soient X_s, Y_s, Z_s les composantes de l'action électrodynamique du courant induit supposé égal à 1 sur l'élément $D\sigma$; soient $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ les déplacements de $D\sigma$; on aura, d'après la formule (7) du § IV,

$$(8)\qquad J = -\varepsilon\varepsilon'\Sigma.\int_{w_0}^{w_1}(X_s\delta\xi + Y_s\delta\eta + Z_s\delta\zeta)\,D\sigma.$$

Transformons les composantes X_s, Y_s, Z_s comme nous avons transformé X_σ, Y_σ, Z_σ, et nommons dn une petite longueur dirigée suivant la normale à l'élément de surface $D o$; nous aurons

$$(9)\qquad \begin{cases} X_s\,D\sigma = -\frac{1}{2}jS\cdot\dfrac{d}{dn}[(z_, - \zeta)\,D\eta - (y_, - \eta)\,D\zeta]\,Do, \\ Y_s\,D\sigma = -\frac{1}{2}jS\cdot\dfrac{d}{dn}[(x_, - \xi)\,D\zeta - (z_, - \zeta)\,D\xi]\,Do, \\ Z_s\,D\sigma = -\frac{1}{2}jS\cdot\dfrac{d}{dn}[(y_, - \eta)\,D\xi - (x_, - \xi)\,D\eta]\,Do, \end{cases}$$

$$r^2 = (x_, - \xi)^2 + (y_, - \eta)^2 + (z_, - \zeta)^2.$$

En effectuant sur les équations (8) et (9) le genre d'opérations auquel vient d'être soumis le système des équations (1) et (3), on aura

$$J = J_p + J_d,$$

$$(10)\qquad J_p - = \varepsilon\varepsilon' jS.\frac{d}{dn}\int_{w_0}^{w_1}(X\pi\,\delta x + Y\pi\,\delta y + Z\pi\,\delta z),$$

$$(11)\qquad \begin{cases} X\pi = -\Sigma\cdot\dfrac{1}{r^3}[(y - \eta_,)\,D\zeta - (z - \zeta_,)\,D\eta], \\ Y\pi = -\Sigma\cdot\dfrac{1}{r^3}[(z - \zeta_,)\,D\xi - (x - \xi_,)\,D\zeta], \\ Z\pi = -\Sigma\cdot\dfrac{1}{r^3}[(x - \xi_,)\,D\eta - (y - \eta_,)\,D\xi], \end{cases}$$

$$r^2 = (x - \xi_,)^2 + (y - \eta_,)^2 + (z - \zeta_,)^2,$$

$$(12)\qquad J_d = -\frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon' jS.Do\,\frac{d}{dn}\int\left[\cos l\,\frac{x - \xi_,}{r} + \cos m\,\frac{y - \eta_,}{r} + \cos n\,\frac{z - \zeta_,}{r}\right]d\psi.$$

Si l'inducteur est aussi une courbe fermée, on a

$$J_d = 0.$$

Les quantités $jX\pi$, $jY\pi$, $jZ\pi$ représentent les composantes de l'action de l'inducteur sur l'unité de fluide magnétique accumulée au point (x, y, z) : ce seront donc les dérivées partielles relatives à x, y, z du potentiel de cet inducteur. Si donc on représente ce potentiel par $j\mathrm{V}_\pi$, on aura

$$\mathrm{X}_\pi = \frac{d\mathrm{V}_\pi}{dx}, \quad \mathrm{Y}_\pi = \frac{d\mathrm{V}_\pi}{dy}, \quad \mathrm{Z}_\pi = \frac{d\mathrm{V}_\pi}{dz}.$$

La substitution de ces valeurs dans l'équation (10) donne, après l'intégration effectuée relativement au chemin parcouru,

$$(13) \qquad \mathrm{J}_p = \tfrac{1}{2}\varepsilon\varepsilon' j \mathrm{S}.\mathrm{D}o \frac{d}{dn}\left(\mathrm{V}'_\pi - \mathrm{V}''_\pi\right),$$

formule dans laquelle V'_π et V''_π sont les valeurs initiale et finale de V_π.

La quantité $\frac{1}{2}\varepsilon j \mathrm{S}.\mathrm{D}o\frac{d\mathrm{V}_\pi}{dn}$ est le potentiel du circuit inducteur sur l'induit supposé parcouru par un courant égal à ε. Ainsi, dans la loi énoncée à la page 148, on peut remplacer le potentiel du circuit induit par celui du circuit inducteur.

Ces deux expressions doivent être identiques. En effet, V_π est le potentiel d'un courant inducteur égal à 1 sur l'unité de fluide magnétique en x, y, z; on peut considérer ce courant inducteur comme équivalent à une surface magnétique d'élément $\mathrm{D}\omega$, comme nous l'avions supposé en premier lieu. Alors ce potentiel doit avoir pour expression [équation (10), § VII], $\Sigma.\frac{\varkappa\mathrm{D}\omega}{r}$: or ici il existe deux surfaces magnétiques concentriques qui contiennent des fluides de noms contraires; elles sont séparées par l'intervalle $d\nu$: il faut donc différentier cette expression par rapport à ν et n'en conserver que la variation; ce qui donne, pour le potentiel,

$$\Sigma.\varkappa\mathrm{D}\omega\frac{d\frac{1}{r}}{d\nu}d\nu.$$

Mais la quantité $\varkappa\mathrm{D}\omega\, d\nu$ représente le moment magnétique de l'élément $\mathrm{D}\omega$, lequel doit être égal à $\frac{1}{2}\mathrm{D}\omega$; donc

$$\mathrm{V}_\pi = \tfrac{1}{2}\Sigma.\mathrm{D}\omega\frac{d\frac{1}{r}}{d\nu}.$$

On démontrerait de même

$$\mathrm{V}_p = \tfrac{1}{2}\mathrm{S}.\mathrm{D}o\frac{d\frac{1}{r}}{dn}.$$

Dans ces formules, on a

$$r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2.$$

La substitution de ces valeurs dans les équations (7) et (13) mène à une équation unique

$$(14)\qquad J_p = \tfrac{1}{4}\,\varepsilon\varepsilon' j\,\mathrm{S}.\Sigma.\,\mathrm{D}\sigma\,\mathrm{D}\omega \left[\frac{d^2\frac{1}{r}}{dn\,d\nu}\right].$$

Les crochets indiquent que l'on doit prendre la différence des valeurs de la fonction à l'origine et à la fin du mouvement.

Ainsi le courant d'induction ne dépend que de la variation du potentiel. Il en résulte que toute circonstance qui altérera la valeur du potentiel produira un courant induit; si, par exemple, le courant inducteur passe de l'intensité j' à l'intensité j'', en nommant le courant induit $\mathrm{J}^{(\gamma)}$, on aura

$$(15)\qquad \begin{cases} \mathrm{J}^{(\gamma)} = \tfrac{1}{2}\,\varepsilon\varepsilon'\,(j'-j'')\,\mathrm{S}.\mathrm{D}\sigma\,\dfrac{d\mathrm{V}_\pi}{dn} = \tfrac{1}{2}\,\varepsilon\varepsilon'\,(j'-j'')\,\Sigma.\mathrm{D}\omega\,\dfrac{d\mathrm{V}_p}{d\nu} \\[2ex] \qquad = \tfrac{1}{4}\,\varepsilon\varepsilon'\,(j'-j'')\,\mathrm{S}.\Sigma.\mathrm{D}\sigma\,\mathrm{D}\omega\,\dfrac{d^2\frac{1}{r}}{dn\,d\nu}. \end{cases}$$

Il reste à savoir si ces formules sont applicables au cas d'invasion ou de cessation subite d'un courant; et c'est sur quoi l'expérience devra décider.

Toutes les formules démontrées jusqu'ici supposent que la rapidité des changements de lieu dans l'espace ou des changements d'intensité est beaucoup plus faible que la rapidité avec laquelle l'induction se développe dans le circuit induit. Elles ne sont donc rigoureusement applicables que dans le cas du développement lent des courants. En les étendant néanmoins au cas des courants qui se développent instantanément, on verrait que l'induction est la même que si le courant s'était subitement transporté d'une distance infinie au lieu de l'espace où il s'est formé.

§ XI.

La valeur du courant induit dépend d'une triple intégration, l'une relative au circuit du courant inducteur, une autre au circuit du courant induit, la troisième au chemin parcouru par chacun des éléments du circuit mobile. L'introduction du potentiel des surfaces magnétiques des circuits fait disparaître cette dernière intégration, mais elle remplace la double intégrale restante, par deux doubles intégrales dépendant de ces surfaces. Je vais montrer que si l'un des deux circuits est fermé, l'intégrale triple peut être réduite à une intégrale double, et même à une simple quadrature dans le cas où le circuit fermé aurait de très-petites dimensions par rapport à la distance qui le sépare de l'autre circuit.

Soit s l'arc du conducteur induit qui se meut vis-à-vis du circuit inducteur fixe et d'arc σ; l'équation (6) du § III donne

$$(1)\qquad \mathrm{J} = -\,\varepsilon\varepsilon'\,\mathrm{S}.\int_{w_0}^{w_1} (\mathrm{X}_\sigma\,\delta x + \mathrm{Y}_\sigma\,\delta y + \mathrm{Z}_\sigma\,\delta z)\,\mathrm{D}s;$$

$X_\sigma\, Ds$, $Y_\sigma\, Ds$, $Z_\sigma\, Ds$ sont les trois composantes de l'action électrodynamique exercée par l'arc σ sur l'élément Ds parcouru par un courant égal à 1 ; δx, δy, δz sont les trois projections du chemin infiniment petit $\delta\omega$ parcouru par cet élément. Le courant inducteur étant fermé et d'intensité j, on a, par les formules d'Ampère,

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} X_\sigma\, Ds &= \tfrac{1}{2} j \Sigma \left[\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\zeta} D\xi - \frac{d\frac{1}{r}}{d\zeta} D\zeta\right) Dz - \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\xi} D\eta - \frac{d\frac{1}{r}}{d\eta} D\xi\right) Dy\right], \\ Y_\sigma\, Ds &= \tfrac{1}{2} j \Sigma \left[\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\xi} D\eta - \frac{d\frac{1}{r}}{d\eta} D\xi\right) Dx - \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\eta} D\zeta - \frac{d\frac{1}{r}}{d\zeta} D\eta\right) Dz\right], \\ Z_\sigma\, Ds &= \tfrac{1}{2} j \Sigma \left[\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\eta} D\zeta - \frac{d\frac{1}{r}}{d\zeta} D\eta\right) Dy - \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\zeta} D\xi - \frac{d\frac{1}{r}}{d\xi} D\zeta\right) Dx\right], \end{aligned}\right.$$

r étant donné par l'équation

$$r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2.$$

Substituons ces valeurs dans l'équation (1) et ordonnons le second membre suivant $D\xi$, $D\eta$, $D\zeta$; nous aurons, pour le terme dépendant de $D\xi$,

$$-\tfrac{1}{2}\varepsilon\varepsilon' j \Sigma . S. \int \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\xi} Dx + \frac{d\frac{1}{r}}{d\eta} Dy + \frac{d\frac{1}{r}}{d\zeta} Dz\right)\delta x \\ -&\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\xi}\delta x + \frac{d\frac{1}{r}}{d\eta}\delta y + \frac{d\frac{1}{r}}{d\zeta}\delta z\right) Dx \end{aligned}\right\} D\xi.$$

On obtiendrait de même les termes en $D\eta$, $D\zeta$ en remplaçant les deux facteurs δx, Dx extérieurs aux termes entre parenthèses par δy, Dy, ou par δz, Dz, et en changeant en même temps $D\xi$ en $D\eta$ ou en $D\zeta$.

On peut remplacer $\frac{d\frac{1}{r}}{d\xi}$, $\frac{d\frac{1}{r}}{d\eta}$, $\frac{d\frac{1}{r}}{d\zeta}$ par $-\frac{d\frac{1}{r}}{dx}$, $-\frac{d\frac{1}{r}}{dy}$, $-\frac{d\frac{1}{r}}{dz}$. Ce changement fait, le terme ci-dessus se décompose dans les deux suivants :

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}\varepsilon\varepsilon' j \Sigma\ S. \int \left(\frac{d\frac{1}{r}}{dx} Dx + \frac{d\frac{1}{r}}{dy} Dy + \frac{d\frac{1}{r}}{dz} Dz\right)\delta x\, D\xi, \\ -&\tfrac{1}{2}\varepsilon\varepsilon' j \Sigma . S. \int \left(\frac{d\frac{1}{r}}{dx}\delta x + \frac{d\frac{1}{r}}{dy}\delta y + \frac{d\frac{1}{r}}{\delta z}\delta z\right) Dx\, D\xi. \end{aligned}\right.$$

Or on a, en intégrant par parties relativement à l'arc s,

$$\mathrm{S}.\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dx}\mathrm{D}x+\frac{d\frac{1}{r}}{dy}\mathrm{D}y+\frac{d\frac{1}{r}}{dz}\mathrm{D}z\right)\delta x=\frac{1}{r}\delta x-\mathrm{S}.\frac{1}{r}\frac{\mathrm{D}\delta x}{\mathrm{D}s}\mathrm{D}s,$$

et, en intégrant par parties relativement au chemin ϖ décrit par l'élément $\mathrm{D}s$,

$$\int\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dx}\delta x+\frac{d\frac{1}{r}}{dy}\delta y+\frac{d\frac{1}{r}}{dz}\delta z\right)\mathrm{D}x=\frac{1}{r}\mathrm{D}x-\int\frac{1}{r}\frac{\delta\mathrm{D}x}{\mathrm{D}s}\mathrm{D}s.$$

En substituant ces valeurs dans l'expression (3) et remarquant que

$$\int\mathrm{S}.\frac{1}{r}\frac{\mathrm{D}\delta x}{\mathrm{D}s}\mathrm{D}s=\mathrm{S}.\int\frac{1}{r}\frac{\delta\mathrm{D}x}{\mathrm{D}s}\mathrm{D}s,$$

on aura, pour le terme dépendant de $\mathrm{D}\xi$,

$$\tfrac{1}{2}\varepsilon\varepsilon' j\Sigma.\left(\int\frac{\delta x}{r}-\mathrm{S}.\frac{\mathrm{D}x}{r}\right)\mathrm{D}\xi,$$

et la valeur complète de J deviendra

$$(4)\qquad \mathrm{J}=\tfrac{1}{2}\varepsilon\varepsilon' j\left\{\begin{array}{l}\Sigma.\int_{s'}^{s''}\dfrac{\mathrm{D}\xi\,\delta x+\mathrm{D}\eta\,\delta y+\mathrm{D}\zeta\,\delta z}{r\delta s}\delta s\\[2ex] -\Sigma\,\mathrm{S}_{w'}^{w''}\dfrac{\mathrm{D}\xi\,\delta x+\mathrm{D}\eta\,\delta y+\mathrm{D}z\,\delta z}{r\delta\varpi}\mathrm{D}\varpi\end{array}\right\}.$$

Le signe $\int_{s'}^{s''}$ indique que l'on doit prendre la différence des valeurs de l'intégrale $\int$ aux deux extrémités de l'arc s, et le signe $\mathrm{S}_{w'}^{w''}$ indique que l'on doit prendre la différence des valeurs de l'intégrale S aux deux extrémités du chemin parcouru.

Je vais examiner d'abord le cas où le circuit mobile forme une courbe fermée, et celui où le chemin parcouru est aussi fermé, le circuit revenant, à la fin de son mouvement, occuper sa position première.

Premier cas. — Si le circuit induit est fermé, on a

$$\int_{s'}^{s''}=0,$$

et, par conséquent,

$$(5)\qquad \mathrm{J}=-\tfrac{1}{2}\varepsilon\varepsilon' j\Sigma.\mathrm{S}_{w'}^{w''}\frac{\mathrm{D}\xi\,\mathrm{D}x+\mathrm{D}\eta\,\mathrm{D}y+\mathrm{D}\zeta\,\mathrm{D}z}{r\mathrm{D}\varpi}\mathrm{D}\varpi.$$

Mais nous savons déjà, d'après ce qui a été dit dans le § X, que l'action électromotrice exercée par un circuit fermé sur un autre circuit est égale à la différence des valeurs que le potentiel du courant inducteur acquiert dans les positions initiale et finale du circuit induit supposé parcouru par un courant égal à ε.

Il en résulte que l'on pourra représenter ce potentiel par l'expression

$$\tfrac{1}{2}\varepsilon j\Sigma.\mathrm{S}.\frac{1}{r}(\mathrm{D}\xi\,\mathrm{D}x+\mathrm{D}\eta\,\mathrm{D}y+\mathrm{D}\zeta\,\mathrm{D}z)=\mathrm{V}.$$

Ainsi, lorsque deux circuits fermés parcourus par des courants égaux à l'unité agissent l'un sur l'autre, « le potentiel du premier relativement au second est le même que celui du second relativement au premier, » et la valeur commune de ces potentiels a pour expression

$$\tfrac{1}{2}\Sigma.\mathrm{S}.\frac{1}{r}(\mathrm{D}\xi\,\mathrm{D}x+\mathrm{D}\eta\,\mathrm{D}y+\mathrm{D}\zeta\,\mathrm{D}z)=\tfrac{1}{2}\Sigma.\mathrm{S}.\frac{1}{r}\left(\frac{\mathrm{D}\xi}{\mathrm{D}\sigma}\frac{\mathrm{D}x}{\mathrm{D}s}+\frac{\mathrm{D}\eta}{\mathrm{D}\sigma}\frac{\mathrm{D}y}{\mathrm{D}s}+\frac{\mathrm{D}\zeta}{\mathrm{D}\sigma}\frac{\mathrm{D}z}{\mathrm{D}s}\right)\mathrm{D}\sigma\,\mathrm{D}s.$$

Si donc l'on nomme $(\mathrm{D}\sigma, \mathrm{D}s)$ l'angle formé par les éléments $\mathrm{D}\sigma$, $\mathrm{D}s$ entre eux, on aura, pour le potentiel, $\tfrac{1}{2}\Sigma.\mathrm{S}.\frac{1}{r}\cos(\mathrm{D}\sigma, \mathrm{D}s)\,\mathrm{D}\sigma\,\mathrm{D}s$; c'est-à-dire « qu'il sera égal à la demi-somme des produits quatre à quatre des deux éléments $\mathrm{D}\sigma$, $\mathrm{D}s$, du cosinus de leur inclinaison relative et de la raison inverse de leur distance r. »

Deuxième cas. — Si la route suivie par le conducteur induit est rentrante sur elle-même, on a

$$\text{(6)}\qquad \mathrm{J}=\varepsilon\varepsilon' j\Sigma.\int_{s'}^{s''}\frac{\mathrm{D}\xi\,\delta x+\mathrm{D}\eta\,\delta y+\mathrm{D}\zeta\,\delta z}{r\delta s}\,\delta s;$$

c'est-à-dire que J est égal à la différence des deux valeurs que prend l'expression

$$\varepsilon\varepsilon' j\Sigma.\int\frac{1}{r}(\mathrm{D}\xi\,\delta x+\mathrm{D}\eta\,\delta y+\mathrm{D}\zeta\,\delta z),$$

lorsqu'on y considère δx, δy, δz comme se rapportant successivement: 1° au chemin parcouru par l'une des deux extrémités du conducteur induit; 2° au chemin parcouru par l'autre extrémité.

Considérons chacun de ces deux chemins comme étant des conducteurs matériels fermés et susceptibles d'induction, ce qui permettra de remplacer pour le moment δx, δy, δz par $\mathrm{D}x$, $\mathrm{D}y$, $\mathrm{D}z$, et $\int$ par S. Alors, en nous reportant au cas précédent, nous verrons que la force électromotrice développée dans ce cas idéal sera égale à la différence des valeurs du potentiel du circuit inducteur sur le circuit fermé décrit par l'une des extrémités et sur le circuit fermé décrit par l'autre, chacun de ces deux derniers circuits étant supposé parcouru par le courant ε.

Ainsi, dans ce cas, la force électromotrice ne dépend que du chemin décrit par chacune des deux extrémités de l'arc, et nullement de la forme du conducteur induit.

Si, dans ce cas, le conducteur venait à se fermer sur lui-même, la force électromotrice, développée pendant une révolution complète, serait égale à zéro.

Troisième cas. — Je reprends maintenant le cas général où un circuit non fermé a parcouru un chemin qui ne le ramène pas à sa position première. Alors, en matérialisant par la pensée les deux arcs décrits par chacune des deux extrémités, on obtient un quatrilatère courbe formé : 1° par les deux courbes s', s'' avec lesquelles vient successivement coïncider l'arc s au commencement et à la fin du mouvement, et 2° par les deux courbes e', e'' dont l'une a été décrite par l'une des extrémités de l'arc s, et l'autre par l'autre extrémité du même arc. Comme la formule (4) se décompose naturellement en quatre termes dont les deux premiers (*voyez* le deuxième cas) sont, après suppression du facteur ε', les valeurs du potentiel du circuit inducteur par rapport aux courbes e', e'' parcourues par le courant ε, et dont les deux derniers (*voyez* le premier cas) sont, après suppression de ε', les valeurs du même potentiel relativement aux courbes s', s'' parcourues par ce même courant, on voit que l'on peut énoncer la loi suivante :

« La force électromotrice d'induction développée dans l'arc s par un déplacement de cet arc tel, qu'il décrive une surface limitée par un quadrilatère courbe $s'e's''e''$, est égale au potentiel du circuit inducteur sur le circuit fermé et quadrilatère de cette surface supposé parcouru par un courant continu et égal à ε. »

Il résulte de la continuité du quadrilatère, qu'en e' le courant ε est de direction contraire à celle du courant en e'', et qu'il en est de même pour s' et s''.

Cette loi générale comprend, comme cas particuliers, les deux cas examinés en premier lieu ; les lois qui s'y rapportent s'en déduisent comme de simples corollaires.

La même loi subsiste encore si l'on remplace le courant inducteur fixe par un système de plusieurs courants inducteurs fixes, et, par conséquent, par un solénoïde, ou même par un aimant.

Cette loi pourra aussi être appliquée, quel que soit celui des deux circuits qui soit fermé ; car la force électromotrice développée par le circuit A en B est toujours la même que celle développée par B en A, pourvu que l'intensité du courant reste la même dans le circuit qui induit : sous cette condition, il est permis d'échanger entre eux les circuits induit et inducteur. On sait aussi que l'on peut substituer au mouvement d'un des circuits le mouvement inverse de l'autre : ainsi la règle sera toujours applicable pourvu que l'un des deux circuits soit fermé.

§ XII.

Nous venons de voir que le potentiel V d'un conducteur fermé σ relativement à un autre conducteur fermé s, les deux courants qui les parcourent étant égaux à l'unité, peut être représenté par

$$(1)\qquad V = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{S}.\Sigma.\frac{1}{r}(\mathrm{D}x\,\mathrm{D}\xi + \mathrm{D}y\,\mathrm{D}\eta + \mathrm{D}z\,\mathrm{D}\zeta).$$

Je vais développer cette expression en supposant que σ soit une courbe plane et de petites dimensions comparativement à la distance r.

Soient ξ, η, ζ les coordonnées du centre de gravité de l'arc de la courbe σ, et

$$(2)\qquad \xi+\alpha,\quad \eta+\beta,\quad \zeta+\gamma,$$

celles d'un point de son contour : ξ, η, ζ devenant des quantités constantes, on devra remplacer, dans l'équation (1), $D\xi$, $D\eta$, $D\zeta$ par $D\alpha$, $D\beta$, $D\gamma$.

Menons une normale au plan de la courbe σ, et soit ν l'angle que cette normale fait avec l'axe des ζ, ou plutôt des γ. Prenons cette normale pour l'un des axes d'un système de nouvelles coordonnées α', β', γ', par exemple pour l'axe des γ'. Soit ω l'angle que forme le plan des axes des γ et des γ' avec l'axe des α, et plaçons à l'intersection de ce même plan et du plan de la courbe σ l'axe des β' ; l'axe des α' sera situé dans le plan de la courbe σ, et l'on aura

$$\alpha = \alpha' \sin\omega - \beta' \cos\nu \cos\omega + \gamma' \sin\nu \cos\omega,$$

$$\beta = -\alpha' \cos\omega - \beta' \cos\nu \sin\omega + \gamma' \sin\nu \sin\omega,$$

$$\gamma = \beta' \sin\nu + \gamma' \cos\nu.$$

Rapportons la courbe σ à des coordonnées polaires situées dans son plan, plaçons l'origine des rayons vecteurs ρ au centre (ξ, η, ζ), et prenons l'axe des α' pour origine des angles polaires φ ; nous aurons, sur la courbe σ,

$$\alpha' = \rho\cos\varphi,\quad \beta' = \rho\sin\varphi,\quad \gamma' = 0,$$

et ainsi, pour tous les points de cette courbe,

$$(3)\qquad \begin{cases} \alpha = \rho(\sin\omega\cos\varphi - \cos\nu\cos\omega\sin\varphi), \\ \beta = -\rho(\cos\omega\cos\varphi + \cos\nu\sin\omega\sin\varphi), \\ \gamma = \rho\sin\nu\sin\varphi. \end{cases}$$

D'autre part, on a

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{[(x-\xi-\alpha)^2 + (y-\eta-\beta)^2 + (z-\zeta-\gamma)^2]^{\frac{1}{2}}};$$

et, en développant cette expression suivant les puissances de α, β, γ, et négligeant les termes en α^2, β^2, γ^2, elle devient

$$\frac{1}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2]^{\frac{1}{2}}} + \frac{(x-\xi)\alpha + (y-\eta)\beta + (z-\zeta)\gamma}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Substituons cette valeur dans l'équation (1), et remarquons qu'en intégrant dans toute l'étendue de la courbe Σ, on a

$$\Sigma.D\alpha = 0,\quad \Sigma.D\beta = 0,\quad \Sigma.D\gamma = 0,$$

ce qui fait disparaître le premier des deux termes provenant de la substitution : nous aurons

$$(4)\qquad V = \tfrac{1}{2} S.\Sigma.\frac{(DxD\alpha + DyD\beta + DzD\gamma)\,[(x-\xi)\alpha + (y-\beta)\eta + (z-\zeta)\gamma]}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

On a ensuite, l'origine des coordonnées polaires étant au centre de gravité de l'arc σ,

$$\Sigma.\alpha D\alpha = 0,\quad \Sigma.\beta d\beta = 0,\quad \Sigma.\gamma d\gamma = 0,$$

$$\Sigma.\alpha D\beta = -\Sigma.\beta D\alpha = -\tfrac{1}{2}\cos\nu\,\Sigma\,\rho^2 D\varphi,$$

$$\Sigma.\alpha D\gamma = -\Sigma.\gamma D\alpha = \tfrac{1}{2}\sin\nu\sin\omega\,\Sigma.\rho^2 D\varphi,$$

$$\Sigma\,\beta D\gamma = -\Sigma.\gamma D\beta = -\tfrac{1}{2}\sin\nu\cos\omega\,\Sigma.\rho^2 D\varphi.$$

Donc enfin

$$(5)\qquad V = \tfrac{1}{4}(\Sigma.\rho^2 D\varphi) S.\frac{1}{r^3}\left\{\begin{array}{l} \cos\nu\,[(y-\eta)Dx - (x-\xi)Dy] \\ +\sin\nu\sin\omega\,[(x-\xi)Dz - (z-\zeta)Dx] \\ +\sin\nu\cos\omega\,[(z-\zeta)Dy - (y-\eta)Dz] \end{array}\right\}.$$

L'intégrale $\frac{1}{2}\Sigma.\rho^2 D\varphi$ représente l'aire du petit circuit enveloppé par la courbe σ; je la représenterai par λ. Les facteurs $\cos\nu$, $\sin\nu\sin\omega$, $\sin\nu\cos\omega$ sont les cosinus des angles que la normale au circuit fait avec les trois axes des z, des y et des x. Supposons maintenant que le point (ξ, η, ζ) vienne à se déplacer, en restant sur cette normale, et que le déplacement soit égal à dN : on aura évidemment

$$(6)\qquad \cos\nu = \frac{d\zeta}{dN},\quad \sin\nu\sin\omega = \frac{d\eta}{dN},\quad \sin\nu\cos\omega = \frac{d\xi}{dN}.$$

En outre, on peut considérer le facteur $\frac{1}{r^3}[(y-\eta)Dx - (x-\xi)Dy]$ comme étant le résultat de la différentiation par rapport à ζ de la quantité

$$\left(1 - \frac{z-\zeta}{r}\right)\left[\frac{(y-\eta)Dx - (x-\xi)Dy}{(y-\eta)^2 + (x-\xi)^2}\right],$$

attendu que l'on a

$$\frac{1}{d\zeta}\,d\left(1 - \frac{z-\zeta}{r}\right) = \frac{(y-\eta)^2 + (x-\xi)^2}{r^3}.$$

De même, on peut considérer $\frac{1}{r^3}[(x-\xi)Dz - (z-\zeta)Dx]$ comme étant la dérivée, par rapport à η, de

$$\left(1 - \frac{y-\eta}{r}\right)\left[\frac{(x-\xi)Dz - (z-\zeta)Dx}{(x-\xi)^2 + (z-\zeta)^2}\right],$$

et $\frac{1}{r^3}\{[(z-\zeta)Dy - (y-\eta)Dz]\}$ comme étant la dérivée, par rapport à ξ, de l'expression

$$\left(1-\frac{x-\xi}{r}\right)\left[\frac{(z-\zeta)\,\mathrm{D}y-(y-\eta)\,\mathrm{D}z}{(z-\zeta)^2+(y-\eta)^2}\right].$$

Avant de substituer ces valeurs dans l'équation (5), nous écrirons

$$(7)\qquad \begin{cases} \mathrm{S}.\left(1-\dfrac{x-\xi}{r}\right)\dfrac{(z-\zeta)\,\mathrm{D}y-(y-\eta)\,\mathrm{D}z}{(z-\zeta)^2+(y-\eta)^2}=\mathrm{K}, \\ \mathrm{S}.\left(1-\dfrac{y-\eta}{r}\right)\dfrac{(x-\xi)\,\mathrm{D}z-(z-\zeta)\,\mathrm{D}x}{(x-\xi)^2+(z-\zeta)^2}=\mathrm{L}, \\ \mathrm{S}.\left(1-\dfrac{z-\zeta}{r}\right)\dfrac{(y-\eta)\,\mathrm{D}x-(x-\xi)\,\mathrm{D}y}{(y-\eta)^2+(x-\xi)^2}=\mathrm{M}. \end{cases}$$

L'équation (5) devient alors

$$(8)\qquad \mathrm{V}=\tfrac{1}{2}\lambda\left\{\frac{d\zeta}{d\mathrm{N}}\frac{d\mathrm{M}}{d\zeta}+\frac{d\eta}{d\mathrm{N}}\frac{d\mathrm{L}}{d\eta}+\frac{d\xi}{d\mathrm{N}}\frac{d\mathrm{K}}{d\xi}\right\}.$$

Supposons maintenant que l'arc s soit une courbe fermée ; je dis que l'on a

$$\mathrm{K}=\mathrm{L}=\mathrm{M}.$$

En effet, chacune des expressions K, L, M représente la *surface apparente* de s prise du point (ξ, η, ζ), c'est-à-dire l'aire sphérique interceptée, sur la sphère de rayon 1 dont le centre est en (ξ, η, ζ), par le cône qui a ce centre pour sommet et s pour base [*].

En choisissant la lettre K pour désigner cette surface apparente, l'équation (8) se change en

$$(9)\qquad \mathrm{V}=\tfrac{1}{2}\lambda\frac{d\mathrm{K}}{d\mathrm{N}}.$$

Ainsi « le potentiel du très-petit circuit plan et fermé λ sur le circuit fermé s, les » deux circuits étant parcourus par des courants égaux à l'unité, est égal au produit

[*] Car $(y-\eta)\,\mathrm{D}x-(x-\xi)\,\mathrm{D}y$ est la double aire de la projection sur le plan des xy du triangle ayant (ξ, η, ζ) pour sommet et Ds pour base, ainsi $\dfrac{(y-\eta)\,\mathrm{D}x-(x-\xi)\,\mathrm{D}y}{(y-\eta)^2+(x-\xi)^2}$ est l'angle formé entre les deux plans passant par la parallèle à l'axe des z menée par ξ, η, ζ et par chacune des extrémités de Ds. Soit (Ds) ce que devient Ds ramenée par ses rayons vecteurs sur la sphère de rayon 1 : si du point de rencontre de cette sphère avec la parallèle aux z menée par son centre, on mène deux arcs de grand cercle aux extrémités de (Ds), la projection de cette portion de fuseau sur cette parallèle aura pour longueur $1-\dfrac{z-\zeta}{r}$, et l'on sait qu'en la multipliant par l'angle compris entre les deux arcs de grands cercles, on aura l'aire de cette portion de fuseau. L'intégrale de toutes ces aires sera l'aire apparente de la courbe s ; ce sera la valeur de M. On le démontrerait de la même manière pour les quantités K et L. A. B.

« de $\frac{1}{2}\lambda$ par le coefficient différentiel de la surface apparente de s vue du centre de λ, « ce coefficient différentiel étant pris par rapport à la normale au circuit λ. »

Supposons que le circuit λ soit la section d'un canal cylindrique, ayant la normale N pour axe, et considérons une série de sections équidistantes toutes égales à λ, et toutes perpendiculaires à cet axe : α étant le nombre des circuits contenus dans l'unité de longueur de la normale, le nombre des circuits contenus dans la longueur δN sera $\alpha\delta N$, et le potentiel d'un tel système de circuits sera

$$\tfrac{1}{2}\alpha\lambda \frac{dK}{dN}\delta N.$$

Or ce système n'est autre chose qu'un solénoïde infiniment petit. Si ce solénoïde s'étend depuis $N = N'$ jusqu'à $N = N''$, en nommant K' et K'' les valeurs de K correspondant aux deux extrémités du solénoïde, le potentiel de ce solénoïde fini sera

$$(10) \qquad \tfrac{1}{2}\alpha\lambda(K'' - K').$$

Si l'extrémité N' est située à l'infini, le solénoïde devient illimité et unipolaire, et son potentiel aura pour valeur générale

$$(11) \qquad \tfrac{1}{2}\alpha\lambda K.$$

Concevons donc qu'au lieu d'être égal à 1, le courant des spires du solénoïde ait une intensité j ; le potentiel du pôle de ce solénoïde unipolaire sera

$$\tfrac{1}{2}\alpha\lambda j K;$$

or, comme dans la théorie des fluides magnétiques, on substitue à un pôle de solénoïde (α, λ, j) un pôle d'aimant dont la quantité $\varkappa'$ de fluide libre est égale à $\frac{1}{2}\alpha\lambda j$, on voit que le potentiel d'un tel pôle d'aimant aura pour valeur

$$(12) \qquad \varkappa' K.$$

Le potentiel d'un aimant bipolaire serait de même

$$(13) \qquad \varkappa'(K'' - K'),$$

K'' et K' étant les surfaces apparentes du circuit s prises de chacun des deux pôles de l'aimant, et le circuit s étant toujours supposé parcouru par un courant égal à 1.

On déduit de là facilement la valeur du potentiel d'un aimant quelconque sur un circuit fermé s ; car, quelle que soit la distribution interne du fluide, on peut toujours supposer, quant à ses effets extérieurs, que cette distribution est toute superficielle. Si donc on nomme $\varkappa D\omega$ la quantité de fluide positif accumulé sur l'élément $D\omega$ de la surface, K étant la surface apparente de s prise du centre de cet élément $D\omega$, le potentiel de tout l'aimant sera représenté par l'intégrale

$$(14) \qquad S.\varkappa K D\omega,$$

étendue à toute la surface de l'aimant.

En transportant ces valeurs du potentiel dans l'équation (1) du § IX, où $\varkappa V'$, $\varkappa V''$ étaient les valeurs du potentiel aux deux extrémités de la route parcourue, on aura, pour le courant induit produit dans l'arc s par le déplacement de l'aimant,

$$(15)\qquad J = \varepsilon\varepsilon' S.\varkappa(K' - K'')D\omega,$$

K' et K'' étant les valeurs des surfaces apparentes aux deux extrémités de la route.

Si le conducteur induit, n'étant pas fermé, a parcouru une route qui le ramène à son point de départ, la même formule sera applicable; mais alors K' et K'' représentent les surfaces apparentes des circuits fermés décrits par chacune des deux extrémités de s.

Enfin, si l'on écrit

$$(15\ bis)\qquad J = \varepsilon\varepsilon' S.\varkappa K D\omega,$$

cette formule s'appliquera au cas où le conducteur s aura décrit un chemin quelconque, ses extrémités ayant parcouru les arcs e', e'', lesquels, avec les positions initiale et finale s', s'', complètent le quadrilatère curviligne $s'e's''e''$. Il faudra concevoir que dans l'équation (15 *bis*), K est la surface apparente de ce quadrilatère curviligne $s'e's''e''$, vu du centre de l'élément $D\omega$.

Si l'aimant, sans changer de place, éprouvait une variation dans son aimantation, l'effet de cette variation serait de substituer à la fonction $\varkappa'$ une nouvelle fonction $\varkappa''$: alors le courant induit serait, d'après l'équation (4) du § IX, égal à

$$(16)\qquad J^{(\mu)} = \varepsilon\varepsilon' S.(\varkappa' - \varkappa'')KD\omega.$$

Si l'aimant, d'abord désaimanté, arrivait à un état magnétique définitif représenté par la fonction $\varkappa$, le courant induit, résultat de ce changement, serait

$$(17)\qquad J^{(\mu)} = -\varepsilon\varepsilon' S.\varkappa K D\omega.$$

D'après la définition que nous avons donnée de la quantité K, le cône dont l'intersection avec la surface sphérique de rayon 1 doit déterminer la surface apparente K partage cette surface en deux segments complémentaires l'un de l'autre; ces deux surfaces apparentes complémentaires sont telles, que l'une étant égale à K, l'autre est égale à $4\pi - K$. Il est utile de posséder une règle générale qui permette de savoir laquelle de ces deux valeurs doit être préférée, et quel est le signe qui doit lui être attribué.

Pour cela, je reprends l'expression

$$K = S.\left(1 - \frac{z-\zeta}{r}\right)\frac{(y-\eta)Dx - (x-\xi)Dy}{(y-\eta)^2 + (x-\xi)^2}.$$

En nommant θ l'angle formé par le rayon vecteur r mené du pôle (ξ, η, ζ) au point x, y, z, avec une parallèle aux z menée par ce pôle, le premier facteur sous le signe S prend la forme $1 - \cos\theta$. En nommant φ l'angle formé par le plan de l'angle θ avec un plan fixe passant par l'axe des z, le second facteur est égal à $d\varphi$ (*voyez* la note de la page 158). On a donc

$$(18)\qquad K = S.(1 - \cos\theta)\, d\varphi,$$

l'intégrale devant s'étendre à tous les éléments de la courbe s. Pour simplifier, je supposerai celle-ci plane et convexe sur tout son pourtour.

Si la parallèle aux z menée par le pôle (ξ, η, ζ) rencontre le plan de la courbe s dans la partie interne à la courbe, les limites de l'intégration par rapport à φ sont 0 et 2π; alors, en nommant θ' et θ'' les deux valeurs de θ correspondant à φ et à $180° + \varphi$, on peut écrire

$$(19)\qquad K = S_0^\pi (2 - \cos\theta - \cos\theta')\, d\varphi.$$

Si, au contraire, cette parallèle est extérieure à la courbe s, on a deux valeurs de θ, savoir θ et θ', correspondant à la même valeur de φ, et l'on peut écrire

$$(20)\qquad K = S_{\varphi'}^{\varphi''} (\cos\theta - \cos\theta')\, d\varphi,$$

φ' et φ'' étant les deux valeurs de φ pour lesquelles $\theta = \theta'$, c'est-à-dire pour lesquelles le plan des angles θ et θ' devient tangent à la courbe.

Je nommerai côté positif du plan de la courbe s, la partie de l'espace située d'un même côté de ce plan et qui renferme le demi-axe des z positives; côté négatif, l'autre moitié qui contient le demi-axe des z négatives. Je considérerai le pôle (ξ, η, ζ) comme mobile, et je nommerai (K) la plus petite des deux valeurs que l'on peut adopter pour la surface apparente de s. Alors, tant que le pôle reste situé d'un même côté du plan de la courbe s, il n'existe pas d'ambiguïté relativement aux valeurs initiale et finale de K. Mais il peut arriver que le pôle mobile traverse ce plan: si le pôle, au moment de ce passage, est intérieur au circuit s, K devient égal à 2π; tandis que si ce passage se fait en dehors du circuit, K passe par la valeur $K = 0$.

Soient donc ϖ' un point situé dans la partie positive de l'espace, ϖ'' un point situé dans la partie négative.

Si le pôle va de ϖ' à ϖ'' en traversant le circuit, on aura

$$K' = (K'), \qquad K'' = 4\pi - (K'').$$

S'il va de ϖ' à ϖ'' sans traverser le circuit, on aura

$$K' = (K'), \qquad K'' = -(K'').$$

Si le pôle va de ϖ'' à ϖ' en traversant le circuit, on aura

$$K'' = -(K''), \qquad K' = -4\pi + (K').$$

S'il va de ϖ'' à ϖ' sans le traverser, on aura

$$K'' = -(K''), \qquad K' = (K').$$

On peut donc écrire, en général, pour le point ϖ,

$$(21) \qquad K = \pm (K),$$

le signe $+$ devant être préféré si le point ϖ est du côté positif, le signe $-$ s'il est du côté négatif. Mais, en outre, en calculant la valeur définitive de la différence des potentiels lorsque le pôle va d'un point quelconque ϖ' à un autre point quelconque ϖ'', il faut avoir soin d'ajouter à la différence calculée d'après l'équation (21) autant de fois 4π que le pôle a traversé l'aire *intérieure* du circuit en allant du côté positif au côté négatif, et d'en retrancher 4π autant de fois que le pôle a traversé la même aire dans la direction opposée; de sorte que si l'on nomme p le premier et n le second de ces deux nombres, la correction à faire sera

$$+ 4p\pi - 4n\pi.$$

Cette correction transportée dans l'équation (15) devra changer de signe, et l'on aura alors

$$(22) \qquad J = \varepsilon\varepsilon'\varkappa \left\{ \pm (K') - [\pm (K'')] + 4(n-p)\pi \right\}.$$

Si le pôle revient à son point de départ, on a simplement

$$(23) \qquad J = \varepsilon\varepsilon'\varkappa . 4(n-p)\pi.$$

Ainsi le courant induit dans un conducteur plan s par le mouvement d'un pôle magnétique qui parcourt une route fermée est nul, si cette route ne traverse pas le circuit; mais chaque fois que le pôle traversera l'aire s du côté positif vers le côté négatif, il se développera une force électromotrice $-4\pi\varepsilon\varkappa$, et chaque fois que le pôle traversera la même aire en sens inverse, il se développera la force électromotrice $+4\pi\varepsilon\varkappa$.

§ XIII.

Les exemples suivants serviront à montrer l'usage que l'on peut faire des formules précédentes.

I. Considérons d'abord les courants d'induction développés dans des circuits fermés par le magnétisme de la terre. Ici les centres d'action des forces électrodynamiques sont très-éloignés par rapport aux dimensions du conducteur; la translation ne peut développer aucun courant induit: c'est donc à la rotation qu'il faut recourir.

On sait que l'on peut remplacer fictivement le magnétisme terrestre, soit par un aimant convenablement placé sur le prolongement de la ligne d'inclinaison, soit plus simplement encore par un pôle magnétique unique P possédant une quantité $\varkappa$ de fluide libre, et placé sur la ligne d'inclinaison à une distance r très-grande par rapport aux dimensions du conducteur, la quantité $\frac{\varkappa}{r^2}$ étant ce que l'on a appelé l'intensité magnétique du globe au lieu de l'observation. On peut alors appliquer la formule

$$(1) \qquad J = \varepsilon\varepsilon'\varkappa (K' - K''),$$

K′ et K″ étant les surfaces apparentes du circuit induit s vu du pôle P, au commencement et à la fin du mouvement. Supposons que le conducteur s forme un circuit plan d'aire F, et soit ν l'angle variable formé par l'une des deux moitiés de la normale au circuit avec la partie plongeante de la ligne d'inclinaison; en nommant ν' et ν'' les deux valeurs de ν au commencement et à la fin, on aura

$$K' = \frac{F}{r^2}\cos\nu', \quad K'' = \frac{F}{r^2}\cos\nu''.$$

Si $\cos\nu'$ et $\cos\nu''$ sont de signes différents, cela voudra dire qu'en substituant le mouvement du pôle au mouvement du conducteur, le pôle a traversé le plan de ce dernier et a passé du côté positif au côté négatif du plan du circuit, ou *vice versâ*: lorsque ce cas se présente, le plan de la courbe est coupé par le pôle, à l'extérieur de l'aire F; il n'y a donc pas lieu d'appliquer la correction indiquée à la fin du paragraphe précédent. Donc

$$(2) \qquad J = \varepsilon\varepsilon' \frac{\varkappa F}{r^2}(\cos\nu' - \cos\nu'').$$

Soient (a, r) l'angle formé par l'axe de rotation du circuit avec la ligne d'inclinaison r; c l'angle formé par l'axe avec la normale; φ l'angle de position du plan passant par l'axe de rotation et par la normale, le départ des angles φ étant ainsi choisi, que l'on ait $\varphi = 0$, lorsque ce plan contient r; on aura

$$\cos\nu = \cos(a, r)\cos c + \sin(a, r)\sin c\cos\varphi.$$

Donc, lorsque la rotation amènera la normale au circuit de la position φ' à la position φ'', on aura pour le courant produit, en écrivant $\frac{\varkappa}{r^2} = M$,

$$(3) \qquad J = \varepsilon\varepsilon' MF\sin(a, r)\sin c(\cos\varphi' - \cos\varphi'').$$

Après une rotation complète, l'action totale J du courant devient égale à zéro; mais l'emploi d'un commutateur peut modifier ce résultat. Le commutateur devra renverser le courant au moment où le courant élémentaire change de signe, c'est-à-dire au moment où le courant J devient un maximum ou un minimum.

Dans l'équation (3), φ' a une valeur arbitraire, mais constante, et φ'' varie de 0 à 360 degrés: c'est donc lorsque $\varphi'' = 0°$, $\varphi'' = 180°$, que le renversement devra s'effectuer. Le commutateur satisfaisant à cette condition pour chaque demi-révolution, le courant induit total sera donné par la formule (3), dans laquelle on aura dû poser $\varphi' = 0°$, $\varphi'' = 180°$. Donc, pour une demi-révolution,

$$(4) \qquad J = 2\varepsilon\varepsilon' MF\sin(a, r)\sin c.$$

Pour obtenir le maximum d'effet, il faut que $c = 90°$, c'est-à-dire que l'axe de rotation soit situé dans le plan même du conducteur.

Cette condition étant satisfaite, si l'axe de rotation est horizontal, et dirigé suivant la ligne est-ouest magnétique, on a $(a, r) = 90°$,

$$(5) \qquad J = 2\varepsilon\varepsilon' MF.$$

Si l'axe toujours horizontal est dirigé suivant la méridienne magnétique, j étant l'inclinaison, on a $(a, r) = j$,

$$(6) \qquad J = 2\varepsilon\varepsilon' MF \sin j.$$

Dans le cas de l'axe vertical, on aurait

$$(7) \qquad J = 2\varepsilon\varepsilon' MF \cos j.$$

On peut consulter à ce sujet le Mémoire de Weber sur l'Inclinatoire d'induction.

II. Lorsque l'on veut faire usage des formules (14), (15), (16) ou (17) du paragraphe précédent, il faut connaître la forme de la fonction $\varkappa$, qui représente la distribution du magnétisme à la surface de l'aimant. Comme cette distribution n'est connue qu'approximativement, je me bornerai à examiner le cas d'un aimant cylindrique ou prismatique, et je supposerai qu'il n'y ait de fluide que sur les deux bases, le fluide austral étant uniformément répandu sur celle des deux bases qui, libre, se dirigerait vers le nord, et le fluide boréal sur la face opposée [*]. Je nommerai df l'un des éléments de la surface de ces bases, et je supposerai que les dimensions de ces bases soient assez petites pour que les valeurs de K correspondant à chaque élément df soient sensiblement égales entre elles. Je nommerai K_o la valeur de K appartenant à chacun des points de la base supérieure, et K_u celle qui appartient à chacun des points de la base inférieure.

Ceci posé, soit un conducteur circulaire de rayon R situé dans un plan normal à l'axe de l'aimant, et dont le centre est situé sur cet axe ou sur son prolongement. Le courant induit dû à l'aimantation subite du cylindre magnétique sera, d'après la formule (17) du § XII, égal à

$$(8) \qquad J = -\varepsilon\varepsilon' S.\varkappa K df = -\varepsilon\varepsilon' \varkappa f (K_o - K_u).$$

Si les deux bases de l'aimant sont au-dessous du plan du conducteur, on aura

$$K_o - K_u = (K_o) - (K_u).$$

Si l'une est au-dessus, et l'autre au-dessous,

$$K_o - K_u = 4\pi - (K_o) - (K_u).$$

Enfin, si l'aimant est en entier au-dessus du plan,

$$K_o - K_u = -(K_o) + (K_u).$$

---

[*] Cela revient à supposer que l'aimant est formé par un faisceau de solénoïdes juxtaposés, ayant tous la longueur de l'aimant, pour base inférieure l'un des éléments df de la base u, et pour base supérieure l'élément correspondant dans la base o.

Ces trois valeurs se ramènent à une seule expression analytique ; car, h étant la longueur de l'aimant, et x la distance du centre du conducteur à la base supérieure de l'aimant, $h+x$ sera la distance à sa base inférieure, et l'on aura

$$(9)\qquad \mathrm{K}_o - \mathrm{K}_u = 2\pi\left[\frac{h+x}{\sqrt{(h+x)^2+\mathrm{R}^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+\mathrm{R}^2}}\right];$$

d'où

$$(10)\qquad \mathrm{J} = -2\pi\varepsilon\varepsilon'\varkappa f\left[\frac{h+x}{\sqrt{(h+x)^2+\mathrm{R}^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+\mathrm{R}^2}}\right].$$

Le courant induit acquerra sa valeur maximum pour $x = -\frac{1}{2}h$, et l'on aura alors

$$(11)\qquad \mathrm{J}_{(m)} = -\frac{4\pi\varepsilon\varepsilon'\varkappa f}{\sqrt{1+\left(\frac{2\mathrm{R}}{h}\right)^2}}.$$

Au contraire, si le pôle supérieur était dans le plan du conducteur, on aurait $x = 0$,

$$\mathrm{J} = -\frac{2\pi\varepsilon\varepsilon'\varkappa f}{\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{R}}{h}\right)^2}},$$

valeur presque moitié moindre que la précédente.

Supposons maintenant que l'aimant occupe l'axe d'une spirale de N tours, de rayon R, et dont la longueur suivant son axe soit égale à L. Considérons dans l'équation (10) x comme variant depuis $x = -a$ jusqu'à $x = -(a+\mathrm{L})$. On multipliera le second membre par $\frac{\mathrm{N}\delta x}{\mathrm{L}}$, nombre de tours contenu dans la tranche d'épaisseur δx, et l'on aura, en intégrant,

$$\mathrm{J} = -2\pi\varepsilon\varepsilon'\varkappa f\int_{-a}^{-(a+\mathrm{L})}\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{L}}\left[\frac{h+x}{\sqrt{(h+x)^2+\mathrm{R}^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+\mathrm{R}^2}}\right]\delta x,$$

ou

$$(12)\qquad \mathrm{J}_s = -2\pi\varepsilon\varepsilon'\varkappa f\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{L}}\left\{\begin{array}{l}\sqrt{(\mathrm{L}+a)^2+\mathrm{R}^2} - \sqrt{(h-\mathrm{L}-a)^2+\mathrm{R}^2} \\ -\sqrt{a^2+\mathrm{R}^2} + \sqrt{(h-a)^2+\mathrm{R}^2}]\end{array}\right\}.$$

Les quantités $-a$, $-\mathrm{L}-a$ sont les distances du pôle supérieur aux deux plans terminaux de la spire; $-a+h$, $-\mathrm{L}-a+h$ sont les mêmes distances pour le pôle inférieur. Si l'aimant est symétriquement placé, c'est-à-dire si $-a = -(-\mathrm{L}-a+h)$, le courant prendra sa valeur maximum

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned}\mathrm{J}'_s &= -4\pi\varepsilon\varepsilon'\varkappa f\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{L}}\left[\sqrt{(h-a)^2+\mathrm{R}^2} - \sqrt{a^2+\mathrm{R}^2}\right] \\ &= -4\pi\varepsilon\varepsilon'\varkappa f\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{L}}\left[\sqrt{\left(\frac{h+\mathrm{L}}{2}\right)^2+\mathrm{R}^2} - \sqrt{\left(\frac{h-\mathrm{L}}{2}\right)^2+\mathrm{R}^2}\right].\end{aligned}\right.$$

Si le rayon R des spires est petit comparativement à la longueur h de l'aimant, la quantité entre parenthèses devient sensiblement égale à L, et l'on a à fort peu près [*]

$$J_{,} = -4\pi\varepsilon\varepsilon'\varkappa f N. \tag{14}$$

En faisant dans l'équation (12) $a = 0$ et $L = h$, on tombe sur le cas d'un aimant entièrement recouvert des spires du conducteur, et l'on trouve alors

$$J_{,} = -4\pi\varepsilon\varepsilon'\varkappa f N\left[\sqrt{1+\left(\frac{R}{L}\right)^2} - \frac{R}{L}\right]. \tag{15}$$

Si R est beaucoup plus petit que L, on retombe sur l'équation (14) : ainsi la force électromotrice ne dépend alors encore que du nombre des tours; mais il faut que les dimensions des bases f soient petites par rapport au rayon R. On peut comparer ces résultats avec les recherches faites sur ce sujet par Lenz, et publiées dans les *Annales de Poggendorff*, tomes XXXIV et XLVII.

Considérons toujours le même aimant que ci-dessus; mais supposons-le fixe et prenons un conducteur annulaire que nous transporterons de la position ω' à la position ω. On aura pour le courant induit, résultat de ce mouvement,

$$J = -\varepsilon\varepsilon'\varkappa F\left[K_o - K_u - (K'_o - K'_u)\right].$$

Dans cette équation, K_o et K_u sont les surfaces apparentes du circuit prises de la position ω pour chacun des deux pôles; K'_o, K'_u sont les surfaces apparentes relatives à la position ω'. Si la position ω' est à l'infini, on retombe sur le cas précédemment examiné; et si x et $x+h$ sont les distances du centre du conducteur aux bases o et u, le courant induit sera donné par l'équation (10), et sera un maximum pour $x = -\frac{1}{2}h$. Si l'on remplace en outre le conducteur annulaire par une spirale de N tours et de hauteur L, les distances du premier et du dernier tour à la base o étant $-a$ et $-(a+L)$ comme ci-dessus, on retombera sur l'équation (12) et sur les équations (13), (14), (15) qui en dérivent. Ainsi, dans ce cas encore, l'aimant venant de très-loin se loger dans l'axe de la spirale, le courant produit sera à fort peu près indépendant du rayon des tours, de la hauteur des spires et de la position finale de l'aimant, mais simplement proportionnel au nombre des tours; toutefois, cela n'est vrai que sous les mêmes restrictions déjà indiquées.

Désignons maintenant par ω'' le point milieu de l'axe de l'aimant, ω' un point pris sur le prolongement de cet axe, et faisons mouvoir le conducteur, son plan restant perpendiculaire à l'axe, de telle sorte que son centre aille alternativement de ω'' en ω' et de ω' en ω''. En nommant K''_o, K''_u les surfaces apparentes relatives à la

[*] M. Neumann déduit de là que, si le diamètre de la spirale est très-petit comparativement à son éloignement des bases de l'aimant, la force électromotrice engendrée est indépendante du diamètre de cette spirale. Si R est petit comparativement aux quatre distances $-a$, $-L-a$, $-a+h$, $-L-a+h$, l'expression (12) se réduit aussi à l'expression (14), et le courant ne dépend plus de la position des pôles par rapport à la spirale. A. B.

position ω'', le courant induit, dans le mouvement de ω'' en ω', sera

$$J = -\varepsilon\varepsilon'\varkappa f\left[K'_o - K'_u - (K''_o - K''_u)\right];$$

et dans le retour, en employant le commutateur pour renverser le sens du courant, on aura la même valeur de J, ce qui donnera pour n allées et n retours,

$$(16) \qquad J_n = -2n\varepsilon\varepsilon'\varkappa f\left[K'_o - K'_u - (K''_o - K''_u)\right].$$

Si au lieu d'employer le commutateur, c'est le conducteur qui, arrivé en ω', se renverse en tournant de 180 degrés autour d'un de ses diamètres, cette rotation fera naître en ce conducteur un courant induit analogue à celui de l'induction terrestre, et qui aura pour expression

$$2\varepsilon\varepsilon'\varkappa f(K'_o - K'_u);$$

de sorte qu'au bout de n répétitions de ce mouvement alternativement rotatoire et rectiligne, le courant total induit sera

$$J'_n = 2n\varepsilon\varepsilon'\varkappa f(K''_o - K''_u).$$

Cette suite de mouvements produit donc le même résultat que si le point ω' était situé à l'infini, et cette conséquence doit être étendue à tous les autres cas pareils, par exemple au cas déjà examiné d'une spirale de N tours. On peut consulter à ce sujet le Mémoire de M. Weber sur l'appareil inducteur de M. Gauss, dans les *Resultate* pour 1838.

III. Courbons maintenant notre aimant en fer à cheval; soit $2a$ la distance qui sépare le pôle o du pôle u, et soit nommé m le point qui occupe le milieu de cette longueur. En m est un axe de rotation perpendiculaire sur la ligne ou, et autour de cet axe tourne un conducteur circulaire entraîné par le mouvement d'une droite qui joint le point m au centre de ce conducteur : cette droite est à la fois perpendiculaire à l'axe de rotation et au plan du conducteur. Si x est la grandeur de cette droite, R le demi-diamètre du conducteur, il est évident que la rotation ne pourra s'effectuer que sous la condition $x^2 + R^2 < a^2$.

Soit φ l'angle de position du système rotatif, compté à partir de l'une des deux positions dans lesquelles le conducteur est perpendiculaire sur la ligne omu. L'induction produite par la rotation, depuis $\varphi = 0°$ jusqu'à $\varphi = \varphi$, sera

$$J = -\varepsilon\varepsilon'\varkappa f\left[K_o - K_u - (K'_o - K'_u)\right].$$

Les valeurs K'_o, K'_u correspondent à $\varphi = 0°$, les valeurs K_o, K_u à $\varphi = \varphi$.

Le terme $K_o - K_u$, seul variable, atteint ses maxima et minima chaque fois que l'on a $\varphi = 180°$, $\varphi = 360°$, etc. : c'est dans ces positions que le courant momentané change de signe; c'est donc aux époques correspondant à ces positions que le commutateur doit agir pour renverser le sens du courant. D'après cela, cherchons la valeur de J, entre les limites $\varphi = 0°$, $\varphi = 180°$.

Le conducteur étant dans la position $\varphi = 0°$, considérons comme côté positif du plan du conducteur celui qui regarde vers la base o: on aura, conformément aux notations du § XII,

$$K'_o = +(K'_o).$$

Maintenant il est important de remarquer que l'axe courbe de l'aimant coupe le plan du conducteur en dehors de l'aire de ce conducteur, en un point pour lequel on a $K = 0$; ainsi, dans le passage du premier pôle o au deuxième pôle u, la valeur de K doit changer de signe, de sorte que l'on doit écrire

$$K'_u = -(K'_u).$$

Dans une rotation de 180 degrés, le mouvement relatif des pôles leur fait traverser le plan du conducteur en dehors de l'aire de ce dernier: ainsi on a, pour $\varphi = 180°$,

$$K_o = -(K_o), \quad K_u = (K_u);$$

d'ailleurs

$$K_u = (K'_o), \quad (K_o) = (K'_u).$$

On aura donc, pour la valeur de J,

$$J = \varepsilon\varepsilon' \varkappa f\left[2(K'_o) + 2(K'_u)\right],$$

et comme

$$(K'_o) = 2\pi\left[1 - \frac{a-x}{\sqrt{(a-x)^2 + R^2}}\right],$$

$$(K'_u) = 2\pi\left[1 - \frac{a+x}{\sqrt{(a+x)^2 + R^2}}\right],$$

il viendra

$$(17) \qquad J = 4\pi\varepsilon\varepsilon' \varkappa f\left[2 - \frac{a-x}{\sqrt{(a-x)^2 + R^2}} - \frac{a+x}{\sqrt{(a+x)^2 + R^2}}\right].$$

On déduirait de là facilement les formules relatives au cas d'un conducteur tourné en hélice, ainsi que la meilleure disposition à donner au système: on peut consulter à ce sujet le Mémoire de M. Weber sur la machine inductive par rotation.

IV. En conservant la disposition précédente, couchons le plan du conducteur, jusqu'à ce qu'il devienne perpendiculaire à l'axe de rotation, et fixons-le de manière que son centre soit éloigné de l'axe d'une longueur a égale à la demi-valeur de l'intervalle ou. Soit alors x la distance qui sépare les pôles o et u du plan du conducteur. Les maxima et minima de l'action momentanée du courant induit se produiront lorsque le centre du conducteur sera situé précisément en face des pôles o, ou u, par conséquent à une distance x de ces pôles. Faisons faire au conducteur une demi-révolution, depuis la position qui donne le minimum de distance à o, jusqu'à celle qui donne le minimum de distance à u; nous aurons

$$(18) \qquad J = -\varepsilon\varepsilon' \varkappa f\left[K_o - K_u - (K'_o - K'_u)\right].$$

Mais on a d'ailleurs

$$K'_u = K_o = (K_o), \quad K'_o = K_u = (K_u),$$

attendu que les deux pôles sont situés du même côté par rapport au plan du conducteur.

On a ensuite

$$(K_u) = 2\pi\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}}\right),$$

et approximativement,

$$(K_o) = \frac{R^2 \pi x}{(4a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}};$$

par conséquent

$$J = -4\pi\varepsilon\varepsilon'\varkappa f\left[1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} - \frac{\frac{1}{2}R^2 x}{(4a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}\right]. \tag{19}$$

V. Le dernier cas que je vais considérer se rapporte à un conducteur incomplet.

Reprenons notre aimant cylindrique et plaçons-le verticalement, la base o vers le haut, la base u vers le bas. L'axe prolongé de l'aimant porte deux disques métalliques dont les centres sont sur cet axe et dont les plans lui sont perpendiculaires. Ce système fait corps avec l'aimant et tourne avec lui autour de l'axe. Deux languettes métalliques fixes viennent presser sur les disques, et sont unis métalliquement avec les deux extrémités du fil d'un galvanomètre. Soient β, β' les deux points de contact des languettes avec les disques; ces points séparent le circuit en deux parties, dont l'une fait corps avec l'aimant et tourne avec lui, et dont l'autre reste fixe. On demande le courant induit dans un tel circuit par la rotation de l'aimant.

Pour traiter ce cas, il faut supposer que l'aimant reste fixe, et que le circuit incomplet qui unit le galvanomètre aux points β, β' tourne autour de l'axe de l'aimant. Or soient R le rayon du premier disque, x sa distance au pôle o positive si le disque est au-dessus du pôle et négative dans le cas contraire, $x + h$ la distance de ce disque au pôle u; soient R' le rayon du second disque, x' sa distance à o, et $x' + h$ sa distance à u. On remarquera que les courbes décrites par les extrémités du conducteur incomplet, pendant une rotation de 360 degrés, sont précisément les circonférences des deux disques. D'après ce qui a été dit dans le § XI, la force électromotrice développée est alors égale à la différence des valeurs du potentiel de l'aimant relativement à chacune de ces deux courbes, c'est-à-dire à la différence des quantités

$$\varepsilon\varkappa f(K_o - K_u) \quad \text{et} \quad \varepsilon\varkappa f(K'_o - K'_u);$$

K_o, K_u sont les surfaces apparentes du premier disque prises des pôles o et u; K'_o et

K'_u les surfaces apparentes du second disque prises des mêmes pôles. Or on a évidemment

$$K_o = 2\pi\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right), \qquad K'_o = 2\pi\left(1 - \frac{x'}{\sqrt{x'^2+R'^2}}\right),$$

$$K_u = 2\pi\left(1 - \frac{h+x}{\sqrt{(h+x)^2+R^2}}\right), \quad K'_u = 2\pi\left(1 - \frac{h+x'}{\sqrt{(h+x')^2+R'^2}}\right):$$

et la valeur de J devient

$$J = -\varepsilon\varepsilon'\varkappa f\left[K_o - K_u - (K'_o - K'_u)\right],$$

$$(20) \qquad J = 2\pi\varepsilon\varepsilon'\varkappa f\left\{\begin{aligned} &\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}} - \frac{x'}{\sqrt{x'^2+R'^2}} \\ &- \frac{h+x}{\sqrt{(h+x)^2+R^2}} + \frac{h+x'}{\sqrt{(h+x')^2+R'^2}} \end{aligned}\right\}.$$

Si l'on suppose $R' = 0$, c'est-à-dire si le fil du galvanomètre vient presser le fond d'un cône creux dont le sommet est dans le prolongement de l'axe ou, l'expression précédente se simplifie, et l'on a

$$(21) \qquad J_o = 2\pi\varepsilon\varepsilon'\varkappa f\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}} - \frac{h+x}{\sqrt{(h+x)^2+R^2}}\right).$$

C'est cette disposition qui a été adoptée par M. Weber, dans ses expériences sur l'induction unipolaire. La valeur maximum de J_0 a lieu pour $x = -\frac{1}{2}h$. On a alors

$$J_o = -\frac{4\pi\varepsilon\varepsilon'\varkappa f}{\sqrt{1+\left(\frac{2R}{h}\right)^2}},$$

pour l'action totale du courant d'induction développé par une rotation complète de l'aimant autour de son axe.

M. Neumann résume ainsi les principales conséquences de son travail :

§ I. — Si l'on tient compte de la loi suivante de Lenz, que « dans le cas où l'induction est produite par un déplacement du conducteur induit en présence d'un courant inducteur ou d'un aimant, l'action électrodynamique exercée par l'inducteur sur l'induit tend toujours à retarder le mouvement de ce dernier; » et si l'on observe que

« l'induction instantanée est proportionnelle à la vitesse avec laquelle le mouvement s'effectue, » on arrive à la loi exprimée par la formule

$$EDs = -\varepsilon v CDs.$$

Dans cette formule, Ds est un élément du fil induit, et EDs la force électromotrice développée dans cet élément : v est la vitesse de Ds; C est la composante suivant le mouvement de Ds, de la force électrodynamique que l'inducteur exerce sur l'élément Ds supposé parcouru par un courant d'intensité 1. La quantité ε peut être regardée comme constante, au moment même où l'induction s'exerce ; considérée comme fonction du temps, c'est une quantité qui décroît avec une rapidité extrême dans les instants qui suivent l'induction.

§ II. — Lorsque la force électromotrice EDs est développée dans l'élément Ds de l'arc s, non-seulement E est une fonction de s, mais aussi une fonction du temps; toutefois, en supposant que les variations de E avec le temps soient incomparablement moins rapides que la propagation du courant électrique dans l'arc s, on pourra appliquer au courant induit la loi générale de Ohm, savoir que « l'intensité du courant induit est égale à la somme des forces électromotrices divisée par la résistance du circuit. »

§ III. — L'intensité du courant induit dans l'arc s sera donc

$$-\varepsilon\varepsilon' \mathrm{S}\, vCDs,$$

ε' étant le quotient de l'unité par la résistance de l'arc s, et le signe S indiquant que l'on doit intégrer l'expression $vCDs$ dans toute l'étendue de cet arc.

Le produit de cette expression par dt servira de mesure à l'*action momentanée du courant induit;* et si l'on intègre par rapport au temps, entre deux époques données, on aura la mesure de l'*action totale du courant induit.*

La valeur de cette dernière action dépendra seulement du chemin parcouru par le conducteur, et nullement de la vitesse avec laquelle ce chemin aura été parcouru.

La force électromotrice du courant instantané est, au signe près, le moment virtuel [*] de la force électrodynamique exercée par l'inducteur sur l'induit, ce dernier étant supposé parcouru par un courant égal à ε.

La force électromotrice du courant total engendré par le déplacement du conducteur, depuis sa position initiale ω_0 jusqu'à sa position finale ω_1, est égale à la perte de force vive que l'inducteur fixe aurait occasionnée dans le mouvement du circuit induit parcouru par le courant ε, entre les limites ω_0 et ω_1.

La perte effective de force vive de ce circuit, supposé mû uniquement en vertu des

[*] Produit d'une force motrice par le chemin du mobile estimé suivant la direction de cette force.

vitesses acquises, sera, par suite de l'action électrodynamique exercée sur lui par l'inducteur, représentée par

$$2\,\varepsilon\varepsilon' \int_{t_0}^{t_1} dt (\mathrm{S}.v\mathrm{CD}s)^2.$$

Concevons que les trois composantes rectangulaires de l'action de l'inducteur sur l'élément Ds de l'induit supposé parcouru par le courant ε puissent s'exprimer par les dérivées partielles d'une fonction des coordonnées x, y, z de l'élément, et construisons les *surfaces de niveau* de cette fonction, c'est-à-dire celles dont tous les points ont des coordonnées donnant à la fonction une même valeur, que l'on pourra considérer comme une pression normale à la surface correspondante; la force électromotrice du courant total engendré dans l'élément induit par un déplacement de translation (sans rotation) de ϖ_0 à ϖ_1 sera égale à la différence des pressions qu'ont à supporter les deux surfaces de niveau correspondant aux positions initiale et finale, et cela quelles que soient les positions intermédiaires, pourvu que les positions initiale et finale restent les mêmes.

§ IV. — Si le conducteur A est en mouvement par rapport à B, on peut, par un mouvement commun des conducteurs, ramener A à l'immobilité; ce mouvement commun sera dit l'opposé du mouvement primitif de A.

La force électromotrice qui développe le courant induit reste la même, quel que soit celui des deux circuits dans lequel on fait circuler un courant d'intensité donnée, quel que soit celui des deux qui est en mouvement, pourvu que le mouvement relatif reste le même.

§ V. — Tout mouvement d'un circuit par rapport à un pôle de solénoïde ou d'aimant peut être considéré comme résultant de la superposition de deux mouvements distincts, l'un de translation commun à tous les points du circuit et au pôle supposé lié avec le circuit, l'autre de rotation qui s'effectue autour de ce pôle pendant que celui-ci est entraîné dans le mouvement commun.

Le courant instantané dû à la translation est égal à

$$-\varepsilon\varepsilon'\varkappa'\Gamma d\varpi.$$

Il est sous-entendu que c'est le pôle qui se meut par rapport au conducteur immobile, et que $d\varpi$ est l'élément de la route parcourue dans le temps dt; $\varkappa'$ est la quantité de fluide magnétique libre accumulée en ce pôle; Γ est la composante suivant $d\varpi$ de l'action électrodynamique que le conducteur parcouru par un courant 1 exercerait sur l'unité de fluide accumulée au pôle.

Le courant instantané dû à la rotation est représenté par

$$-\varepsilon\varepsilon'\varkappa'[\cos(a, e'') - \cos(a, e')]\,d\psi;$$

dans cette formule $d\psi$ est la rotation infiniment petite autour du pôle; (a, e'') et (a, e') sont les angles que forme l'axe de rotation avec les droites menées du pôle aux deux extrémités du conducteur. Ce courant ne dépend donc pas de la forme de ce dernier, mais seulement de la situation et du mouvement de ses deux extrémités ; ce courant est nul si le conducteur forme un circuit fermé.

Donc, si un conducteur fermé tourne autour d'un axe contenant un ou plusieurs pôles magnétiques, il ne se produira pas d'induction.

§ VI. — L'induction développée dans un conducteur en repos par le mouvement d'un solénoïde dépend seulement du mouvement des deux pôles de ce solénoïde.

L'effet d'un pôle se décompose en deux parties ; l'une dépend du mouvement de translation du pôle, l'autre de son mouvement de rotation ; les deux courants instantanés, qui correspondent à ces mouvements, sont

$$-\varepsilon\varepsilon'\varkappa'\Gamma dw,$$

et

$$-\varepsilon\varepsilon'\varkappa'[\cos(a, e'') - \cos(a, e')]\, d\psi.$$

Si le circuit est fermé, l'induction de rotation est nulle.

Un pôle magnétique peut, sans changer de place, mais par sa rotation autour de lui-même, induire un courant dans un circuit non fermé. De cette loi découle la théorie de l'induction unipolaire.

§ VII. — Un aimant peut être considéré comme un assemblage d'un très-grand nombre de très-petits solénoïdes (ou atomes magnétiques). Ce système de solénoïdes peut, comme l'a démontré M. Gauss, être remplacé, quant à ses effets extérieurs, par un certain système de pôles répartis sur la surface de l'aimant; ainsi l'induction engendrée par un aimant peut toujours être considérée comme provenant d'une certaine distribution de magnétisme libre à la surface de cet aimant.

L'induction ne dépend pas seulement de la translation de cette surface magnétique, mais elle dépend aussi de sa rotation : le courant engendré par cette rotation est uniquement déterminé par la position des deux extrémités du conducteur ; il devient nul si le circuit est fermé.

En nommant $\varkappa D\omega$ le magnétisme libre de l'élément de surface $D\omega$, le courant momentané provenant du mouvement de translation est égal à

$$-\varepsilon\varepsilon'\Sigma.\varkappa\Gamma D\omega\, dw\,;$$

dans cette formule, dw est l'arc très-petit décrit par $D\omega$; Γ est la composante de l'action électrodynamique exercée par l'unité de courant supposée en mouvement dans le conducteur induit, sur l'unité de fluide magnétique en $D\omega$, cette action étant estimée suivant la direction de l'arc dw ; l'intégration Σ doit s'étendre à la surface entière de l'aimant.

Le courant d'induction dû à la rotation est

$$-\varepsilon\varepsilon'\Sigma.\varkappa[\cos(a, e'') - \cos(a, e')]\, D\omega\, d\psi,$$

formule où (a, e'') et (a, e') sont les angles formés par l'axe de rotation avec les droites menées du centre de $D\omega$ aux deux extrémités du conducteur, $d\psi$ étant toujours la valeur angulaire et très-petite de la rotation.

§ VIII. — L'aimantation et la désaimantation consistent, suivant les idées anciennes, en une séparation ou réunion des fluides magnétiques dans l'intérieur de chaque atome magnétique. Le courant induit résultant de ce déplacement des fluides est égal à

$$-\varepsilon\varepsilon'\Sigma.(\varkappa''-\varkappa')\,VD\omega\,;$$

$\varkappa' D\omega$ et $\varkappa'' D\omega$ sont les quantités de fluide libre de l'élément de surface $D\omega$, avant et après le changement de distribution du magnétisme intérieur; V est le potentiel du circuit induit considéré comme parcouru par un courant égal à 1, et agissant sur l'unité de fluide en $D\omega$. L'intégration doit embrasser toute la surface de l'aimant.

§ IX. — Si l'on étend à tout l'aimant le potentiel du conducteur parcouru par le courant 1, et si l'on multiplie ce potentiel intégral par $\varepsilon\varepsilon'$, la différence des deux valeurs de cette quantité, au commencement et à la fin du mouvement de l'aimant, donnera le courant induit engendré par le déplacement de l'aimant : toutes les circonstances qui laissent intacte la valeur de ce potentiel sont impropres à produire aucune induction ; mais si une cause quelconque modifie ce potentiel, l'induction se produit. Le changement de l'état magnétique d'un aimant immobile est une des causes qui peuvent produire cet effet.

§ X. — De même, lorsque deux circuits sont en mouvement, le courant induit résultant de ce mouvement s'obtiendra en multipliant par $-\frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon' j$ la différence des valeurs initiale et finale du *potentiel intégral* de l'un des circuits parcouru par le courant 1, sur le deuxième circuit parcouru par le même courant : ici j est l'intensité du courant inducteur. Pour obtenir le potentiel indiqué, faisons passer par chaque circuit une surface d'ailleurs arbitraire, mais à laquelle le circuit servira de limite : soient $D\sigma$ et $D\omega$ deux éléments considérés, l'un sur une des deux surfaces, l'autre sur l'autre; r' et r'' la distance initiale et la distance finale des deux éléments; convenons de représenter par $\frac{d^2}{dn\,d\nu}\left(\frac{1}{r''}-\frac{1}{r'}\right)$ la dérivée du second ordre de $\frac{1}{r''}-\frac{1}{r'}$, lorsqu'on passe du centre de $D\sigma$ à un point situé sur la normale à $D\sigma$ à une distance dn, et du centre de $D\omega$ à un point situé sur la normale à $D\omega$ à une distance $d\nu$.

L'expression du courant induit sera alors

$$-\varepsilon\varepsilon' j S.\Sigma.\frac{d^2}{dn\,d\nu}\left(\frac{1}{r''}-\frac{1}{r'}\right)D\sigma\,D\omega.$$

Les intégrales S et Σ s'étendent aux deux surfaces dont $D\sigma$, $D\omega$ sont les éléments.

Dans ce cas encore, il n'y a d'induction produite que par l'effet des causes qui font changer la valeur de ce potentiel.

Supposons que le courant inducteur, sans se déplacer, change brusquement d'intensité, et que celle-ci passe de la valeur j' à la valeur j''; le courant induit aura pour expression

$$-\tfrac{1}{2}\varepsilon\varepsilon'(j''-j')\,\mathrm{S}.\Sigma.\frac{d^2\frac{1}{r}}{dn\,d\nu}\,\mathrm{D}o\,\mathrm{D}\omega.$$

§ XI. — Le potentiel intégral d'un courant fermé s d'intensité j agissant sur un courant fermé σ d'intensité j' peut se mettre sous la forme

$$\tfrac{1}{2}jj'\,\mathrm{S}.\Sigma.\frac{\cos(\mathrm{D}s,\mathrm{D}\sigma)}{r}\,\mathrm{D}s\,\mathrm{D}\sigma,$$

r étant la distance des deux éléments $\mathrm{D}s$, $\mathrm{D}\sigma$, et $(\mathrm{D}s, \mathrm{D}\sigma)$ l'angle formé par $\mathrm{D}s$ avec $\mathrm{D}\sigma$. Les deux éléments $\mathrm{D}s$ et $\mathrm{D}\sigma$ s'attirent avec une force qui a pour valeur

$$\tfrac{1}{2}jj'\,\frac{\cos(\mathrm{D}s,\mathrm{D}\sigma)}{r^2}\,\mathrm{D}s\,\mathrm{D}\sigma.$$

La force électromotrice engendrée dans le circuit incomplet s, par son déplacement en présence du courant σ, est égale au potentiel de σ sur un courant d'intensité ε qui suivrait le contour de la surface décrite par l'arc total s dans son mouvement; ce contour est un quadrilatère curviligne ayant pour côtés, 1° et 3° les deux positions initiale et finale de l'arc s, 2° et 4° les deux arcs parcourus pendant le mouvement par chacune des extrémités de s.

Si le circuit s devient complet, on retrouve la loi énoncée au précédent paragraphe.

De même, si le circuit incomplet retourne à sa position initiale, ses extrémités décrivant chacune un circuit complet et fermé, la force électromotrice sera égale à la différence des valeurs du potentiel de σ sur chacune des deux courbes, supposées parcourues par un courant d'intensité ε.

Lorsqu'un conducteur fermé se meut suivant un chemin rentrant sur lui-même, en présence d'un circuit fermé, il n'y a pas d'induction produite.

Ces lois s'appliquent au cas où le courant est remplacé par un aimant.

On obtiendrait des résultats analogues dans le cas où le circuit inducteur serait mobile, et dans le cas où le circuit induit serait fermé, l'inducteur ne l'étant pas.

§ XII. — La *surface apparente* (*Kegelöffnung*) d'une courbe fermée prise d'un point donné est « la portion de surface sphérique de rayon 1 interceptée par le cône ayant le point donné pour sommet et la courbe donnée pour base. »

Un solénoïde pouvant, quant à ses actions extérieures, être remplacé par de certaines quantités de fluide $\varkappa'$ et $-\varkappa'$ accumulées à ses deux pôles, son potentiel aura, relativement à un circuit s parcouru par le courant 1, la valeur

$$\varkappa'(\mathrm{K}''-\mathrm{K}'),$$

K'' et K' étant les surfaces apparentes de la courbe s, prises de chacun des deux pôles.

Le potentiel d'un aimant relativement à un courant fermé d'intensité 1 a pour valeur

$$S.\varkappa K D\omega,$$

expression dans laquelle $\varkappa D\omega$ est la quantité de magnétisme libre que l'on peut concevoir répandu sur l'élément $D\omega$ de la surface de l'aimant, et K la surface apparente du circuit prise du centre de cet élément.

Si l'aimant passe de la position ω' à la position ω'', le courant induit provenant de ce déplacement sera

$$-\varepsilon\varepsilon' S.\varkappa(K''-K')D\omega,$$

K' et K'' étant les valeurs des surfaces apparentes du circuit prises du centre de $D\omega$ dans la première et dans la seconde position.

Dans le cas où le conducteur n'est pas fermé, la formule du courant induit sera

$$-\varepsilon\varepsilon' S.\varkappa K D\omega,$$

K étant la surface apparente du quadrilatère curviligne qui termine la surface décrite par le conducteur, l'origine du cône étant toujours au centre de $D\omega$.

Si la distribution magnétique change de telle sorte que le magnétisme répandu sur $D\omega$ devienne $\varkappa' D\omega$, au lieu de $\varkappa D\omega$, le courant induit engendré par ce changement dans un circuit fermé sera

$$-\varepsilon\varepsilon' S.(\varkappa''-\varkappa')KD\omega,$$

K étant toujours la surface apparente du circuit prise de $D\omega$.

Il existe certaines règles d'après lesquelles on devra déterminer le signe de K, et prendre pour K la plus grande ou la plus petite de ses deux valeurs possibles, valeurs dont la somme est toujours égale à 4π. (Renvoi au Mémoire pour la discussion de ces règles.)

§ XIII. — Application des formules du § XII à des cas particuliers.

1. Induction produite par le magnétisme terrestre dans un circuit plan qui tourne autour d'un axe. — Soit F l'aire plane du conducteur; soient c l'angle formé par la normale au plan du conducteur avec l'axe de rotation, et (a, r) l'angle de cet axe avec la ligne de l'inclinaison magnétique; convenons de compter l'angle de rotation φ de la normale, à partir du plan qui contient à la fois l'axe et la ligne d'inclinaison: le courant total d'induction produit par la rotation, depuis $\varphi=\varphi'$ jusqu'à $\varphi=\varphi''$, sera, M étant l'intensité magnétique terrestre,

$$-\varepsilon\varepsilon' MF\sin(a, r)\sin c(\cos\varphi''-\cos\varphi').$$

2. Dans les exemples suivants, on considère un aimant prismatique, dont le magnétisme libre est supposé uniformément réparti sur ses deux bases, avec une densité

égale à $\varkappa$: les dimensions de ces bases sont supposées petites par rapport aux distances qui les séparent des éléments du conducteur induit.

Induction produite par un aimant placé à l'intérieur d'une électrohélice. — On nomme f l'aire de l'une des bases de l'aimant, L la longueur de l'électrohélice, R son demi-diamètre, et N le nombre de ses tours ; le courant induit par l'aimantation subite du barreau sera

$$-4\pi\varepsilon\varepsilon'\varkappa f N\left[\sqrt{1+\left(\frac{R}{L}\right)^2}-\frac{R}{L}\right].$$

L'induction sera la même si un aimant, venant d'une grande distance, est subitement introduit dans l'hélice.

3. Induction produite par la rotation d'un conducteur circulaire en présence des pôles d'un aimant en fer à cheval. — Soient o et u les centres des deux bases de l'aimant, m le milieu de ou; l'axe de rotation passe par m et est perpendiculaire à ou; le centre du conducteur mobile est en C, dans le plan mené par ou normalement à l'axe de rotation : on a

$$mo = mu = a, \quad mC = x.$$

Le rayon R du conducteur est normal à mC; la rotation n'est possible qu'autant que l'on a

$$\sqrt{x^2+R^2} < a^2.$$

Chaque demi-rotation du conducteur, qui ramène C à la coïncidence avec la ligne ou, détermine une induction exprimée par

$$4\pi\varepsilon\varepsilon'\varkappa f\left[2-\frac{a-x}{\sqrt{(a-x)^2+R^2}}-\frac{a+x}{\sqrt{(a+x)^2+R^2}}\right].$$

4. Si le centre C est situé à une distance a de l'axe de rotation et à une distance x du plan mené par ou normalement à cet axe, si, de plus, le conducteur est parallèle à ce plan, les lettres a et R conservant leur signification, tout demi-tour, qui amène C du minimum de distance de l'un des pôles au minimum de distance relativement à l'autre pôle, produit un courant d'induction égal, à fort peu près, à

$$-4\pi\varepsilon\varepsilon'\varkappa f\left[1-\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}-\frac{\frac{1}{2}R^2 x}{(4a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\right].$$

5. Induction due à la rotation d'un aimant prismatique autour de son axe. — L'axe de rotation est la ligne ou de longueur h qui unit le centre de la base o au centre de la base u; sur le prolongement de l'axe, et liés avec lui, sont deux disques métalliques de rayons R et R', dont les plans sont perpendiculaires à cet axe; les distances des centres de ces disques à la base o sont x et x'; les distances à la base u sont $x+h$ et $x'+h$. Pendant que l'aimant et les deux disques tournent d'un mouvement commun, un circuit extérieur est mis en communication avec le système de ces disques au moyen

de languettes métalliques qui pressent sur leurs jantes, de sorte que le circuit est fermé par les roues et par la portion intermédiaire de l'axe. L'induction produite dans un tel circuit par une rotation complète de l'aimant sera

$$2\pi\varepsilon\varepsilon' f\varkappa\left[\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}-\frac{h+x}{\sqrt{(h+x)^2+R^2}}-\frac{x'}{\sqrt{x'^2+R'^2}}+\frac{h+x'}{\sqrt{(h+x')^2+R'^2}}\right].$$

Supposons $R'=0$, c'est-à-dire que l'un des deux contacts ait lieu dans l'axe même, et que, de plus, on ait

$$x=-\tfrac{1}{2}h;$$

on aura alors la meilleure disposition pour obtenir l'induction unipolaire de M. Weber, et son expression sera

$$\frac{-4\pi\varepsilon\varepsilon'\varkappa f}{\sqrt{1+\left(\frac{2R}{h}\right)^2}}.$$