JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur les équations algébriques à plusieurs inconnues

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 12 (1847), p. 68-72.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1847_1_12__68_0>

SUR

LES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES A PLUSIEURS INCONNUES;

PAR J. LIOUVILLE.

Ayant deux équations algébriques à deux inconnues,

$$f(x, y) = 0, \quad F(x, y) = 0, \tag{1}$$

on peut, comme on sait, éliminer une des inconnues par la méthode des fonctions symétriques, et former de cette manière, sans aucun facteur étranger, l'équation dont l'autre inconnue dépend. Si l'on a éliminé y, par exemple, l'équation finale dont nous parlons fournira les valeurs de x. Mais comment aura-t-on ensuite les valeurs de y correspondantes, et par conséquent les groupes (x, y) qui vérifient les équations (1)? La méthode des fonctions symétriques contient-elle en soi quelque moyen simple de se compléter et de conduire aux groupes demandés? Cette question curieuse et importante peut être regardée comme un cas particulier de celle qu'Abel a résolue dans le Mémoire intitulé : *Recherche de la quantité qui satisfait à la fois à deux équations algébriques données* [*]. Abel réussit, en effet, à représenter, à l'aide de fonctions symétriques calculables par les coefficients p_0, q_0, etc., la racine y commune à deux équations :

$$p_0 + p_1 y + \ldots + p_{m-1} y^{m-1} + y^m = 0,$$
$$q_0 + q_1 y + \ldots + q_{n-1} y^{n-1} + y^n = 0,$$

[*] Voyez les *Annales de Mathématiques* par M. Gergonne, tome XVII, page 204. J'ignore pourquoi ce Mémoire d'Abel n'a pas été compris dans l'édition en deux volumes de ses OEuvres mathématiques publiée par M. Holmboë.

qu'on sait d'avance être compatibles. Pour appliquer ces formules aux équations (1), il suffira donc de supposer que p_0, q_0, etc., sont des fonctions de x, et d'y remplacer successivement x par les diverses racines de l'équation finale obtenue en éliminant y. On aura ainsi la valeur de y qui correspond à chaque racine x. Je dis la valeur de y; car, bien qu'on puisse facilement étendre la méthode d'Abel au cas particulier où plusieurs valeurs de y répondraient à une même racine x, l'auteur a laissé de côté ce cas particulier. Nous l'imiterons en cela, et nous nous en tiendrons au cas général; mais nous suivrons du reste une marche différente pour arriver aux solutions (x, y) des équations (1). Nous introduirons dans nos calculs une indéterminée α, à peu près comme Poisson l'a fait dans son Mémoire sur l'élimination [*].

Posons donc

$$x + \alpha y = t, \quad \text{d'où} \quad x = t - \alpha y.$$

Les équations (1) deviendront

$$f(t - \alpha y, y) = 0, \quad F(t - \alpha y, y) = 0;$$

et, en éliminant y, on aura une équation finale en t de la forme

$$\psi(t, \alpha) = 0.$$

Mais en faisant $\alpha = 0$, on a $t = x$; l'équation qui donnera les valeurs de x est donc

$$\psi(x, 0) = 0.$$

A présent, pour trouver la valeur de y qui correspond à chaque racine x, observons que l'équation

$$x + \alpha y = t,$$

différentiée par rapport à α (dont x et y ne dépendent pas, mais dont t est fonction) donne

$$y = \frac{dt}{d\alpha}.$$

[*] *Journal de l'École Polytechnique*, XI[e] cahier, page 199.

On a d'ailleurs

$$\frac{d\psi}{d\alpha} + \frac{d\psi}{dt}\frac{dt}{d\alpha} = 0.$$

Il en résulte

$$y = -\frac{d\psi}{d\alpha} : \frac{d\psi}{dt} = \psi_1(t, \alpha),$$

et, par suite, en posant $\alpha = 0$:

$$y = \psi_1(x, 0).$$

Telle est l'expression de y en fonction de x. Elle est, comme on voit, très-facile à former dès qu'on connaît $\psi(t, \alpha)$. Le calcul peut d'ailleurs être simplifié en négligeant dans $\psi(t, \alpha)$ ou plutôt en se dispensant de former les termes qui sont multipliés par une puissance de α supérieure à la première; en effet, ces termes n'influent nullement sur les valeurs de x et y. Pour le démontrer, ordonnons $\psi(t, \alpha)$ par rapport aux puissances ascendantes de α, et soit

$$\psi(t, \alpha) = \psi(t) + \alpha\psi_1(t) + \alpha^2\psi_2(t) + \ldots..$$

En posant $\alpha = 0$, d'où $t = x$, l'équation

$$\psi(t, \alpha) = 0$$

nous donnera d'abord

$$\psi(x) = 0,$$

ce qui déterminera x. On a ensuite, en différentiant,

$$\frac{dt}{d\alpha} = -\frac{d\psi}{d\alpha} : \frac{d\psi}{dt} = -\frac{\psi_1(t) + 2\alpha\psi_2(t) + \ldots}{\psi'(t) + \alpha\psi'_1(t) + \ldots},$$

d'où, pour $\alpha = 0$,

$$\frac{dt}{d\alpha} \quad \text{ou} \quad y = -\frac{\psi_1(x)}{\psi'(x)}.$$

Ainsi les deux premiers termes de $\psi(t, \alpha)$ suffisent pour trouver x et y, et il est inutile de calculer les suivants.

Notre méthode s'étend facilement à un nombre quelconque d'équations contenant un nombre égal d'inconnues. Soient, par exemple, trois inconnues x, y, z, et trois équations

$$(2) \qquad f(x, y, z) = 0, \quad F(x, y, z) = 0, \quad \varphi(x, y, z) = 0.$$

On introduira deux indéterminées α, β, et l'on posera

$$x + \alpha y + \beta z = t, \quad \text{d'où} \quad x = t - \alpha y - \beta z.$$

En portant cette valeur de x dans les équations (2), puis éliminant y et z, on aura une équation de la forme

$$\psi(t, \alpha, \beta) = 0.$$

Mais à $\alpha = 0$, $\beta = 0$ répond $t = x$. Donc l'équation qui doit fournir les valeurs de x sera d'abord

$$\psi(x, 0, 0) = 0.$$

De l'équation

$$x + \alpha y + \beta z = t$$

on tirera d'ailleurs

$$y = \frac{dt}{d\alpha}, \quad z = \frac{dt}{d\beta};$$

enfin l'équation

$$\psi(t, \alpha, \beta) = 0$$

donnera

$$\frac{dt}{d\alpha} = -\frac{d\psi}{d\alpha} : \frac{d\psi}{dt} = \psi_1(t, \alpha, \beta),$$

et

$$\frac{dt}{d\beta} = -\frac{d\psi}{d\beta} : \frac{d\psi}{dt} = \psi_2(t, \alpha, \beta).$$

En faisant donc $\alpha = 0$, $\beta = 0$, il viendra

$$y = \psi_1(x, 0, 0), \quad z = \psi_2(x, 0, 0).$$

On aurait pu aussi n'introduire qu'une seule indéterminée α, poser

$$x + \alpha y + \alpha^2 z = t, \quad \text{d'où} \quad x = t - \alpha y - \alpha^2 z,$$

puis, après avoir porté cette valeur de x dans les équations (2), éliminer y et z, ce qui aurait donné un résultat de la forme

$$\psi(t, \alpha) = 0.$$

Alors on aurait eu $t = x$ pour $\alpha = 0$, et, par conséquent, l'équation en x aurait été

$$\psi(x, 0) = 0.$$

D'un autre côté, on aurait trouvé les formules

$$y + 2\alpha z = \frac{dt}{d\alpha} = -\frac{d\psi}{d\alpha} : \frac{d\psi}{dt} = \psi_1(t, \alpha),$$

et

$$2z = \frac{d^2 t}{d\alpha^2} = \frac{d\psi_1}{d\alpha} + \frac{d\psi_1}{dt}\psi_1 = \psi_2(t, \alpha),$$

qui, pour $\alpha = 0$, se réduisent à

$$y = \psi_1(x, 0), \quad 2z = \psi_2(x, 0),$$

et fournissent y et z pour chaque valeur de x, ce qui résout la question proposée.

Nous n'avons pas besoin d'ajouter que, quel que soit le nombre des équations et des inconnues, il y aura des simplifications de calcul analogues à celles que nous avons indiquées pour le cas de deux équations. Par exemple, quand on introduit deux indéterminées α, β, en posant $x + \alpha y + \beta z = t$, on peut se dispenser de calculer en entier $\psi(t, \alpha, \beta)$; il suffira de former le terme indépendant de α, β, et les deux termes qui sont multipliés soit par α seulement, soit par β seulement: les termes en α^2, $\alpha\beta$, β^2, etc., n'influent en rien sur les valeurs de x, y, z. Mais quand on n'emploie qu'une indéterminée α et qu'on prend $x + \alpha y + \alpha^2 z = t$, il n'est permis de négliger que les termes affectés d'une puissance de α supérieure à la seconde.