JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J.-A. SERRET

Sur le développement en fraction continue de la racine carrée d'un nombre entier

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 12 (1847), p. 518-520.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1847_1_12__518_0>

Sur le développement en fraction continue de la racine carrée d'un nombre entier;

PAR M. J.-A. SERRET.

Si l'on développe en fraction continue la racine carrée d'un nombre entier non carré, et que l'on forme la suite des fractions convergentes, il y aura toujours une relation simple et uniforme entre les deux fractions qui répondent au dernier quotient, dans les périodes de rangs n et $2n$. Je ne sache pas que cette relation soit connue; aussi ai-je cru utile de l'indiquer en quelques mots.

Soient A un nombre entier non carré, a la racine du plus grand carré qui y est contenu, $\frac{P_n}{Q_n}$ ou x_n la fraction convergente qui répond au dernier quotient dans la période de rang n, lequel est, comme on sait, égal à $2a$, et enfin $\frac{P'_n}{Q'_n}$ la fraction convergente qui précède $\frac{P_n}{Q_n}$: on aura évidemment

$$\sqrt{A} = \frac{(a+\sqrt{A})P_n + P'_n}{(a+\sqrt{A})Q_n + Q'_n},$$

d'où l'on déduit les valeurs connues de P'_n et de Q'_n, savoir :

$$P'_n = AQ_n - aP_n,$$
$$Q'_n = P_n - aQ_n.$$

Cela posé, la fraction convergente qui suit $\frac{P_n}{Q_n}$ a pour valeur

$$\frac{2aP_n + P'_n}{2aQ_n + Q'_n}$$

et l'on en déduira la valeur de $\frac{P_{2n}}{Q_{2n}}$ ou x_{2n}, en remplaçant le quotient

$2a$ par $a + \frac{P_n}{Q_n}$: on aura donc

$$x_{2n} = \frac{\left(a + \frac{P_n}{Q_n}\right) P_n + P'_n}{\left(a + \frac{P_n}{Q_n}\right) Q_n + Q'_n},$$

ou, en mettant au lieu de P'_n et Q'_n leurs valeurs,

$$x_{2n} = \frac{P_n^2 + AQ_n^2}{2P_nQ_n} = \frac{x_n + \frac{A}{x_n}}{2}.$$

On arrive ainsi à ce résultat très-simple, que la fraction x_{2n} est la moyenne arithmétique des valeurs x_n et $\frac{A}{x_n}$. Il est assez remarquable que cette quantité x_{2n} soit précisément celle que donne la méthode d'approximation de Newton, lorsqu'on prend x_n pour première valeur approchée. Cette méthode donne, en effet, pour seconde approximation,

$$x_n + \frac{A - x_n^2}{2x_n} \quad \text{ou} \quad \frac{x_n + \frac{A}{x_n}}{2}.$$

Les fractions convergentes x_n qui répondent au dernier quotient dans les périodes successives ne sont pas toujours les seules jouissant de cette propriété; il peut arriver, en effet, qu'en partant d'une fraction convergente quelconque $\frac{P}{Q}$, la méthode de Newton en fournisse une seconde. Soient, en effet, P_1 et Q_1 les quotients des nombres $P^2 + AQ^2$ et $2PQ$ par leur plus grand commun diviseur D, le résultat fourni par la méthode de Newton sera

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{P^2 + AQ^2}{2PQ},$$

et l'on a

$$P_1 = \frac{P^2 + AQ^2}{D}, \quad Q_1 = \frac{2PQ}{D},$$

d'où

$$P_1^2 - AQ_1^2 = \left(\frac{P^2 - AQ^2}{D}\right)^2.$$

Or on sait que $\frac{P_1}{Q_1}$ sera toujours l'une des fractions convergentes vers $\sqrt{A}$, si l'on a

$$P_1^2 - AQ_1^2 < \sqrt{A},$$

ce qui exige que

$$\pm (P^2 - AQ^2) < D\sqrt[4]{A}.$$

Cette condition sera toujours remplie, si $\frac{P}{Q}$ est l'une des fractions x_n, car, dans ce cas, $P^2 - AQ^2 = \pm 1$; mais il est évident qu'elle peut l'être aussi dans beaucoup d'autres cas.

En particulier, si l'on applique la méthode de Newton à l'une quelconque des fractions convergentes vers $\sqrt{39}$, on obtiendra une seconde fraction convergente.

FIN DU DOUZIÈME VOLUME.