JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

E. CATALAN

Sur les trajectoires orthogonales des sections circulaires d'un ellipsoïde

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 12 (1847), p. 483-490.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1847_1_12__483_0>

Sur les trajectoires orthogonales des sections circulaires d'un ellipsoïde;

Par M. E. CATALAN.

Les trajectoires orthogonales des cercles situés sur un ellipsoïde et parallèles entre eux, n'ont probablement que très-peu de propriétés remarquables, soit géométriques, soit mécaniques; mais leur équation différentielle, très-difficilement intégrable lorsqu'elle est mise sous la forme qui se présente le plus naturellement, s'intègre, au contraire, avec la plus grande facilité, lorsqu'au moyen d'une transformation de coordonnées, on l'a mise sous une autre forme. Les équations différentielles que l'on sait intégrer étant en assez petit nombre, il n'est peut-être pas tout à fait inutile d'en indiquer une de plus, qui conduit d'ailleurs à des développements analytiques assez remarquables.

1. Soit un ellipsoïde OABC [*], ayant pour centre le point O, et dans lequel les demi-axes, rangés par ordre de grandeurs décroissantes, sont $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$. Si, dans le plan de la section principale CA, nous menons un rayon vecteur $OE = OB = b$, le plan BOE coupera l'ellipsoïde suivant un cercle; et il en sera de même pour tous les plans parallèles à celui-là. Les limites de ces cercles, c'est-à-dire les points I et I' où l'ellipsoïde est touché par deux plans parallèles à BOE, sont deux des ombilics de la surface. Enfin, les angles θ et θ', que forment avec OA les directions OE et OI, sont donnés par les formules

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{c}{a}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}},\quad \operatorname{tang}\theta' = -\frac{c}{a}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-b^2}}.$$

[*] Le lecteur est prié de faire la figure.

2. Si nous rapportons l'ellipsoïde aux droites OE, OB et à une perpendiculaire Oz au plan de ces deux droites, son équation sera, en prenant OE pour axe des x,

$$\frac{(x\cos\theta - z\sin\theta)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{(x\sin\theta + z\cos\theta)^2}{c^2} = 1;$$

ou, en réduisant, et posant

$$m = +\frac{1}{ac}\sqrt{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}, \quad n^2 = \frac{b^2}{a^2} + \frac{b^2}{c^2} - 1,$$

$$(1) \qquad x^2 + y^2 + 2mxz + n^2z^2 = b^2.$$

3. Dans cette équation, regardons z comme un paramètre variable: elle représentera une infinité de cercles situés dans le plan des xy. Et comme les projections orthogonales de deux droites perpendiculaires, faites sur un plan parallèle à l'une d'elles, sont perpendiculaires, les projections sur le plan des xy, des trajectoires cherchées, couperont à angle droit tous les cercles représentés par l'équation (1): elles seront donc les trajectoires orthogonales de ces cercles.

Or l'équation (1) donne

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x+mz}{y};$$

donc, pour les trajectoires cherchées,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+mz}.$$

Éliminant z entre cette dernière équation et l'équation (1), on obtient

$$(2) \qquad \left[y^2 + \frac{n^2-m^2}{m^2}x^2 - b^2\right]\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2\frac{n^2-m^2}{m^2}xy\frac{dy}{dx} + \frac{n^2}{m^2}y^2 = 0.$$

Telle est l'équation qui représente les trajectoires orthogonales des sections circulaires de l'ellipsoïde, ou, ce qui est la même chose, les *lignes de plus grandes pentes* de cette surface, relativement à un plan parallèle aux sections circulaires.

4. Il est facile de voir que les projections des ombilics ont pour

coordonnées

$$y = 0, \quad x = \pm \frac{mb}{\sqrt{n^2 - m^2}}.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'équation (2), on reconnaît que cette équation est vérifiée, indépendamment de toute valeur particulière attribuée à $\frac{dy}{dx}$. Il résulte évidemment de là, que les trajectoires d'une même série de sections circulaires passent toutes par les ombilics correspondants. C'est une propriété que l'on peut vérifier par des considérations géométriques.

On peut vérifier aussi que la projection du contour apparent de l'ellipsoïde, ou l'enveloppe des cercles représentés par l'équation (1), est une ellipse dont les foyers sont précisément les projections des ombilics. Cette ellipse a pour équation

$$(3) \qquad y^2 + \frac{n^2 - m^2}{m^2} x^2 = b^2.$$

5. Avant d'aller plus loin, il est bon d'observer que l'équation (2) tient lieu de deux équations du premier ordre et du premier degré : on aurait obtenu ces deux équations, si l'on avait substitué, dans la formule

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x + mz},$$

successivement les deux valeurs de z tirées de l'équation (1). Considérons, pour fixer les idées, l'une quelconque des courbes représentées par la première de ces équations du premier ordre et du premier degré. Si nous prenons sur cette courbe un point quelconque; que nous portions dans l'équation (1) les coordonnées de ce point, nous obtiendrons deux valeurs numériques de z, lesquelles, étant reportées successivement dans cette même équation (1), nous fourniront deux cercles différents. L'un de ces cercles coupera orthogonalement la courbe que nous considérons, et l'autre cercle coupera à angle droit une des courbes représentées par la seconde équation différentielle. Il n'y aura d'exception que pour les points situés sur l'ellipse (3). En effet, pour chacun de ces points, les deux valeurs correspondantes de z sont égales entre elles, les deux cercles se confondent, et, par suite, les deux trajectoires sont tangentes l'une à l'autre.

Il résulte de ces observations que si l'on considère sur la surface de l'ellipsoïde une trajectoire quelconque allant du point I au point I', la projection de cette courbe est une ligne qui va du premier foyer de l'ellipse (3) au second foyer, et qui présente un point de rebroussement situé sur la circonférence de cette ellipse. La première partie de cette ligne coupe à angle droit une première série de cercles, et la seconde partie coupe de même à angle droit la seconde série des cercles représentés par l'équation (1).

6. L'intégration de l'équation (2) paraît présenter d'assez grandes difficultés : nous allons les éluder au moyen d'une transformation de coordonnées.

Rapportons la surface aux droites OE, OB et au demi-diamètre OI passant par l'ombilic. Ce demi-diamètre, qui est conjugué de OE, étant représenté par ∂, nous aurons

$$\partial^2 = a^2 + c^2 - b^2;$$

et l'équation de l'ellipsoïde sera

$$\frac{\xi^2 + \eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{\partial^2} = 1. \tag{4}$$

Soient M un point quelconque de la surface, MG la section circulaire passant en ce point, MT la tangente à cette courbe au point M. La tangente à la trajectoire, pour ce même point M, est une perpendiculaire à MT, située dans le plan tangent en M. Elle est donc contenue dans un plan P perpendiculaire à MT. D'ailleurs, le plan MG, parallèle à BE, est perpendiculaire au plan IOE : donc la trace du plan P, sur le plan IOE des $\xi\zeta$, sera perpendiculaire à l'axe des ξ; et, d'un autre côté, cette même trace passe par le centre de la section circulaire MG.

En exprimant ces deux conditions, et en représentant par β l'angle $\text{IOE} = \theta' - \theta$, on trouve, pour équation du plan P,

$$(X - \xi) - \frac{\xi}{\eta}(Y - \eta) + (Z - \zeta)\cos\beta = 0.$$

Le plan tangent à l'ellipsoïde, pour le point M, a pour équation

$$(X-\xi)\frac{\xi}{b^2}+(Y-\eta)\frac{\eta}{b^2}+(Z-\zeta)\frac{\zeta}{\partial^2}=0.$$

La tangente à la trajectoire est donc représentée par l'ensemble de ces deux équations. Éliminant Z, on obtient, pour la projection de cette droite sur le plan BOE,

$$\frac{Y-\eta}{X-\xi}=-\frac{\partial^2\xi\eta\cos\beta-b^2\eta\zeta}{\partial^2\eta^2\cos\beta+b^2\xi\zeta}.$$

Égalons le second membre à $\frac{d\eta}{d\xi}$, puis éliminons ζ entre l'équation ainsi formée et l'équation (4), et nous obtiendrons, pour équation différentielle des trajectoires, ou pour transformée de l'équation (2) :

$$(5)\qquad \frac{\xi^2+\eta^2}{b^2}+\frac{\partial^2\cos^2\beta\,(\xi\,d\xi+\eta\,d\eta)^2\,\eta^2}{b^4\,(\eta\,d\xi-\xi\,d\eta)^2}=1.$$

7. L'équation (5) s'intègre bien aisément. En effet, posons

$$\xi=u\cos\omega,\quad \eta=u\sin\omega;$$

et nous aurons

$$\frac{u^2}{b^2}+\frac{\partial^2\cos^2\beta}{b^4}\sin^2\omega\left(\frac{du}{d\omega}\right)^2=1;$$

ou, en prenant encore $u=b\sin\varphi$,

$$d\varphi=\pm\frac{b}{\partial\cos\beta}\frac{d\omega}{\sin\omega}.$$

Cette double équation donne

$$\varphi=\pm\frac{2b}{\partial\cos\beta}\,\text{l. tang}\,\frac{1}{2}(\omega+\lambda),$$

λ étant une constante arbitraire.

Nos trajectoires sont donc définitivement représentées par

$$(6)\qquad u=\pm b\sin\left[\frac{2b}{\partial\cos\beta}\,\text{l. tang}\,\frac{1}{2}(\omega+\lambda)\right].$$

8. Nous ne nous arrêterons pas à discuter cette formule : nous aimons mieux indiquer les transformations analytiques qu'il faut employer pour identifier les équations (2) et (5), et, par suite, pour intégrer la première de ces deux équations.

Ainsi que nous l'avons déjà dit, l'équation (2) tient lieu de deux équations du premier degré en $\frac{dy}{dx}$, qui répondent aux deux valeurs de z tirées de l'équation (1). Afin de procéder avec plus d'ordre, considérons seulement une de ces équations.

On tire de l'équation (1), en prenant seulement le signe + du radical,

$$z = \frac{-mx + \sqrt{n^2(b^2 - y^2) - (n^2 - m^2)x^2}}{n^2}.$$

Cette valeur, substituée dans la formule

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x + mz},$$

donne

$$\frac{dy}{dx} = \frac{n^2 y}{(n^2 - m^2)x + m\sqrt{n^2(b^2 - y^2) - (n^2 - m^2)x^2}},$$

ou

$$(7) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{y\left[(n^2 - m^2)x - m\sqrt{n^2(b^2 - y^2) - (n^2 - m^2)x^2}\right]}{(n^2 - m^2)x^2 + m^2(y^2 - b^2)}.$$

Telle est l'une des racines de l'équation (2).

Les considérations géométriques employées plus haut donnent aisément

$$x = \xi + \zeta\cos\beta, \quad y = \eta, \quad z = \zeta\sin\beta,$$

ou, d'après l'équation (4), et en prenant seulement la valeur positive de ζ, puisque nous avons considéré la valeur positive de z,

$$x = \xi + \frac{\partial}{b}\cos\beta\sqrt{b^2 - \xi^2 - \eta^2}, \quad y = \eta.$$

D'après les valeurs de tang θ, tang θ', m et n, on trouve

$$\cos\beta = \cos(\theta' - \theta) = -\frac{1}{b\partial}\sqrt{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)}$$
$$= -\frac{mac}{b\partial} = -\frac{bm}{\partial\sqrt{n^2 - m^2}}.$$

Donc

$$(8)\qquad x = \xi - \frac{m}{\sqrt{n^2 - m^2}}\sqrt{b^2 - \xi^2 - \eta^2},\quad y = \eta.$$

Avant de substituer ces valeurs dans l'équation (7), calculons à part les fonctions

$$n^2(b^2 - y^2) - (n^2 - m^2)x^2 \quad \text{et} \quad (n^2 - m^2)x^2 + m^2(y^2 - b^2).$$

La première devient

$$\begin{aligned} & n^2(b^2 - \eta^2) - (n^2 - m^2)\xi^2 + 2m\sqrt{n^2 - m^2}\,\xi\sqrt{b^2 - \xi^2 - \eta^2} - m^2(b^2 - \xi^2 - \eta^2) \\ & = (n^2 - m^2)(b^2 - \xi^2 - \eta^2) + 2m\sqrt{n^2 - m^2}\,\xi\sqrt{b^2 - \xi^2 - \eta^2} + m^2\xi^2 \\ & = \left[m\xi + \sqrt{(n^2 - m^2)(b^2 - \xi^2 - \eta^2)}\right]^2. \end{aligned}$$

La seconde fonction se transforme en

$$\xi\left[(n^2 - m^2)\xi - 2m\sqrt{n^2 - m^2}\sqrt{b^2 - \xi^2 - \eta^2}\right].$$

Par suite, le second membre de l'équation (7) devient

$$\frac{\eta\left[(n^2 - 2m^2)\xi - 2m\sqrt{n^2 - m^2}\sqrt{b^2 - \xi^2 - \eta^2}\right]}{\xi\left[(n^2 - 2m^2)\xi - 2m\sqrt{n^2 - m^2}\sqrt{b^2 - \xi^2 - \eta^2}\right]} = \frac{\eta}{\xi}.$$

D'ailleurs,

$$dx = d\xi + \frac{m}{\sqrt{n^2 - m^2}}\frac{\xi\,d\xi + \eta\,d\eta}{\sqrt{b^2 - \xi^2 - \eta^2}},\quad dy = d\eta;$$

donc l'équation (7) transformée est

$$(9)\qquad \frac{d\eta}{d\xi + \dfrac{m}{\sqrt{n^2 - m^2}}\dfrac{\xi\,d\xi + \eta\,d\eta}{\sqrt{b^2 - \xi^2 - \eta^2}}} = \frac{\eta}{\xi},$$

et il est facile de vérifier qu'elle est identique avec l'une des deux dans lesquelles se décompose l'équation (5).

Un calcul tout à fait semblable au précédent prouverait que les formules

$$(10)\qquad x = \xi + \frac{m}{\sqrt{n^2 - m^2}}\sqrt{b^2 - \xi^2 - \eta^2},\quad y = \eta,$$

ramèneraient l'équation

$$(11) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{y\left[(n^2 - m^2)x + m\sqrt{n^2(b^2 - y^2) - (n^2 - m^2)x^2}\right]}{(n^2 - m^2)x^2 + m^2(y^2 - b^2)}$$

à la suivante,

$$(12) \qquad \frac{d\eta}{d\xi - \frac{m}{\sqrt{n^2 - m^2}} \frac{\xi d\xi + \eta d\eta}{\sqrt{b^2 - \xi^2 - \eta^2}}} = \frac{\eta}{\xi},$$

laquelle rentre aussi dans l'équation (5).

9. A l'aide des formules (8) ou (10), nous avons ramené les équations (7) ou (11) aux équations (9) ou (12), lesquelles sont comprises l'une et l'autre dans l'équation (5). Conséquemment, nous pouvons regarder comme effectuée la transformation de l'équation (2) dans l'équation (5). Cette marche indirecte était la seule praticable : si l'on substitue directement les formules (8) ou (10) dans l'équation (2), et qu'on essaye de parvenir à l'équation (5), on arrive à des calculs qui paraissent véritablement inextricables. Du reste, ces calculs ne présentent aucun intérêt; car le problème que nous nous étions proposé, c'est-à-dire l'intégration de l'équation (2), nous paraît complétement résolu.