JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ALFRED SERRET

Note de M. J.-A. Serret

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 12 (1847), p. 480-482.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1847_1_12__480_0>

Note de M. **J.-A.** Serret.

La Lettre que M. William Roberts m'a fait l'honneur de m'écrire, et dont je publie ici un extrait, m'a suggéré l'idée de rechercher si les courbes sphériques qu'il a trouvées étaient susceptibles d'un mode de génération analogue à celui que j'ai fait connaître pour les courbes elliptiques de la première classe (tome XI de ce Recueil, page 89). J'ai reconnu aisément que les courbes de M. Roberts ne constituent qu'un cas très-particulier des courbes elliptiques que l'on obtient en exécutant sur la sphère des constructions analogues à celles qui fournissent sur le plan les courbes elliptiques de première classe. C'est ce que je vais faire voir en peu de mots.

Considérons une sphère dont nous prendrons le rayon pour unité, et traçons sur sa surface un triangle sphérique quelconque OMP.

Soit posé

$$\mathrm{OM} = \rho,\quad \mathrm{MP} = a,\quad \mathrm{OP} = b,\quad \mathrm{MOP} = \alpha,\quad \mathrm{OMP} = \beta;$$

désignons aussi par θ l'angle que le côté ρ fait avec un grand cercle fixe mené par le point O, et par p et q deux nombres quelconques donnés. Cela posé, imaginons que le triangle OMP varie de telle manière que le sommet O reste fixe, que les côtés a et b restent constants, et que l'angle polaire θ du sommet variable M satisfasse constamment à la condition

$$\theta = p\alpha - q\beta; \tag{1}$$

la courbe que décrira le point M sera algébrique si p et q sont commensurables, et l'on pourra toujours faire en sorte que son arc soit exprimé par une fonction elliptique de première espèce. Il suffira pour cela que deux conditions soient remplies entre les deux arcs a et b et les deux nombres p et q: par où l'on voit que les résultats seront beaucoup plus étendus sur la sphère que sur le plan.

L'équation de la courbe que nous considérons résultera de l'élimination des angles α et β entre l'équation (1) et les deux suivantes :

$$\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos b\cos\rho}{\sin b\sin\rho},$$
$$\cos\beta = \frac{\cos b - \cos a\cos\rho}{\sin a\sin\rho}.$$

Posons

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\rho = z,$$
$$\Delta^2 = -(\cos a - \cos b)^2 + 2(\sin^2 a + \sin^2 b)z^2 - (\cos a + \cos b)^2 z^4;$$

on aura

$$(2)\quad \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{(\cos a - \cos b) + (\cos a + \cos b)z^2}{2z\sin b}, & \sin\alpha = \dfrac{\Delta}{2z\sin b}, \\ \cos\beta = \dfrac{-(\cos a - \cos b) + (\cos a + \cos b)z^2}{2z\sin a}, & \sin\beta = \dfrac{\Delta}{2z\sin a}. \end{cases}$$

Maintenant on trouve, par la différentiation des équations (1) et (2),

$$d\alpha = \frac{(\cos a - \cos b) - (\cos a + \cos b)z^2}{\Delta}\frac{dz}{z},$$
$$d\beta = \frac{-(\cos a - \cos b) - (\cos a + \cos b)z^2}{\Delta}\frac{dz}{z},$$
$$d\theta = p\,d\alpha - q\,d\beta;$$

ce qui donnera, pour l'équation différentielle de la courbe entre les coordonnées z et θ,

$$z\,d\theta = \frac{(p+q)(\cos a - \cos b) - (p-q)(\cos a + \cos b)\,z^2}{\Delta}\,dz.$$

Enfin, si ds désigne la différentielle de l'arc de la courbe, on a

$$ds^2 = \frac{4}{(z^2+1)^2}(dz^2 + z^2\,d\theta^2),$$

et, dans le cas actuel,

$$(3)\qquad ds = 2(\cos a + \cos b)\sqrt{(p-q)^2 - 1}\,\frac{dz}{\Delta},$$

si l'on établit entre les quatre quantités a, b, p, q, les deux relations suivantes :

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} [(p+q)^2 - 1](\cos a - \cos b)^2 &= [(p-q)^2 - 1](\cos a + \cos b)^2 \\ &= \sin^2 a + \sin^2 b + (p^2 - q^2)(\sin^2 a - \sin^2 b). \end{aligned} \right.$$

Voilà donc l'extension la plus complète qu'on puisse désirer du théorème qui nous a fourni la génération des courbes elliptiques sur le plan. Pour obtenir les courbes de M. Roberts, il suffit de supposer

$$b = \frac{\pi}{2}.$$

Les équations (4) deviennent, dans ce cas,

$$q = 0, \quad p = \pm\frac{1}{\cos a}.$$

On a alors

$$\Delta = \frac{1}{p}\sqrt{-1 + 2(2p^2 - 1)z^2 - z^4},$$

et

$$ds = 2\sqrt{p^2 - 1}\,\frac{dz}{\sqrt{-1 + 2(2p^2 - 1)z^2 - z^4}};$$

ce qui est bien, à un changement insignifiant près, la formule de rectification de laquelle est parti M. Roberts. La courbe dont il s'agit ici a l'équation très-simple

$$\sin\rho\cos\frac{\theta}{p} = \frac{1}{p}.$$