JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

WILLIAM ROBERTS

Extrait d'une lettre adressée à M. Alfred Serret

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 12 (1847), p. 479-480.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1847_1_12__479_0>

EXTRAIT D'UNE LETTRE ADRESSÉE A M. ALFRED SERRET

PAR M. WILLIAM ROBERTS.

« ... Je viens de trouver quelques courbes sphériques analogues à vos courbes elliptiques de première classe. En prenant pour mon point de départ la propriété que vous avez constatée pour ces dernières, savoir, que l'arc est une fonction elliptique du rayon vecteur, je cherche à déterminer les courbes sphériques dont l'arc peut s'exprimer par une fonction elliptique de la tangente trigonométrique du demi-arc, rayon vecteur sphérique. En désignant par ρ le rayon vecteur sphérique, et par θ l'angle polaire, on a, pour la différentielle d'un arc s de courbe,

$$ds^2 = d\rho^2 + \sin^2\rho\, d\theta^2,$$

et si l'on fait $z = \operatorname{tang} \frac{1}{2}\rho$,

$$ds^2 = \frac{4\,dz^2}{(1+z^2)^2} + \frac{4\,z^2\,d\theta^2}{(1+z^2)^2}.$$

Maintenant posons, conformément à ce que nous avons supposé,

$$ds^2 = \frac{4\,C^2\,dz^2}{-1+\alpha z^2 - z^4},$$

ce qui nous donnera

$$d\theta = \sqrt{1+C^2}\sqrt{\frac{1+\dfrac{2C^2-\alpha}{1+C^2}z^2+z^4}{-1+\alpha z^2-z^4}}\,\frac{dz}{z},$$

ou bien, en faisant $C^2 = \dfrac{\alpha-2}{4}$,

$$d\theta = \tfrac{1}{2}\sqrt{2+\alpha}\,\frac{z^2-1}{\sqrt{-1+\alpha z^2-z^4}}\,\frac{dz}{z}.$$

Cette équation différentielle est tout à fait semblable à celle des courbes elliptiques de première classe, et peut s'intégrer de la même manière.

Les courbes qu'elle représente seront algébriques, si $2 + \alpha = n^2$, n étant une quantité commensurable.

» Voici le système des équations appartenant à nos courbes elliptiques sur la sphère, ω étant une constante arbitraire:

$$\frac{2\theta}{n} = \omega - \lambda - \mu,$$
$$2 \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\rho = n^2 - 2 + n\sqrt{n^2 - 4}\cos 2\lambda,$$
$$2 \operatorname{cotang}^2 \tfrac{1}{2}\rho = n^2 - 2 + n\sqrt{n^2 - 4}\cos 2\mu.$$

L'arc de la courbe représentée par ces équations a pour valeur

$$\sqrt{n^2 - 4}\int \frac{dz}{\sqrt{-1 + (n^2 - 2)z^2 - z^4}},$$

ou bien encore, si l'on pose $z - \frac{1}{z} = \sqrt{n^2 - 4}\cos\varphi$,

$$\frac{\sqrt{n^2 - 4}}{n}\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{n^2 - 4}{n^2}\sin^2\varphi}}. \text{ »}$$