JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

WILLIAM ROBERTS

Note sur quelques intégrales transcendantes

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 12 (1847), p. 449-456.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1847_1_12__449_0>

NOTE

SUR QUELQUES INTÉGRALES TRANSCENDANTES;

PAR M. WILLIAM ROBERTS.

1. La fonction transcendante

$$\int_0^\varphi \frac{\log(1 - k^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi)}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}\, d\varphi,$$

qui dépend, en général, de trois quantités, jouit de la propriété d'être exprimée par des fonctions qui n'en contiennent que deux, à l'instar de l'intégrale elliptique de troisième espèce à paramètre logarithmique. En effet, désignons par u la fonction dont il s'agit, et nous aurons, en la différentiant par rapport à θ,

$$\frac{du}{d\theta} = 2 \operatorname{cotang} \theta \left[F(\varphi) - \Pi(-k^2 \sin^2\theta, \varphi) \right].$$

Or on a, d'après la découverte célèbre de M. Jacobi (LEGENDRE, tome III, page 154), en désignant par Υ la transcendante $\int \frac{E(\varphi)\, d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}$,

$$\begin{aligned} &2 \operatorname{cotang} \theta \left[F(\varphi) - \Pi(-k^2 \sin^2\theta, \varphi) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\theta}} \left[\Upsilon(\varphi'') - \Upsilon(\varphi') - 2E(\theta) F(\varphi) \right], \end{aligned}$$

où

$$\varphi' = \operatorname{am}[F(\varphi) - F(\theta)], \quad \varphi'' = \operatorname{am}[F(\varphi) + F(\theta)];$$

en sorte que

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\theta}} \left[\Upsilon(\varphi'') - \Upsilon(\varphi') - 2E(\theta) F(\varphi) \right].$$

Mais si l'on regarde φ comme constant, on a

$$\frac{d\varphi'}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi'}} = -\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}, \quad \frac{d\varphi''}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi''}} = \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}.$$

En intégrant $\frac{du}{d\theta}$ par rapport à θ, il vient donc facilement

$$u = \int \frac{\Upsilon(\varphi')\,d\varphi'}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi'}} + \int \frac{\Upsilon(\varphi'')\,d\varphi''}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi''}} - 2\mathrm{F}(\varphi)\,\Upsilon(\theta) + f(\varphi).$$

Maintenant soit $\theta = 0$, ce qui donne $\varphi = \varphi' = \varphi''$; on en conclura

$$f(\varphi) = -2\int \frac{\Upsilon(\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

d'où l'on déduira finalement

$$\int \frac{\log(1-k^2\sin^2\theta\sin^2\varphi)}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi = \int \frac{\Upsilon(\varphi')\,d\varphi'}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi'}}$$
$$+ \int \frac{\Upsilon(\varphi'')\,d\varphi''}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi''}} - 2\int \frac{\Upsilon(\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} - 2\mathrm{F}(\varphi)\,\Upsilon(\theta),$$

équation qui constate la propriété énoncée.

On pourrait aussi arriver à l'équation qu'on vient d'obtenir en employant une formule donnée par M. Jacobi (Journal de M. Crelle, tome XV), savoir [*],

$$2\Upsilon\,\mathrm{am}(p) + 2\Upsilon\,\mathrm{am}(q) = \Upsilon\,\mathrm{am}(p+q) + \Upsilon\,\mathrm{am}(p-q)$$
$$- \log[1 - k^2\sin^2\mathrm{am}(p)\sin^2\mathrm{am}(q)],$$

en la multipliant par dp, et en intégrant ensuite.

2. Il serait intéressant peut-être d'étudier d'une manière approfondie les propriétés de notre nouvelle transcendante $\int \frac{\Upsilon(\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$; mais je me suis borné pour le moment à déterminer les valeurs qu'elle prend pour $\varphi = \frac{i\pi}{2}$, i étant un entier quelconque : ces valeurs peuvent s'exprimer assez simplement par des fonctions elliptiques. En effet,

[*] *Voir* aussi le *Traité élémentaire* de M. Verhulst, page 114.

soient φ et ψ deux amplitudes satisfaisant à l'équation

$$F(k, \varphi) + F(k, \psi) = F(k);$$

on a, comme on sait,

$$\Upsilon(k, \varphi) - \Upsilon(k, \psi) + \Upsilon(k, \tfrac{1}{2}\pi) = E(k)\,F(k, \varphi) - \tfrac{1}{2}\log(1 - k^2\sin^2\varphi),$$

et, par conséquent, en désignant par la caractéristique Ξ l'intégrale dont nous nous occupons,

$$\begin{gathered}\Xi(k, \varphi) + \Xi(k, \psi) + \Upsilon(k, \tfrac{1}{2}\pi)\,F(k, \varphi) \\ = \tfrac{1}{2}E(k)\,[F(k, \varphi)]^2 - \tfrac{1}{2}\int_0^{\varphi}\frac{\log(1 - k^2\sin^2\varphi)}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi + C,\end{gathered}$$

ou, parce que la constante C est évidemment égale à $\Xi(k, \frac{1}{2}\pi)$,

$$\begin{gathered}\Xi(k, \varphi) + \Xi(k, \psi) - \Xi(k, \tfrac{1}{2}\pi) \\ = \tfrac{1}{2}E(k)\,[F(k, \varphi)]^2 - \Upsilon(k, \tfrac{1}{2}\pi)\,F(k, \varphi) - \tfrac{1}{2}\int_0^{\varphi}\frac{\log(1 - k^2\sin^2\varphi)}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi.\end{gathered}$$

Si, dans cette formule, on pose à la fois $\varphi = \pi$, $\psi = -\frac{1}{2}\pi$, on obtiendra, en se rappelant que Ξ est une fonction impaire, et que

$$\begin{gathered}\int_0^{\pi}\frac{\log(1 - k^2\sin^2\varphi)}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi = 2\log k'\,F(k), \\ \Upsilon(k, \tfrac{1}{2}\pi) = \tfrac{1}{2}E(k)\,F(k) - \tfrac{1}{2}\log k',\end{gathered}$$

(k' étant le complément de k, comme de coutume), on obtiendra, dis-je,

$$\text{(a)}\qquad \Xi(k, \pi) - 2\,\Xi(k, \tfrac{1}{2}\pi) = E(k)\,[F(k)]^2.$$

Nous allons maintenant établir une autre relation entre $\Xi(\pi)$ et $\Xi(\frac{1}{2}\pi)$, laquelle, combinée avec (a), servira à la complète détermination de ces quantités. Voici comment cela s'effectue.

Désignons cette fois par φ et ψ deux amplitudes satisfaisant à la formule de duplication

$$F(k, \psi) = 2F(k, \varphi),$$

et l'on aura, pour la relation correspondante entre les fonctions Υ (LEGENDRE, tome III, page 156),

$$\Upsilon(k, \psi) = 4\Upsilon(k, \varphi) + \log(1 - k^2\sin^4\varphi);$$

par conséquent,

$$\Xi(k, \psi) = 8\Xi(k, \varphi) + 2\int \frac{\log(1-k^2\sin^4\varphi)}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi,$$

ce qui donne encore

$$\Xi(k, \pi) = 8\Xi(k, \tfrac{1}{2}\pi) + 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\log(1-k^2\sin^4\varphi)}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi.$$

Or cette dernière intégrale définie peut être ramenée aux fonctions elliptiques à l'aide de quelques formules que j'ai déjà données dans ce Journal (tome XI, pages 473 et 474). Les voici :

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\log(1+\operatorname{cotang}^2\theta\sin^2\varphi)}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi$$
$$= \pi F(k', \theta) - 2F(k)\Upsilon(k', \theta) - [E(k) - F(k)][F(k', \theta)]^2$$
$$- 2F(k)\log\sin\theta - \tfrac{1}{2}\pi F(k') - \log k F(k),$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\log[1-(1-k'^2\sin^2\theta)\sin^2\varphi]}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi$$
$$= \pi F(k', \theta) - 2F(k)\Upsilon(k', \theta) - [E(k) - F(k)][F(k', \theta)]^2$$
$$+ \log\left(\frac{k'}{k}\right)F(k) - \tfrac{1}{2}\pi F(k').$$

Faisons, dans ces équations, $\operatorname{cotang}^2\theta = k$, ce qui nous donnera

$$F(k', \theta) = \tfrac{1}{2}F(k'), \quad \Upsilon(k', \theta) = \tfrac{1}{8}F(k')E(k') - \tfrac{1}{4}\log\left(\frac{2k\sqrt{k}}{1+k}\right);$$

et nous conclurons de la première de nos deux formules :

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\log(1+k\sin^2\varphi)}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi$$
$$= \tfrac{1}{2}\log\left(\frac{2+2k}{\sqrt{k}}\right)F(k) - \tfrac{1}{4}F(k')[F(k)E(k') + E(k)F(k') - F(k)F(k')]$$
$$= \tfrac{1}{2}\log\left(\frac{2+2k}{\sqrt{k}}\right)F(k) - \frac{\pi}{8}F(k');$$

semblablement on trouvera, en vertu de la seconde,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\log(1-k\sin^2\varphi)}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi = \tfrac{1}{2}\log\left(\frac{2-2k}{\sqrt{k}}\right)F(k) - \frac{\pi}{8}F(k'),$$

et, par conséquent,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\log(1-k^2\sin^2\varphi)}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi = \tfrac{1}{2}\log\left(\frac{4k'^2}{k}\right)F(k) - \tfrac{1}{4}\pi F(k').$$

Donc

$$\Xi(k,\pi) = 8\,\Xi(k,\tfrac{1}{2}\pi) + \log\left(\frac{4k'^2}{k}\right)F(k) - \tfrac{1}{2}\pi F(k'),$$

ce qui est la relation cherchée.

On a donc

$$\Xi(k,\tfrac{1}{2}\pi) = \tfrac{1}{12}\pi F(k') + \tfrac{1}{6}E(k)[F(k)]^2 + \tfrac{1}{6}\log\left(\frac{k}{4k'^2}\right)F(k),$$

$$\Xi(k,\pi) = \tfrac{1}{6}\pi F(k') + \tfrac{4}{3}E(k)[F(k)]^2 + \tfrac{1}{3}\log\left(\frac{k}{4k'^2}\right)F(k).$$

Ayant obtenu les valeurs de $\Xi(\frac{1}{2}\pi)$, $\Xi(\pi)$, on peut en déduire celles que prend la même transcendante pour les amplitudes $\frac{3\pi}{2}, 2\pi, \frac{5\pi}{2},\ldots,$ en suivant une marche tout à fait semblable à celle de Legendre dans le cas de la fonction Υ (tome III, page 157). En effet, on a, lorsque $\varphi+\psi=\pi$,

$$\Upsilon(\varphi) = \Upsilon(\psi) - 2E(k)[F(k) - F(\varphi)],$$

d'où l'on déduit aisément

$$\Xi(\varphi) + \Xi(\pi-\varphi) = \Xi(\pi) - 2E(k)F(\varphi)[F(k) - \tfrac{1}{2}F(\varphi)];$$

ce qui nous donnera, en changeant le signe de φ, l'équation suivante :

$$\Xi(\pi+\varphi) - \Xi(\pi-\varphi) - 2\,\Xi(\varphi) = 4E(k)F(k)F(\varphi).$$

En faisant dans celle-ci successivement $\varphi = \frac{1}{2}\pi, \pi, \frac{3\pi}{2},\ldots$ nous en tirerons

$$\Xi\left(\frac{3\pi}{2}\right) - 3\,\Xi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4E(k)[F(k)]^2,\qquad \Xi(2\pi) - 2\,\Xi(\pi) = 8E(k)[F(k)]^2,$$

et ainsi de suite.

5. On aurait pu obtenir les résultats du numéro précédent plus promptement, en employant, au lieu de la fonction Υ, la transcendante nommée Θ par M. Jacobi. Cette fonction, qui dépend de deux

quantités, est définie, comme l'on sait, par l'équation

$$\Theta(q, x) = q^{-\frac{1}{12}}(2kk')^{\frac{1}{6}}\left(\frac{K}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)\ldots,$$

où K est la fonction complète F (k), $q = e^{-\pi\frac{K'}{K}}$, K' étant la fonction complète à module complémentaire, et

$$x = \frac{\pi}{2K} F(k, \varphi).$$

D'ailleurs, $\Theta(q, x)$ est liée avec $\Upsilon(k, \varphi)$ par l'équation

$$\log\Theta(q, x) = \Upsilon(k, \varphi) - \frac{1}{2}\frac{E(k)}{F(k)}[F(k, \varphi)]^2 + \frac{1}{2}\log\left(\frac{2Kk'}{\pi}\right)$$

(LEGENDRE, tome III, page 151); en sorte que

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\log\Theta(q, x)\,dx = \frac{\pi}{2K}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\Upsilon(k, \varphi)\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} - \frac{1}{12}\pi KE(k) + \frac{1}{4}\pi\log\left(\frac{2Kk'}{\pi}\right).$$

On a aussi évidemment

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\log\Theta(q, x)\,dx = \frac{1}{4}\pi\log\left[\frac{K}{\pi}(2kk')^{\frac{1}{3}}q^{-\frac{1}{6}}\right]$$
$$+\sum\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\log(1-2q^{2i+1}\cos 2x+q^{4i+2})\,dx,$$

où la somme $\sum$ s'étend à toutes les valeurs entières de i, depuis zéro jusqu'à l'infini. Mais, en se rappelant que $q < 1$, on verra que chaque terme de cette série s'évanouit, en vertu d'un théorème de Poisson (*Journal de l'École Polytechnique*, XVII^e cahier), savoir :

$$\int_0^{\pi}\log(1-2a\cos x+a^2)\,dx = 0,$$

lorsque a est plus petit que l'unité [*]. Donc

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\log\Theta(q, x)\,dx = \frac{1}{4}\pi\log\left[\frac{K}{\pi}(2kk')^{\frac{1}{3}}q^{-\frac{1}{6}}\right].$$

---

[*] *Voir* une démonstration de ce théorème, déduite de celui de Cotes, par M. Delaunay, tome III de ce Journal, page 355.

et, par conséquent, après quelques réductions,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\Upsilon(k,\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \tfrac{1}{12}\pi K' + \tfrac{1}{6}E(k)K^2 + \tfrac{1}{6}K\log\left(\frac{k}{4k'^2}\right),$$

conformément à ce que nous avions déjà trouvé.

4. Il est bon d'observer que la méthode qu'on vient d'indiquer nous donne avec facilité les valeurs des intégrales définies

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\log(\sin\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\log(\cos\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

que j'ai déduites, dans ce Journal (tome XI, page 475), de la considération de la fonction Υ. En effet, on a

$$\sin\mathrm{am}\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = \frac{2q^{\frac{1}{4}}}{k^{\frac{1}{2}}}\sin x\,\frac{1-2q^2\cos 2x+q^4}{1-2q\cos 2x+q^2}\cdot\frac{1-2q^4\cos 2x+q^8}{1-2q^3\cos 2x+q^6},\ldots,$$

$$\cos\mathrm{am}\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = 2q^{\frac{1}{4}}\left(\frac{k'}{k}\right)^{\frac{1}{2}}\cos x\,\frac{1+2q^2\cos 2x+q^4}{1-2q\cos 2x+q^2}\cdot\frac{1+2q^4\cos 2x+q^8}{1-2q^3\cos 2x+q^6},\ldots$$

(Legendre, tome III, page 97), d'où l'on déduit, en se rappelant que

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\log(\sin x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\log(\cos x)\,dx = \tfrac{1}{2}\pi\log\tfrac{1}{2},$$

et en ayant égard à la formule de Poisson que nous avons citée,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\log\sin\mathrm{am}\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)dx = \frac{\pi}{4K}\left[K\log\left(\frac{1}{k}\right) - \tfrac{1}{2}\pi K'\right],$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\log\cos\mathrm{am}\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)dx = \frac{\pi}{4K}\left[K\log\left(\frac{k'}{k}\right) - \tfrac{1}{2}\pi K'\right].$$

5. Je terminerai cette Note en remarquant que l'analyse précédente nous conduit immédiatement à évaluer trois intégrales doubles définies d'une forme remarquable, savoir :

$$\text{(I)}\qquad \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\log(1-k^2\sin^2\theta\sin^2\varphi)}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,d\theta d\varphi,$$

$$\text{(II)}\qquad \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\log(1+\mathrm{cotang}^2\theta\sin^2\varphi)}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\sqrt{1-k'^2\sin^2\theta}}\,d\theta d\varphi,$$

$$\text{(III)}\qquad \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\log[1-(1-k'^2\sin^2\theta)\sin^2\varphi]}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\sqrt{1-k'^2\sin^2\theta}}\,d\theta d\varphi.$$

Rappelons-nous, en effet, que

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\log(1 - k^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi)\, d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} = \mathrm{E}(k)[\mathrm{F}(k, \theta)]^2 - 2\,\mathrm{F}(k)\,\Upsilon(k, \theta),$$

ce qui nous donnera, pour la valeur de (I),

$$\tfrac{1}{3}\,\mathrm{E}(k)[\mathrm{F}(k)]^3 - 2\,\mathrm{F}(k)\,\Xi(k, \tfrac{1}{2}\pi),$$

ou bien encore

$$\tfrac{1}{3}\,\mathrm{F}(k)\left[\log\left(\frac{4k'^2}{k}\right)\mathrm{F}(k) - \tfrac{1}{2}\pi\mathrm{F}(k')\right].$$

De même, on trouvera, pour la valeur de (II),

$$-\,2\,\mathrm{F}(k)\,\Xi(k', \tfrac{1}{2}\pi) - \tfrac{1}{3}[\mathrm{F}(k')]^3[\mathrm{E}(k) - \mathrm{F}(k)] - \log k\,\mathrm{F}(k)\,\mathrm{F}(k')$$
$$-\,2\,\mathrm{F}(k)\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\log(\sin\theta)\, d\theta}{\sqrt{1 - k'^2\sin^2\theta}},$$

expression qu'on peut mettre, après quelques réductions, sous la forme simple

$$\tfrac{1}{3}\pi[\mathrm{F}(k)]^2 - \tfrac{1}{6}\pi[\mathrm{F}(k')]^2 + \tfrac{1}{3}\log\left(\frac{4k'^2}{k}\right)\mathrm{F}(k)\,\mathrm{F}(k').$$

Enfin, la valeur de la troisième de nos intégrales sera

$$\tfrac{1}{3}\log\left(\frac{4k'^2}{k}\right)\mathrm{F}(k)\,\mathrm{F}(k') - \tfrac{1}{6}\pi[\mathrm{F}(k)]^2 - \tfrac{1}{6}\pi[\mathrm{F}(k')]^2.$$