JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

WILLIAM ROBERTS

Note sur la rectification de quelques courbes

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 12 (1847), p. 445-448.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1847_1_12__445_0>

NOTE

SUR LA RECTIFICATION DE QUELQUES COURBES;

PAR M. WILLIAM ROBERTS.

On doit à M. Serret, comme l'on sait, le théorème élégant relatif à la rectification de la cassinoïde, que son arc s'exprime par une fonction abélienne décomposable en la somme ou la différence de deux fonctions elliptiques de première espèce à modules complémentaires. Cet habile géomètre, qui s'est distingué depuis par des recherches fort ingénieuses sur le problème inverse de rectification, a aussi étudié une classe de courbes plus générale que la cassinoïde, savoir, le lieu géométrique d'un point tel, que le produit de ses distances aux sommets d'un polygone régulier soit constant. On peut appeler ces courbes, ce me semble, *cassinoïdes à* n *foyers*. M. Serret a donné l'expression générale de l'arc de ces courbes en fonction du rayon vecteur, mais il n'a pas remarqué (ce qui est le but de cette Note), qu'on est conduit, en considérant la cassinoïde à trois foyers, à des résultats analytiques identiques avec ceux qu'il a trouvés pour la cassinoïde ordinaire à deux foyers, sauf la seule différence que les modules des fonctions elliptiques ne sont pas complémentaires dans le cas nouveau dont il s'agit.

L'équation polaire de la courbe dont nous nous occupons est, d'après le théorème de Moivre,

$$(\alpha) \qquad r^6 - 2a^3r^3\cos 3\omega + a^6 = b^6,$$

l'origine étant au centre du cercle circonscrit au triangle équilatéral donné dont on désigne le rayon par a, et le produit constant étant égal à b^3.

On pourrait démontrer notre proposition en exprimant l'arc de la courbe en fonction de ω, ce qui exigerait des procédés différents dans les deux cas de $b < a$, et $b > a$. Mais, afin d'éviter cette distinction de cas, nous emprunterons à M. Serret une méthode qu'il a indiquée dans le tome IX de ce Journal. Toutes les courbes (α) dans lesquelles b varie sont coupées orthogonalement par les courbes données par l'équation

$$(\beta) \qquad r^3 = \frac{a^3 \cos 3\theta}{\cos 3(\omega - \theta)},$$

θ étant un paramètre variable. On peut aussi regarder θ et b comme un genre des coordonnées, et si l'on cherche à exprimer r et ω par ces quantités, on trouvera facilement

$$r^6 = a^6 \pm 2a^3 b^3 \sin 2\theta + b^6, \quad \operatorname{tang} 3\omega = \frac{-b^3 \cos 3\theta}{b^3 \sin 3\theta \pm a^3}.$$

Il est évident, d'ailleurs, que l'équation de notre cassinoïde proviendra de l'élimination de θ entre ces dernières équations, en sorte qu'on aura pour l'arc s de cette courbe, en se rappelant que b ne varie pas, l'expression suivante :

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\omega^2 = \frac{b^6 d\theta^2}{r^4}.$$

Ce qui nous apprend qu'une courbe du système (β) qui répond à une valeur particulière de θ détermine sur notre cassinoïde deux arcs s_1, s_2, dont voici les expressions :

$$s_1 = b^3 \int \frac{d\theta}{\sqrt[3]{a^6 + 2a^3 b^3 \sin 3\theta + b^6}},$$

$$s_2 = b^3 \int \frac{d\theta}{\sqrt[3]{a^6 - 2a^3 b^3 \sin 3\theta + b^6}}.$$

Or ces transcendantes ont été étudiées par Legendre dans le premier volume du *Traité des Fonctions elliptiques*, et il résulte de son analyse que leur somme et leur différence sont exprimables chacune par une fonction elliptique de première espèce. Les amplitudes des deux fonctions sont différentes, et la relation qui existe entre leurs modules est assez compliquée.

Dans le cas particulier de $b = a$, l'équation (α) devient

$$r^3 = 2a^3 \cos 3\omega,$$

et l'arc de cette courbe représente exactement, sans aucune addition, la fonction elliptique de première espèce à module $\sin\frac{\pi}{12}$, *ainsi que celle à module complémentaire,* à cause de la relation suivante, démontrée par Legendre,

$$F\left(\cos\frac{\pi}{12}, \omega\right) = \sqrt{3}\, F\left(\sin\frac{\pi}{12}, \varphi\right),$$

ω étant lié avec φ par l'équation

$$\text{tang}\, \tfrac{1}{2}(\omega + \varphi) = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \text{tang}\, \varphi.$$

Il est intéressant d'observer que la même fonction elliptique se trouve représentée également, et avec la même exactitude, par l'arc de la courbe dont l'équation polaire est

$$(\gamma) \qquad r^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{3}{2}} \cos\frac{3\omega}{2}.$$

La courbe dont nous venons de donner l'équation est le lieu géométrique des projections orthogonales de l'origine des coordonnées sur les tangentes à la courbe

$$r^3 \cos 3\omega = a^3,$$

et cette dernière est le lieu d'un point tel, que le produit de ses distances aux sommets d'un triangle équilatéral soit égal au cube de sa distance au centre du cercle circonscrit à ce triangle. On peut donc voir une analogie géométrique entre la courbe (γ) et la lemniscate de Bernoulli.

A propos du sujet actuel, voici une extension d'une propriété d'une suite de courbes dérivées de l'hyperbole équilatère, que j'ai donnée dans le tome X de ce Journal. Considérons la courbe

$$r^m \cos m\omega = a^m.$$

Les projections orthogonales de l'origine sur ses tangentes en formeront une autre, et si l'on fait dériver de cette dernière une autre encore par la répétition de la même construction, et ainsi de suite, l'équation de la $n^{ième}$ sera

$$(\delta) \qquad r^{\frac{m}{mn-1}} = a^{\frac{m}{mn-1}} \cos\left(\frac{m\omega}{mn-1}\right),$$

où la courbe primitive répond à $n = 0$.

Maintenant, soient P_{n-1}, P_n, P_{n+1}, trois points correspondants sur la $(n-1)^{ième}$, la $n^{ième}$, et la $(n+1)^{ième}$, et soit V un sommet commun de toutes les courbes; on aura

$$\text{arc } VP_{n-1} + \text{ligne droite } P_{n-1}P_n = \frac{mn-1}{mn+m-1} \text{ arc } VP_{n+1}.$$

Si l'on prend n avec un signe négatif dans l'équation (δ), on aura une classe de courbes dont la première sera l'enveloppe des perpendiculaires menées aux extrémités des rayons vecteurs de la courbe primitive, et dont les autres s'obtiennent successivement en répétant la même méthode de génération.