JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

WILLIAM ROBERTS

Généralisation d'une propriété de la lemniscate

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 12 (1847), p. 41-49.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1847_1_12__41_0>

GÉNÉRALISATION D'UNE PROPRIÉTÉ DE LA LEMNISCATE;

PAR M. WILLIAM ROBERTS.

---

1. Dans les *Annales de Mathématiques*, t. XIV, p. 17, M. Sturm a démontré un théorème énoncé par M. Talbot, savoir, que si l'on multiplie la différence entre l'arc infini d'une hyperbole équilatère et son asymptote par la longueur du quadrant de la lemniscate correspondante, le produit sera égal à $\frac{1}{4}\pi a^2$, en désignant par a le demi-axe de l'hyperbole. Cette propriété, déduite par M. Sturm de la théorie des intégrales eulériennes, n'est qu'une conséquence très-simple de la relation bien connue entre les fonctions elliptiques complètes à modules complémentaires, que l'on doit à Legendre, comme je l'ai déjà fait remarquer dans ce Journal. Dans cette Note, je me propose d'étendre le résultat dont il s'agit à une hyperbole quelconque, par un théorème dont voici l'énoncé:

Soit S *la différence entre l'arc infini d'une hyperbole, ayant pour équation*

$$\frac{x^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

et son asymptote, et soit S_1 *la longueur du quadrant de la courbe, lieu des projections orthogonales du centre sur ses tangentes; soient aussi* Σ, Σ_1 *les mêmes choses par rapport à l'hyperbole conjuguée*

$$\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{c^2} = 1,$$

et l'on aura

$$SS_1 + \Sigma\Sigma_1 = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{c^2}{b} - \sqrt{c^2 - b^2}.s\right),$$

en supposant $c > b$, *et en désignant par* s *un arc de l'hyperbole pre-*

mière, compté du sommet jusqu'au point dont les coordonnées sont

$$x = \frac{c^2}{b}, \quad y = \sqrt{c^2 - b^2}.$$

Pour démontrer cette propriété, rappelons-nous les expressions connues (tome X de ce Journal, page 186) pour S et S_1 en fonctions elliptiques complètes, savoir,

$$S = E(c) - b^2 F(c), \quad S_1 = \frac{c^3}{b} \Pi\left(\frac{c^2 - b^2}{b^2}, b\right),$$

dans lesquelles on prend $b^2 + c^2$ pour unité; ce qui donne, en mettant pour la fonction Π sa valeur en fonctions de la première et de la seconde espèce,

$$\frac{1}{\sqrt{c^2 - b^2}} S_1 = \tfrac{1}{2}\pi + F(b)\left[\frac{bc}{\sqrt{c^2 - b^2}} - E(c, \theta)\right] - [E(b) - F(b)] F(c, \theta),$$

où

$$\sin\theta = \frac{b}{c}.$$

Or, si l'on prend un autre angle λ, tel que

$$\cos\lambda = \frac{b^2}{c^2},$$

on aura

$$F(c, \theta) + F(c, \lambda) = F(c), \quad E(c, \theta) + E(c, \lambda) - E(c) = \frac{b}{c}\sqrt{c^2 - b^2},$$

d'où, en se servant de la relation connue

$$E(c) F(b) + E(b) F(c) - F(c) F(b) = \tfrac{1}{2}\pi,$$

résultera l'expression suivante pour S_1,

$$(1) \quad S_1 = \frac{b^3}{c} F(b) + \sqrt{c^2 - b^2}\,[F(b) E(c, \lambda) + E(b) F(c, \lambda) - F(b) F(c, \lambda)].$$

D'ailleurs on a, en considérant l'hyperbole conjuguée,

$$\Sigma = E(b) - c^2 F(b), \quad \Sigma_1 = \frac{b^3}{c} \Pi\left(\frac{b^2 - c^2}{c^2}, c\right),$$

et, par conséquent,

$$(2) \qquad \Sigma_1 = \frac{b^3}{c} F(c) + \sqrt{c^2 - b^2}\,[F(c) E(c, \lambda) - E(c) F(c, \lambda)].$$

Maintenant prenons la somme des deux produits SS_1 et $\Sigma\Sigma_1$, ce qui nous donnera

$$SS_1 + \Sigma\Sigma_1 = \sqrt{c^2 - b^2}\left\{\begin{array}{l}[E(b) - F(b)][E(c) - b^2 F(c)] \\ -[E(b) - c^2 F(b)]E(c)\end{array}\right\} F(c, \lambda)$$
$$+ \sqrt{c^2 - b^2}\{[E(c) - b^2 F(c)]F(b) + [E(b) - c^2 F(b)]F(c)\} E(c, \lambda)$$
$$+ \frac{b^2}{c}\{[E(c) - b^2 F(c)]F(b) + [E(b) - c^2 F(b)]F(c)\},$$

ou ce qui est la même chose, comme on s'en assurera sans difficulté,

$$(3) \qquad SS_1 + \Sigma\Sigma_1 = \tfrac{1}{2}\pi\sqrt{c^2 - b^2}\left[E(c, \lambda) - b^2 F(c, \lambda) + \frac{b^3}{c\sqrt{c^2 - b^2}}\right].$$

Mais, en désignant par s l'arc de l'hyperbole

$$\frac{x^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

dont les coordonnées x', y' de l'extrémité sont

$$x' = \frac{c^2}{b}, \quad y' = \sqrt{c^2 - b^2},$$

on a, par la formule connue, en se rappelant la valeur de λ,

$$s = \frac{\sqrt{c^2 - b^2}}{bc} + b^2 F(c, \lambda) - E(c, \lambda);$$

on trouve donc finalement

$$(4) \qquad SS_1 + \Sigma\Sigma_1 = \tfrac{1}{2}\pi\left\{\frac{c^3}{b} - \sqrt{c^2 - b^2}.s\right\},$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

2. Il est bon de remarquer que des propriétés comme celle qu'on vient d'indiquer ne sont pas bornées au cas de l'hyperbole et de l'autre courbe dont nous avons parlé. Si l'on considère la courbe lieu des projections orthogonales du centre sur les tangentes à cette dernière, et encore les autres qui dérivent successivement de la nouvelle courbe par la répétition de la même construction, on parviendra à reconnaître qu'il existe entre leurs périmètres une variété des relations analogues à celle du n° 1.

En effet, en désignant par S_2 le quadrant de la seconde dérivée de

6..

l'hyperbole

$$\frac{x^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

et par Σ_2 la même chose pour l'hyperbole conjuguée, on aura, en se rappelant des formules que j'ai déjà données (tome X de ce Journal, page 186),

$$S_2 = 2E(c) + \frac{b^2(2b^2 - c^2)}{c^2 - b^2} F(c) - \frac{b^4}{c^2 - b^2} \Pi(-c^2 \sin^2 \lambda, c),$$

$$\Sigma_2 = 2E(b) + \frac{c^2(2c^2 - b^2)}{b^2 - c^2} F(b) - \frac{c^4}{b^2 - c^2} \Pi(b^2 \operatorname{tang}^2 \lambda, b),$$

en faisant, comme auparavant,

$$\cos \lambda = \frac{b^2}{c^2}.$$

Si l'on y substitue, au lieu des fonctions Π leurs valeurs en S_1 et Σ_1, on en déduira, après quelques réductions, à l'aide des expressions pour S et Σ,

$$(5) \qquad \begin{cases} S_2 - 2S + \dfrac{bc}{c^2 - b^2} \Sigma_1 = \dfrac{b^2 c^2}{c^2 - b^2} F(c), \\ \Sigma_2 - 2\Sigma - \dfrac{bc}{c^2 - b^2} S_1 = -\dfrac{b^2 c^2}{c^2 - b^2} F(b), \end{cases}$$

et l'on trouvera, en ajoutant ces équations, après les avoir multipliées respectivement par S_1 et Σ_1,

$$S_1 S_2 + \Sigma_1 \Sigma_2 - 2(SS_1 + \Sigma\Sigma_1) = \frac{b^2 c^2}{c^2 - b^2} [S_1 F(c) - \Sigma_1 F(b)].$$

Or il est aisé de voir, en vertu des équations (1) et (2), que

$$S_1 F(c) - \Sigma_1 F(b) = \tfrac{1}{2}\pi \sqrt{c^2 - b^2}\, F(c, \lambda),$$

en sorte que

$$S_1 S_2 + \Sigma_1 \Sigma_2 - 2(SS_1 + \Sigma\Sigma_1) = \tfrac{1}{2}\pi \frac{b^2 c^2}{\sqrt{c^2 - b^2}} F(c, \lambda);$$

d'où, par suite de la valeur de $SS_1 + \Sigma\Sigma_1$ donnée par l'équation (3),

$$(6) \quad S_1 S_2 + \Sigma_1 \Sigma_2 = \tfrac{1}{2}\pi \sqrt{c^2 - b^2} \left[2E(c, \lambda) + \frac{b^2(2b^2 - c^2)}{c^2 - b^2} F(c, \lambda) + \frac{2b^3}{c\sqrt{c^2 - b^2}} \right].$$

Multiplions encore la première des équations (5) par Σ, la seconde par S, et l'on en tirera facilement

$$\Sigma S_2 - S\Sigma_2 + \frac{bc}{c^2-b^2}(SS_1 + \Sigma\Sigma_1) = \frac{b^2c^2}{c^2-b^2}[\Sigma F(c) + SF(b)].$$

Mais on s'assurera sans peine que

$$\Sigma F(c) + SF(b) = \tfrac{1}{2}\pi,$$

ce qui nous donnera, après avoir mis pour $SS_1 + \Sigma\Sigma_1$ sa propre valeur,

$$(7)\quad \Sigma S_2 - S\Sigma_2 = \tfrac{1}{2}\pi\frac{bc}{\sqrt{c^2-b^2}}\left[b^2F(c,\lambda) - E(c,\lambda) + \frac{b}{c}\sqrt{c^2-b^2}\right].$$

3. Considérons encore la troisième dérivée de l'hyperbole

$$\frac{x^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

On a, pour la différentielle de son arc (s_3), la formule suivante (tome X de ce Journal, page 186) :

$$ds_3 = \left[\frac{3}{(r^2+b^2-c^2)^2} + \frac{2}{r^2(r^2+b^2-c^2)}\right]\frac{b^3c^3\,dr}{\sqrt{(r^2+b^2)(r^2-c^2)}},$$

où la variable r est le rayon vecteur de l'hyperbole. Pour la réduction de cette expression aux formes fondamentales des fonctions elliptiques, rappelons-nous que nous avons, en faisant $(r^2+b^2)(r^2-c^2) = R$,

$$2(b^2-c^2)b^2c^2\int\frac{dr}{(r^2+b^2-c^2)^2\sqrt{R}} = \int\frac{(r^2+b^2-c^2)\,dr}{\sqrt{R}}$$
$$-[(b^2-c^2)^2 - b^2c^2]\int\frac{dr}{(r^2+b^2-c^2)\sqrt{R}} - \frac{r\sqrt{R}}{r^2+b^2-c^2},$$

d'où l'on déduira, en posant

$$r = c\,\text{séc}\,\varphi,$$

et, en faisant toutes les réductions convenables,

$$\frac{2(c^2-b^2)}{bc}s_3 = \frac{3(c^2-b^2)\sin\varphi\cos\varphi\sqrt{1-b^2\sin^2\varphi}}{c^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi} - \frac{(2b^2-c^2)c^2}{c^2-b^2}F(b,\varphi)$$
$$- E(b,\varphi) + \frac{3(c^2-b^2)^2 + b^2c^2}{c^2-b^2}\cdot\frac{c^2}{b^2}\Pi\left(\frac{c^2-b^2}{b^2}, b, \varphi\right),$$

et, par conséquent, pour la valeur du quart entier, S_3,

$$\frac{2(c^2-b^2)}{bc}S_3 = \frac{3(c^2-b^2)^2+b^2c^2c^2}{c^2-b^2}\frac{c^2}{b^2}\Pi\left(\frac{c^2-b^2}{b^2}, b\right)$$
$$- E(b) - \frac{(2b^2-c^2)c^2}{c^2-b^2}F(b);$$

d'où l'on tire, en substituant pour Π sa valeur en S_1,

$$S_1 = \frac{(c^2-b^2)bc}{3(c^2-b^2)^2+b^2c^2}\left[\frac{(2b^2-c^2)c^2}{c^2-b^2}F(b)+E(b)+\frac{2(c^2-b^2)}{bc}S_3\right].$$

De même :

$$\Sigma_1 = \frac{(b^2-c^2)bc}{3(c^2-b^2)^2+b^2c^2}\left[\frac{(2c^2-b^2)b^2}{b^2-c^2}F(c)+E(c)+\frac{2(b^2-c^2)}{bc}\Sigma_3\right].$$

On a donc

$$S_1S_2+\Sigma_1\Sigma_2 = \frac{2(c^2-b^2)^2}{3(c^2-b^2)^2+b^2c^2}(S_2S_3+\Sigma_2\Sigma_3)$$
$$+\frac{(c^2-b^2)bc}{3(c^2-b^2)^2+b^2c^2}\left\{\begin{array}{l}\left[\frac{(2b^2-c^2)c^2}{c^2-b^2}F(b)+E(b)\right]S_2\\ -\left[\frac{(2c^2-b^2)b^2}{b^2-c^2}F(c)+E(c)\right]\Sigma_2\end{array}\right\}.$$

Or il est aisé de montrer que

$$S_2 = 2E(c) - b^2F(c) - \frac{bc}{\sqrt{c^2-b^2}}[F(c)E(c,\lambda)-E(c)F(c,\lambda)],$$

et

$$\Sigma_2 = 2E(b) - (1+c^2)F(b)$$
$$+\frac{bc}{\sqrt{c^2-b^2}}[F(b)E(c,\lambda)+E(b)F(c,\lambda)-F(b)F(c,\lambda)],$$

ce qui nous donnera

$$\left[\frac{(2b^2-c^2)c^2}{c^2-b^2}F(b)+E(b)\right]S_2-\left[\frac{(2c^2-b^2)b^2}{b^2-c^2}F(c)+E(c)\right]\Sigma_2$$
$$= A + BF(c,\lambda) + CE(c,\lambda),$$

en faisant, pour abréger,

$$A = \left[\frac{(2b^2 - c^2)c^2}{c^2 - b^2} F(b) + E(b)\right][2E(c) - b^2 F(c)]$$
$$- \left[\frac{(2c^2 - b^2)b^2}{b^2 - c^2} F(c) + E(c)\right][2E(b) - (1 + c^2)F(b)],$$

$$\frac{B\sqrt{c^2 - b^2}}{bc} = \left[\frac{(2b^2 - c^2)c^2}{c^2 - b^2} F(b) + E(b)\right] E(c)$$
$$- \left[\frac{(2c^2 - b^2)b^2}{b^2 - c^2} F(c) + E(c)\right][E(b) - F(b)],$$

$$\frac{C\sqrt{c^2 - b^2}}{bc} = - \left[\frac{(2b^2 - c^2)c^2}{c^2 - b^2} F(b) + E(b)\right] F(c)$$
$$- \left[\frac{(2c^2 - b^2)b^2}{b^2 - c^2} F(c) + E(c)\right] F(b).$$

On verra aussi que les quantités A, B, C deviendront très-simples après quelques réductions, et qu'on aura

$$A = \frac{\pi b^2(3c^2 - b^2)}{2(c^2 - b^2)}, \quad B = \frac{\pi b^3 c(2c^2 - b^2)}{2(c^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad C = -\frac{\pi bc}{2\sqrt{c^2 - b^2}},$$

en sorte qu'on a

$$S_1 S_2 + \Sigma_1 \Sigma_2 = \frac{2(c^2 - b^2)^2}{3(c^2 - b^2)^2 + c^2 b^2}(S_2 S_3 + \Sigma_2 \Sigma_3)$$
$$+ \frac{\pi bc}{2[3(c^2 - b^2)^2 + b^2 c^2]}\left[\begin{array}{l} \dfrac{(2c^2 - b^2)b^3 c}{\sqrt{c^2 - b^2}} F(c, \lambda) \\ - bc\sqrt{c^2 - b^2}\, E(c, \lambda) + (3c^2 - b^2) b^2 \end{array}\right],$$

d'où l'on conclut, en mettant pour $S_1 S_2 + \Sigma_1 \Sigma_2$ sa propre valeur, qu'on tire de l'équation (6),

$$(8) \qquad S_2 S_3 + \Sigma_2 \Sigma_3 = \frac{3\pi}{4(c^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}}\left\{\begin{array}{l} [2(c^2 - b^2)^2 + b^2 c^2] E(c, \lambda) \\ - b^2[(c^2 - b^2)^2 + b^4] F(c, \lambda) \\ - \dfrac{b^3(2b^2 - c^2)\sqrt{c^2 - b^2}}{c} \end{array}\right\}.$$

On a aussi les équations suivantes :

$$SS_1 = \frac{(c^2 - b^2)bc}{3(c^2 - b^2)^2 + b^2 c^2}\left[\frac{(2b^2 - c^2)c^2}{c^2 - b^2} F(b) + E(b)\right] S$$
$$+ \frac{2(c^2 - b^2)^2}{3(c^2 - b^2)^2 + b^2 c^2} SS_3,$$

$$\Sigma\Sigma_1 = \frac{(b^2 - c^2)\,bc}{3(c^2 - b^2)^2 + b^2c^2}\left[\frac{(2c^2 - b^2)\,b^2}{b^2 - c^2}\,\mathrm{F}(c) + \mathrm{E}(c)\right]\Sigma$$
$$+ \frac{2(c^2 - b^2)^2}{3(c^2 - b^2)^2 + b^2c^2}\,\Sigma\Sigma_3,$$

ce qui donne, en mettant pour S et Σ leurs propres valeurs,

$$\mathrm{SS}_1 + \Sigma\Sigma_1 = \frac{2(c^2 - b^2)^2}{3(c^2 - b^2)^2 + b^2c^2}(\mathrm{SS}_3 + \Sigma\Sigma_3)$$
$$+ \frac{(c^2 - b^2)\,bc}{3(c^2 - b^2)^2 + b^2c^2}\left\{\begin{array}{l} \left[\dfrac{(2b^2 - c^2)c^2}{c^2 - b^2}\,\mathrm{F}(b) + \mathrm{E}(b)\right][\mathrm{E}(c) - b^2\,\mathrm{F}(c)] \\ - \left[\dfrac{(2c^2 - b^2)b^2}{b^2 - c^2}\,\mathrm{F}(c) + \mathrm{E}(c)\right][\mathrm{E}(b) - c^2\,\mathrm{F}(b)] \end{array}\right\};$$

d'où l'on tire, après les réductions convenables,

$$\mathrm{SS}_1 + \Sigma\Sigma_1 = \frac{2(c^2 - b^2)^2}{3(c^2 - b^2)^2 + b^2c^2}(\mathrm{SS}_3 + \Sigma\Sigma_3) + \frac{\pi}{2}\,\frac{b^3c^3}{3(c^2 - b^2)^2 + b^2c^2},$$

ou bien encore

$$(9)\qquad \mathrm{SS}_3 + \Sigma\Sigma_3 = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{3(c^2 - b^2)^2 + b^2c^2}{(c^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}}\left[\begin{array}{c} \mathrm{E}(c, \lambda) - b^2\,\mathrm{F}(c, \lambda) \\ + \dfrac{b^3}{c}\,\dfrac{(2c^2 - 3b^2)\sqrt{c^2 - b^2}}{3(c^2 - b^2)^2 + b^2c^2} \end{array}\right].$$

Enfin, on a

$$\mathrm{S}_3 = \frac{3(c^2 - b^2)^2 + b^2c^2}{2(c^2 - b^2)^2}\,\mathrm{S}_1 - \frac{bc}{2(c^2 - b^2)}\,\Sigma - \frac{b^3c^3}{2(c^2 - b^2)^2}\,\mathrm{F}(b),$$
$$\Sigma_3 = \frac{3(c^2 - b^2)^2 + b^2c^2}{2(c^2 - b^2)^2}\,\Sigma_1 + \frac{bc}{2(c^2 - b^2)}\,\mathrm{S} - \frac{b^3c^3}{2(c^2 - b^2)^2}\,\mathrm{F}(c),$$

ce qui donne

$$\mathrm{S}_1\Sigma_3 - \mathrm{S}_3\Sigma_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{bc}{c^2 - b^2}(\mathrm{SS}_1 + \Sigma\Sigma_1) + \frac{1}{2}\cdot\frac{b^3c^3}{(c^2 - b^2)^2}[\Sigma_1\,\mathrm{F}(b) - \mathrm{S}_1\,\mathrm{F}(c)],$$

d'où

$$\mathrm{S}_1\Sigma_3 - \mathrm{S}_3\Sigma_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{bc}{c^2 - b^2}(\mathrm{SS}_1 + \Sigma\Sigma_1) - \frac{\pi}{4}\cdot\frac{b^3c^3}{(c^2 - b^2)^{\frac{5}{2}}}\,\mathrm{F}(c, \lambda),$$

d'où, finalement,

$$(10)\ \mathrm{S}_1\Sigma_3 - \mathrm{S}_3\Sigma_1 = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{bc}{\sqrt{c^2 - b^2}}\left[\mathrm{E}(c, \lambda) - \frac{(2c^2 - b^2)\,b^2}{c^2 - b^2}\,\mathrm{F}(c, \lambda) + \frac{b^3}{c\sqrt{c^2 - b^2}}\right].$$

Il est aisé de voir qu'on obtiendrait des relations semblables en poursuivant l'évaluation des périmètres des courbes qui appartiennent au système que nous avons considéré; il est très-probable, surtout, que les deux fonctions

$$S_p \Sigma_{p+2q} - \Sigma_p S_{p+2q} \quad \text{et} \quad S_{2p} S_{2q+1} + \Sigma_{2p} \Sigma_{2q+1},$$

conservent toujours le même type, c'est-à-dire qu'elles sont de la forme

$$\pi [l + m\mathrm{F}(c, \lambda) + n\mathrm{E}(c, \lambda)],$$

ce qui se trouve vérifié pour le cas de l'hyperbole équilatère. Dans ce cas, la première de ces fonctions s'évanouit, et la valeur de l'autre est donnée par l'équation (en désignant par a le demi-axe de l'hyperbole)

$$S_{2p} S_{2q+1} = \left(\frac{4p-1}{4p-3} \cdot \frac{4p-5}{4p-7} \cdots \frac{3}{1}\right) \left(\frac{4q+1}{4q-1} \cdot \frac{4q-3}{4q-5} \cdots \frac{5}{3}\right) \frac{\pi a^2}{4}.$$