JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. BERTRAND

Note sur la théorie des normales à une même surface

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 12 (1847), p. 343-346.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1847_1_12__343_0>

NOTE

SUR LA THÉORIE DES NORMALES A UNE MÊME SURFACE;

Par M. J. BERTRAND.

Dans un Mémoire qui fait partie du tome IX de ce Journal, j'ai démontré un théorème qui, combiné avec une formule bien connue d'Euler, définit d'une manière complète la disposition des normales à une même surface autour d'un point donné. J'ai déduit, comme corollaire de ce théorème, une proposition qui peut être utile, dans certains cas, pour décider si des droites sont ou ne sont pas normales à une même surface :

« Pour que des droites dont la direction est donnée en fonction des
» coordonnées de leur point de départ, soient normales à une série
» de surfaces, il faut et il suffit qu'en prenant un point A dans l'es-
» pace et la droite AZ qui répond à ce point, si dans le plan normal
» à AZ nous menons deux lignes infiniment petites, égales, AB, AC,
» se coupant à angle droit, l'angle du plan ZAB avec la normale au
» point B soit égal à l'angle du plan ZAC avec la normale au point C. »

Le but de cette Note est de généraliser la proposition précédente et d'établir une relation analogue entre les positions de deux normales menées aux extrémités de deux arcs infiniment petits, égaux, tracés sur la surface à partir du point A et faisant entre eux un angle quelconque donné.

Il est facile d'apercevoir, *à priori*, qu'une pareille relation doit exister; la position des normales à une surface autour d'un point donné ne dépend, en effet, que de trois éléments, savoir : la direction de l'une des lignes de courbure, et les deux rayons principaux. Or, pour définir la position de deux normales en des points donnés, il faut quatre angles; ces angles ne dépendant que de trois quantités, il doit nécessairement exister entre eux une relation.

Soient A la position d'un point sur une surface, AZ la normale en ce point, AB, AC deux arcs infiniment petits égaux, tracés sur la surface et faisant entre eux un angle θ. On peut définir les normales aux points B et C, par les angles φ et φ' que ces normales font avec les plans ZAB, ZAC, et, par les inclinaisons ψ et ψ' de leurs projections sur ces plans avec l'axe AZ. On sait que ces derniers angles ψ et ψ' sont proportionnels aux courbures des sections faites dans la surface par les plans ZAB, ZAC; nommons x l'angle de la direction AB avec l'une des lignes de courbure, et r, R les deux rayons de courbure de la surface, enfin ds la valeur commune des arcs AB, AC.

Nous aurons, par le théorème connu d'Euler,

$$\frac{\psi}{ds} = \frac{1}{R}\cos^2 x + \frac{1}{r}\sin^2 x, \tag{1}$$

$$\frac{\psi'}{ds} = \frac{1}{R}\cos^2(x+\theta) + \frac{1}{r}\sin^2(x+\theta). \tag{2}$$

D'ailleurs, d'après une formule démontrée dans mon Mémoire sur la théorie des surfaces (tome IX, page 140), on a

$$\varphi = \frac{1}{2}ds\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right)\sin 2x, \tag{3}$$

$$\varphi' = \frac{1}{2}ds\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right)\sin 2(x+\theta). \tag{4}$$

Si, entre ces quatre formules, nous éliminons x, R et r, nous obtiendrons la relation cherchée entre les angles φ, φ', ψ, ψ' et θ.

En divisant membre à membre les deux équations (3) et (4), il vient

$$\frac{\sin[2(x+\theta)]}{\sin 2x} = \frac{\varphi'}{\varphi};$$

on en tire facilement

$$\operatorname{tang} 2x = \frac{\varphi\sin 2\theta}{\varphi' - \varphi\cos 2\theta}, \tag{5}$$

$$\operatorname{tang} 2(x+\theta) = \frac{\varphi'\sin 2\theta}{\varphi'\cos 2\theta - \varphi}. \tag{6}$$

D'ailleurs les équations (1) et (2) peuvent se mettre sous la forme

$$\frac{\psi}{ds} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right) - \frac{1}{2}\cos 2x\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right), \tag{7}$$

$$\frac{\psi}{ds} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right) - \frac{1}{2}\cos 2(x+\theta)\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right). \tag{8}$$

Remplaçons, dans les formules (7) et (8), $\frac{1}{R} - \frac{1}{r}$ par $\frac{2\varphi}{ds \sin 2x}$ et $\frac{2\varphi'}{ds \sin 2(x+\theta)}$: puis, dans le résultat, écrivons, au lieu de tang $2x$ et de tang $2(x+\theta)$, leurs valeurs fournies par les formules (5) et (6), il viendra

$$(9) \qquad \frac{\psi}{ds} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right) - \frac{1}{ds}\,\frac{\varphi' - \varphi \cos 2\theta}{\sin 2\theta},$$

$$(10) \qquad \frac{\psi'}{ds} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right) - \frac{1}{ds}\,\frac{\varphi' \cos 2\theta - \varphi}{\sin 2\theta}:$$

soustrayant ces deux équations l'une de l'autre et supprimant le facteur ds, les quantités R et r s'éliminent en même temps, et nous avons

$$(11) \qquad \psi - \psi' = \frac{(\varphi + \varphi')(\cos 2\theta - 1)}{\sin 2\theta} - (\varphi + \varphi')\,\text{tang}\,\theta,$$

ce qui peut se mettre sous la forme

$$(12) \qquad \frac{\psi - \psi'}{\varphi' + \varphi} = -\,\text{tang}\,\theta.$$

Si l'on prend $\theta = 90°$, on doit avoir $\varphi' = -\varphi$; ce qui est précisément le théorème que je rappelais en commençant cette Note. La formule (12) peut, par conséquent, être considérée comme une généralisation de ce théorème.

Cette formule (12) peut aussi nous conduire à l'expression générale de la valeur de l'angle φ. Si, en effet, nous donnons à θ une valeur infiniment petite, $d\theta$, on pourra faire

$$\text{tang}\,\theta = d\theta, \quad \psi' - \psi = d\psi, \quad \varphi' + \varphi = 2\varphi,$$

et il viendra

$$(13) \qquad 2\varphi = \frac{d\psi}{d\theta}:$$

θ pouvant être compté à partir d'une direction arbitraire, nous pouvons supposer que ce soit à partir de l'une des lignes de courbure, en sorte que, par la formule d'Euler, on aura

$$\psi = ds\left(\frac{1}{R}\cos^2\theta + \frac{1}{r}\sin^2\theta\right),$$

d'où

$$\frac{d\psi}{d\theta} = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) \sin 2\theta . ds,$$

et, par conséquent,

$$\varphi = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) \sin 2\theta,$$

ce qui est précisément la formule (3).

Il est facile de voir que cette formule (12), de même que le théorème dont elle est la généralisation, caractérise complétement les dispositions que peuvent présenter autour d'un point donné les normales à une même surface; de telle sorte que, si un faisceau de droites vérifie cette formule pour deux directions particulières quelconques AB, AC, autour d'un point A, on peut affirmer qu'autour de ce point, ces droites sont normales à une même surface. Il ne serait pas difficile de démontrer cette proposition d'une manière rigoureuse; mais, pour éviter les calculs, je me bornerai à présenter ici le raisonnement suivant :

Si des droites sont dirigées d'une manière quelconque dans l'espace, leurs directions étant définies par des fonctions continues des coordonnées de leur point de départ, la droite AZ, qui correspond au point A étant connue, la position des droites menées par les points infiniment voisins de A situés dans un plan perpendiculaire à AZ, dépendra de quatre constantes; en sorte que, si, à partir du point A, on mène dans deux directions données des arcs infiniment petits, égaux, AB, AC, les droites qui partent des points B et C étant définies chacune par deux angles seulement, on peut dire, à cause des quatre indéterminées dont ces quatre angles dépendent, qu'il n'existe entre eux aucune relation nécessaire. Si donc on sait que l'équation (12) est vérifiée, elle établira une relation entre les quatre constantes qui déterminent la position des droites autour du point A; et comme une seule relation entre ces mêmes constantes suffit pour exprimer que les droites sont normales à une même surface, celle que l'on trouverait par le procédé que j'indique ayant été démontrée nécessaire, on en peut conclure qu'elle est aussi suffisante.