JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Note au sujet de l'article précédent

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 12 (1847), p. 265-290.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1847_1_12__265_0>

Note au sujet de l'article précédent;

Par J. LIOUVILLE.

1. La Lettre de M. Thomson m'a suggéré quelques remarques que je crois devoir présenter ici, parce qu'elles montreront, ce me semble, plus clairement encore toute l'importance du travail dont le jeune géomètre de Glasgow nous a donné un extrait rapide.

Nous résoudrons d'abord le problème suivant :

Problème. Soient $x, y, \ldots, z$ et $\xi, \eta, \ldots, \zeta$ deux groupes contenant un nombre égal ou inégal de variables, les premières $x, y, \ldots, z$ indépendantes, les autres $\xi, \eta, \ldots, \zeta$ fonctions des premières, en sorte que

$$\xi = f(x, y, \ldots, z), \quad \eta = \mathrm{F}(x, y, \ldots, z), \ldots, \quad \zeta = \varphi(x, y, \ldots, z);$$

soit encore

$$p = \psi(x, y, \ldots, z).$$

Désignons d'ailleurs par $\xi', \eta', \ldots, \zeta', p'$ ce que deviennent les fonctions $\xi, \eta, \ldots, \zeta, p$, quand on y remplace $x, y, \ldots, z$ par $x', y', \ldots, z'$. Cela posé, on demande de déterminer les fonctions $f, \mathrm{F}, \ldots, \varphi, \psi$, de manière à avoir généralement

$$(\xi' - \xi)^2 + (\eta' - \eta)^2 + \ldots + (\zeta' - \zeta)^2 = \frac{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + \ldots + (z' - z)^2}{p^2 p'^2}.$$

Pour fixer les idées, nous nous bornerons au cas de trois variables x, y, z, et de trois variables ξ, η, ζ; et la question sera de vérifier l'équation

$$(1) \quad (\xi' - \xi)^2 + (\eta' - \eta)^2 + (\zeta' - \zeta)^2 = \frac{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}{p^2 p'^2}.$$

La même méthode réussirait pour deux groupes $x, y, \ldots, z$ et $\xi, \eta, \ldots, \zeta$ quelconques. Il n'y aurait de changement que dans quelques détails, et seulement si le nombre des variables était différent dans les deux groupes. Au surplus, nous n'aurons besoin plus tard que du cas où ce nombre est le même de part et d'autre, et ne surpasse pas trois, ce qui nous permettra d'interpréter géométriquement les résultats de notre analyse.

Donnons à x', y', z' des valeurs particulières x_0, y_0, z_0 à volonté, et représentons par p_0, ξ_0, η_0, ζ_0 les valeurs correspondantes de p', ξ', η', ζ'. L'équation (1) nous donnera

$$p^2 = \frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}{p_0^2[(\xi-\xi_0)^2+(\eta-\eta_0)^2+(\zeta-\zeta_0)^2]}.$$

Mais, pour plus de simplicité, nous mettrons partout $\xi+\xi_0$, $\eta+\eta_0$, $\zeta+\zeta_0$, $x+x_0$, $y+y_0$, $z+z_0$, au lieu de ξ, η, ζ, x, y, z, et de même $\xi'+\xi_0$, $x'+x_0$, etc., au lieu de ξ', x', etc., ce qui ne change rien aux différences $\xi'-\xi$, $x'-x$, etc. La valeur de p^2 deviendra

$$p^2 = \frac{x^2+y^2+z^2}{p_0^2(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)},$$

et l'équation (1) subsistera telle qu'elle est.

En faisant

$$x^2+y^2+z^2=r^2,\quad \xi^2+\eta^2+\zeta^2=\rho^2,$$
$$x'^2+y'^2+z'^2=r'^2,\quad \xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2=\rho'^2,$$

on aura

$$p^2=\frac{r^2}{p_0^2\rho^2},\quad p'^2=\frac{r'^2}{p_0^2\rho'^2},$$

et en portant ces valeurs dans l'équation (1), on trouvera aisément

$$\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{\rho'^2}-2\left(\frac{\xi}{\rho^2}\frac{\xi'}{\rho'^2}+\frac{\eta}{\rho^2}\frac{\eta'}{\rho'^2}+\frac{\zeta}{\rho^2}\frac{\zeta'}{\rho'^2}\right)$$
$$=p_0^4\left[\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r'^2}-2\left(\frac{x}{r^2}\frac{x'}{r'^2}+\frac{y}{r^2}\frac{y'}{r'^2}+\frac{z}{r^2}\frac{z'}{r'^2}\right)\right].$$

Maintenant donnons à x', y', z' quatre systèmes de valeurs connues à volonté, à chacun desquels répondront des valeurs déterminées de r', ξ', η', ζ', ρ', et nous aurons ainsi quatre équations du premier degré qui fourniront les valeurs de

$$\frac{\xi}{\rho^2},\quad \frac{\eta}{\rho^2},\quad \frac{\zeta}{\rho^2},\quad \frac{1}{\rho^2},$$

considérées comme quatre inconnues, en fonction linéaire de

$$\frac{x}{r^2},\quad \frac{y}{r^2},\quad \frac{z}{r^2},\quad \frac{1}{r^2}.$$

En désignant donc par A, B, C, D des constantes, et par P, Q, R, S des polynômes du premier degré en x, y, z, ces valeurs seront de la forme

$$\frac{\xi}{\rho^2} = A + \frac{P}{r^2},\quad \frac{\eta}{\rho^2} = B + \frac{Q}{r^2},\quad \frac{\zeta}{\rho^2} = C + \frac{R}{r^2},\quad \frac{1}{\rho^2} = D + \frac{S}{r^2}.$$

En faisant la somme des carrés des trois premières, on trouve une valeur de $\frac{1}{\rho^2}$ qui doit être égale à celle que donne la quatrième équation. Ainsi les deux fonctions

$$D + \frac{S}{r^2}$$

et

$$A^2 + B^2 + C^2 + \frac{2(AP + BQ + CR)}{r^2} + \frac{P^2 + Q^2 + R^2}{r^4}$$

doivent être égales. Mais la première devient une fonction entière quand on la multiplie par r^2. Il faut donc que la seconde le devienne aussi, et que, par conséquent, $P^2 + Q^2 + R^2$ soit également divisible par r^2. Le quotient ne peut évidemment être qu'une constante, puisque le numérateur et le dénominateur sont du même degré. Soit m^2 cette constante, et

$$P^2 + Q^2 + R^2 = m^2 r^2 = m^2(x^2 + y^2 + z^2).$$

P, Q, R étant des polynômes du premier degré, je fais

$$\begin{aligned} P &= m(ax + by + cz + g), \\ Q &= m(a'x + b'y + c'z + g'), \\ R &= m(a''x + b''y + c''z + g''), \end{aligned}$$

et j'en conclus par la comparaison des deux membres, d'une part,

$$a^2 + a'^2 + a''^2 = 1, \quad ab + a'b' + a''b'' = 0,$$
$$b^2 + b'^2 + b''^2 = 1, \quad ac + a'c' + a''c'' = 0,$$
$$c^2 + c'^2 + c''^2 = 1, \quad bc + b'c' + b''c'' = 0,$$

équations d'où résultent, comme on sait, les équations inverses

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1, \quad aa' + bb' + cc' = 0,$$
$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1, \quad aa'' + bb'' + cc'' = 0,$$
$$a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1, \quad a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0;$$

et, d'autre part,

$$ag + a'g' + a''g'' = 0, \quad cg + c'g' + c''g'' = 0,$$
$$bg + b'g' + b''g'' = 0, \quad g^2 + g'^2 + g''^2 = 0.$$

Si nous admettions que g, g', g'' sont des constantes réelles, l'équation $g^2 + g'^2 + g''^2 = 0$ nous donnerait $g = 0$, $g' = 0$, $g'' = 0$. Mais, dans tous les cas, on arrivera au même résultat à l'aide des trois précédentes, en ayant égard aux équations de condition entre a, b, c, etc. Pour prouver, par exemple, que $g = 0$, il suffira d'ajouter entre elles les trois équations dont nous parlons après les avoir multipliées par les facteurs respectifs a, b, c. Il nous reste donc

$$\mathrm{P} = m(ax + by + cz),$$
$$\mathrm{Q} = m(a'x + b'y + c'z),$$
$$\mathrm{R} = m(a''x + b''y + c''z),$$

a, b, c, etc., satisfaisant aux équations de condition ci-dessus, les mêmes qu'on rencontre dans la transformation de coordonnées rectangulaires en d'autres rectangulaires aussi. Et comme les équations

$$\frac{\xi}{\rho^2} = \mathrm{A} + \frac{\mathrm{P}}{r^2}, \quad \frac{\eta}{\rho^2} = \mathrm{B} + \frac{\mathrm{Q}}{r^2}, \quad \frac{\zeta}{\rho^2} = \mathrm{C} + \frac{\mathrm{R}}{r^2}$$

donnent

$$\frac{1}{\rho^2} = \left(\mathrm{A} + \frac{\mathrm{P}}{r^2}\right)^2 + \left(\mathrm{B} + \frac{\mathrm{Q}}{r^2}\right)^2 + \left(\mathrm{C} + \frac{\mathrm{R}}{r^2}\right)^2,$$

on en conclut les formules suivantes :

$$\xi = \frac{A + \frac{P}{r^2}}{\left(A + \frac{P}{r^2}\right)^2 + \left(B + \frac{Q}{r^2}\right)^2 + \left(C + \frac{R}{r^2}\right)^2},$$

$$\eta = \frac{B + \frac{Q}{r^2}}{\left(A + \frac{P}{r^2}\right)^2 + \left(B + \frac{Q}{r^2}\right)^2 + \left(C + \frac{R}{r^2}\right)^2},$$

$$\zeta = \frac{C + \frac{R}{r^2}}{\left(A + \frac{P}{r^2}\right)^2 + \left(B + \frac{Q}{r^2}\right)^2 + \left(C + \frac{R}{r^2}\right)^2}.$$

Mais il faut à présent rétablir $\xi - \xi_0$, $\eta - \eta_0$, $\zeta - \zeta_0$ au lieu de ξ, η, ζ, et $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$ au lieu de x, y, z. Ce changement fait, on aura les formules les plus générales qui puissent satisfaire à l'équation (1). Nous avons donc le théorème suivant :

Les formules générales qui peuvent satisfaire à l'équation (1) s'obtiendront en posant d'abord

$$\begin{aligned}
\mathrm{X} &= a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0),\\
\mathrm{Y} &= a'(x - x_0) + b'(y - y_0) + c'(z - z_0),\\
\mathrm{Z} &= a''(x - x_0) + b''(y - y_0) + c''(z - z_0),
\end{aligned}$$

les coefficients a, b, etc., vérifiant les équations de condition

$$\begin{aligned}
a^2 + a'^2 + a''^2 &= 1, & ab + a'b' + a''b'' &= 0,\\
b^2 + b'^2 + b''^2 &= 1, & ac + a'c' + a''c'' &= 0,\\
c^2 + c'^2 + c''^2 &= 1, & bc + b'c' + b''c'' &= 0,
\end{aligned}$$

puis prenant

$$u = A + \frac{m\mathrm{X}}{\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 + \mathrm{Z}^2}, \quad v = B + \frac{m\mathrm{Y}}{\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 + \mathrm{Z}^2}, \quad w = C + \frac{m\mathrm{Z}}{\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 + \mathrm{Z}^2},$$

et enfin

$$\xi - \xi_0 = \frac{u}{u^2 + v^2 + w^2}, \quad \eta - \eta_0 = \frac{v}{u^2 + v^2 + w^2}, \quad \zeta - \zeta_0 = \frac{w}{u^2 + v^2 + w^2}.$$

Réciproquement, on peut démontrer que l'équation (1) est satisfaite de cette manière, et trouver la valeur de p qui convient.

D'abord, des trois dernières formules on conclut facilement

$$(\xi' - \xi)^2 + (\eta' - \eta)^2 + (\zeta' - \zeta)^2 = \frac{(u' - u)^2 + (v' - v)^2 + (w' - w)^2}{(u^2 + v^2 + w^2)(u'^2 + v'^2 + w'^2)};$$

les trois précédentes donnent de même

$$(u' - u)^2 + (v' - v)^2 + (w' - w)^2 = m^2 \frac{(\mathrm{x}' - \mathrm{x})^2 + (\mathrm{y}' - \mathrm{y})^2 + (\mathrm{z}' - \mathrm{z})^2}{(\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 + \mathrm{z}^2)(\mathrm{x}'^2 + \mathrm{y}'^2 + \mathrm{z}'^2)};$$

enfin, à cause des équations de condition entre a, b, etc., on trouve

$$(\mathrm{x}' - \mathrm{x})^2 + (\mathrm{y}' - \mathrm{y})^2 + (\mathrm{z}' - \mathrm{z})^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2.$$

Il vient donc, en effet,

$$(\xi' - \xi)^2 + (\eta' - \eta)^2 + (\zeta' - \zeta)^2 = \frac{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}{p^2 p'^2},$$

la valeur de p^2 étant

$$p^2 = \frac{(\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 + \mathrm{z}^2)(u^2 + v^2 + w^2)}{m},$$

valeur qu'on pourra aisément exprimer en x, y, z, en observant que le produit $(\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 + \mathrm{z}^2)(u^2 + v^2 + w^2)$ est égal à

$$(\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2)(\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 + \mathrm{z}^2) + 2\mathrm{A}m\mathrm{x} + 2\mathrm{B}m\mathrm{y} + 2\mathrm{C}m\mathrm{z} + m^2,$$

et que x, y, z sont connus en fonction de x, y, z. La valeur qu'on trouvera ainsi peut se mettre sous la forme

$$mp^2 = (\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2)[(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2],$$

x_1, y_1, z_1 étant des constantes dont voici les valeurs :

$$x_1 = x_0 - \frac{m(\mathrm{A}a + \mathrm{B}a' + \mathrm{C}a'')}{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2},$$

$$y_1 = y_0 - \frac{m(\mathrm{A}b + \mathrm{B}b' + \mathrm{C}b'')}{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2},$$

$$z_1 = z_0 - \frac{m(\mathrm{A}c + \mathrm{B}c' + \mathrm{C}c'')}{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2}.$$

Si donc nous regardons plus tard x, y, z comme étant les coordonnées rectangulaires d'un point quelconque, on voit que la quantité p sera proportionnelle à la distance de ce point (x, y, z) à un point fixe (x_1, y_1, z_1). Il est aisé aussi de s'assurer que

$$\frac{d^2\frac{1}{p}}{dx^2} + \frac{d^2\frac{1}{p}}{dy^2} + \frac{d^2\frac{1}{p}}{dz^2} = 0.$$

2. Pour avoir explicitement ξ, η, ζ en x, y, z, il suffira de remplacer u, v, w, x, y, z par leurs valeurs. La première substitution fournit

$$\xi - \xi_0 = \frac{\mathrm{A}(\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2+\mathrm{z}^2)+m\mathrm{x}}{(\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2)(\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2+\mathrm{z}^2)+2\mathrm{A}m\mathrm{x}+2\mathrm{B}m\mathrm{y}+2\mathrm{C}m\mathrm{z}+m^2}.$$

Le dénominateur est précisément la valeur de mp^2 dont on vient de donner l'expression en x, y, z, savoir,

$$mp^2 = (\mathrm{A}^2+\mathrm{A}^2+\mathrm{C}^2)\left[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2\right].$$

Il ne reste donc plus qu'à chercher le numérateur. Le calcul deviendra d'ailleurs fort simple si l'on retranche des deux membres la quantité

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2},$$

car alors le second membre pourra se réduire à une fraction ayant pour numérateur un polynôme du premier degré en x, y, z, et, par conséquent aussi, en x, y, z. En désignant donc par X un tel polynôme, et posant, pour abréger,

$$\xi_0 + \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2} = \xi^0,$$

on pourra écrire

$$\xi - \xi^0 = \frac{\mathrm{X}}{p^2},$$

et de même

$$\eta - \eta^0 = \frac{\mathrm{Y}}{p^2}, \quad \zeta - \zeta^0 = \frac{\mathrm{Z}}{p^2},$$

η^0, ζ^0 étant des constantes, et Y, Z des fonctions linéaires de x, y, z. Les polynômes X, Y, Z s'obtiendraient sans peine par ce qu'on vient de dire; mais on les trouve sous une forme plus commode en opérant comme il suit. Il est aisé de voir qu'en attribuant une valeur infinie à une ou plusieurs des quantités x, y, z, ou, si l'on veut, en faisant

$$x^2 + y^2 + z^2 = \infty,$$

on a

$$\xi = \xi^0, \quad \eta = \eta^0, \quad \zeta = \zeta^0, \quad \frac{p^2}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{A^2 + B^2 + C^2}{m}.$$

Si donc on introduit cette hypothèse de $x^2 + y^2 + z^2 = \infty$ dans l'équation générale

$$(\xi' - \xi)^2 + (\eta' - \eta)^2 + (\zeta' - \zeta)^2 = \frac{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}{p^2 p'^2},$$

il viendra

$$(\xi' - \xi^0)^2 + (\eta' - \eta^0)^2 + (\zeta' - \zeta^0)^2 = \frac{m}{(A^2 + B^2 + C^2) p'^2},$$

d'où, en effaçant les accents,

$$(\xi - \xi^0)^2 + (\eta - \eta^0)^2 + (\zeta - \zeta^0)^2 = \frac{m}{(A^2 + B^2 + C^2) p^2}.$$

Mais, d'un autre côté,

$$(\xi - \xi^0)^2 + (\eta - \eta^0)^2 + (\zeta - \zeta^0)^2 = \frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{p^4};$$

donc

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = \frac{mp^2}{A^2 + B^2 + C^2},$$

c'est-à-dire

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2.$$

De là, par un calcul tout semblable à celui qu'on a effectué dans le numéro précédent pour l'équation

$$P^2 + Q^2 + R^2 = m^2(x^2 + y^2 + z^2),$$

on conclut qu'en représentant par α, β, γ, α', etc., des constantes assujetties aux équations de condition

$$\begin{aligned}
\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 &= 1, \quad \alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' = 0,\\
\beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2 &= 1, \quad \alpha\gamma + \alpha'\gamma' + \alpha''\gamma'' = 0,\\
\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 &= 1, \quad \beta\gamma + \beta'\gamma' + \beta''\gamma'' = 0,
\end{aligned}$$

du même genre que celles entre a, b, etc., on devra prendre

$$\begin{aligned} X &= \alpha\,(x - x_1) + \beta\,(y - y_1) + \gamma\,(z - z_1), \\ Y &= \alpha'(x - x_1) + \beta'(y - y_1) + \gamma'(z - z_1), \\ Z &= \alpha''(x - x_1) + \beta''(y - y_1) + \gamma''(z - z_1). \end{aligned}$$

Et, réciproquement, il est facile de vérifier qu'en adoptant ces valeurs de X, Y, Z, les formules

$$\xi - \xi^0 = \frac{nX}{X^2+Y^2+Z^2},\quad \eta - \eta^0 = \frac{nY}{X^2+Y^2+Z^2},\quad \zeta - \zeta^0 = \frac{nZ}{X^2+Y^2+Z^2},$$

qui résultent de notre analyse en faisant, pour abréger,

$$\frac{m}{A^2+B^2+C^2} = n,\quad \text{d'où}\quad p^2 = \frac{X^2+Y^2+Z^2}{n}.$$

entraîneront l'équation demandée (1) dont la solution générale est exprimée ainsi d'une manière nouvelle et plus simple. En effet, on trouve d'abord

$$(\xi'-\xi)^2+(\eta'-\eta)^2+(\zeta'-\zeta)^2 = \frac{n^2[(X'-X)^2+(Y'-Y)^2+(Z'-Z)^2]}{(X^2+Y^2+Z^2)(X'^2+Y'^2+Z'^2)},$$

puis

$$(X'-X)^2+(Y'-Y)^2+(Z'-Z)^2 = (x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2,$$

à cause des équations de condition entre α, β, etc. Et de là on tire

$$(\xi'-\xi)^2+(\eta'-\eta)^2+(\zeta'-\zeta)^2 = \frac{n^2[(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2]}{(X^2+Y^2+Z^2)(X'^2+Y'^2+Z'^2)},$$

c'est-à-dire l'équation (1), en prenant

$$p^2 = \frac{X^2+Y^2+Z^2}{n} = \frac{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}{n}.$$

3. On pourrait former inversement les valeurs de x, y, z en ξ, η, ζ; mais il est clair sans calcul, et à priori, que ces valeurs doivent s'exprimer par des formules du même genre que celles qui donnent ξ, η, ζ en x, y, z. En effet, p étant une fonction de x, y, z, on peut concevoir cette quantité comme fonction de ξ, η, ζ. Soit donc

$$p = \frac{1}{\varpi},\quad p' = \frac{1}{\varpi'},$$

ϖ étant une certaine fonction de ξ, η, ζ, et ϖ' la même fonction de ξ', η', ζ'. L'équation (1) se changera dans l'équation nouvelle

$$(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2=\frac{(\xi'-\xi)^2+(\eta'-\eta)^2+(\zeta'-\zeta)^2}{\varpi\varpi'},$$

d'une forme toute semblable à l'équation (1) elle-même, et qui, par conséquent, donnera x, y, z en ξ, η, ζ de la même manière que l'équation (1) a donné ξ, η, ζ en x, y, z.

4. On voit que, par l'échange des lettres x, y, z et ξ, η, ζ les unes dans les autres, une solution particulière de l'équation (1), je veux dire une solution dans laquelle les constantes auraient des valeurs particulières, en donnera une autre, la plupart du temps différente, quoique rentrant toujours, bien entendu, dans le type général indiqué tout à l'heure. Il est aisé aussi de voir que deux solutions données en fournissent une troisième. Supposons, en effet, qu'en prenant pour ξ, η, ζ, q des fonctions de U, V, W, on ait

$$(\xi'-\xi)^2+(\eta'-\eta)^2+(\zeta'-\zeta)^2=\frac{(\mathrm{U}'-\mathrm{U})^2+(\mathrm{V}'-\mathrm{V})^2+(\mathrm{W}'-\mathrm{W})^2}{q^2q'^2}.$$

et que, de même, en prenant pour U, V, W, p, des fonctions de x, y, z, on ait

$$(\mathrm{U}'-\mathrm{U})^2+(\mathrm{V}'-\mathrm{V})^2+(\mathrm{W}'-\mathrm{W})^2=\frac{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}{p^2p'^2},$$

il est clair qu'on pourra exprimer aussi q, ξ, η, ζ en x, y, z, et qu'il viendra

$$(\xi'-\xi)^2+(\eta'-\eta)^2+(\zeta'-\zeta)^2=\frac{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}{p^2q^2.p'^2q'^2},$$

d'où une solution nouvelle de notre problème.

On peut dire, en d'autres termes, que diverses transformations qui résolvent ce problème étant opérées successivement, la transformation unique composée de cet ensemble le résout aussi. Et par la manière dont nous avons vérifié ci-dessus notre solution générale, il est manifeste que cette solution n'est que le résultat d'une suite de solutions particulières ainsi ajoutées entre elles pour ainsi dire.

5. Il y a une solution particulière de l'équation (1) que nous devons

étudier spécialement parce qu'elle constitue, à proprement parler, l'élément essentiel de nos formules générales, et qu'elle nous servira d'ailleurs à en bien montrer le sens géométrique. Elle a été employée par M. Thomson, et consiste à poser

$$\xi = \frac{nx}{x^2+y^2+z^2}, \quad \eta = \frac{ny}{x^2+y^2+z^2}, \quad \zeta = \frac{nz}{x^2+y^2+z^2},$$

d'où résulte, en effet, l'équation

$$(\xi'-\xi)^2+(\eta'-\eta)^2+(\zeta'-\zeta)^2 = n^2\frac{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}{(x^2+y^2+z^2)(x'^2+y'^2+z'^2)},$$

c'est-à-dire l'équation (1), en prenant

$$p^2 = \frac{x^2+y^2+z^2}{n}.$$

On a alors

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2 = \frac{n^2}{x^2+y^2+z^2},$$

et, par conséquent,

$$x = \frac{n\xi}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}, \quad y = \frac{n\eta}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}, \quad z = \frac{n\zeta}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2},$$

valeurs de même composition en ξ, η, ζ que les précédentes en x, y, z.

On peut interpréter géométriquement ces formules en regardant x, y, z, par exemple, comme des coordonnées rectangulaires, et ξ, η, ζ comme des paramètres. Les surfaces (ξ), (η), (ζ) pour lesquelles un de ces paramètres conserve même valeur sont des sphères qui se coupent deux à deux orthogonalement, et par l'intersection de trois desquelles M. Thomson détermine la position de chaque point (x, y, z) ou (ξ, η, ζ). Sous ce point de vue, ξ, η, ζ sont des coordonnées curvilignes qui se rapportent à la même figure que les coordonnées rectilignes x, y, z. Mais il est plus commode, je crois, d'introduire dans nos recherches une de ces transmutations de figures si familières aux géomètres, et qui ont tant contribué aux progrès de la science dans ces derniers temps. La transformation dont il s'agit est bien connue, du reste, et des plus simples; c'est celle que M. Thomson lui-même a jadis employée sous le nom de principe des *images* [*]. Considérez x, y, z comme les coordonnées d'un point quelconque m d'une figure rapportée à trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, et ξ, η, ζ comme celles d'un point μ d'une autre figure rapportée à trois axes $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, rectangulaires aussi, et auxquels nous donnons la même origine O, et respectivement les mêmes directions, une de ces figures dérivant de l'autre, et le point μ, en particulier, correspondant au point m, en vertu des relations par lesquelles ξ, η, ζ s'expriment en x, y, z, ou x, y, z en ξ, η, ζ. Il est évident que les deux points correspondants m, μ sont en ligne droite avec l'origine O, et que le produit $Om.O\mu$ des rayons vecteurs Om, $O\mu$ est constant et $= n$. Une des figures se déduit donc de l'autre en prenant sur chacun des rayons vecteurs menés du point O à un point quelconque de la première figure d'autres rayons vecteurs en raison inverse des premiers; les extrémités de ces nouveaux rayons vecteurs déterminent la seconde figure. Nous donnerons à cette transformation le nom de transformation *par rayons vecteurs réciproques,* relativement à l'origine O. Si, pour un point m, on a $Om = \sqrt{n}$, on aura aussi $O\mu = \sqrt{n}$, et les points m et μ qui se correspondent ainsi dans les deux figures coïncideront. En disposant de n, on peut faire en sorte qu'un point donné m reste fixe dans la transformation; il suffit de prendre $n = \overline{Om}^2$, et alors tous les points situés sur la sphère dont O est le centre et Om le rayon, resteront fixes aussi, mais tous les autres seront déplacés.

6. A l'aide de cette transformation *par rayons vecteurs réciproques,* on déduira d'une figure donnée une infinité d'autres figures, soit en changeant l'origine O d'où partent les rayons vecteurs, soit en prenant diverses valeurs de n avec une même origine O, ce qui ne donne, au surplus, lieu qu'à des figures transformées toutes semblables entre elles, du moins tant que n garde le même signe; car les figures qui répondent à deux valeurs de n égales et de signes contraires sont symétriques. On peut d'ailleurs effectuer, l'une après l'autre, des transformations relatives à des origines différentes. Mais je dis que nos formules générales du n° 2 peuvent toujours s'interpréter à l'aide d'une

[*] Tome X de ce Journal, page 364.

seule transformation de cette espèce, en sorte qu'on n'obtiendrait rien de vraiment nouveau en ajoutant d'autres transformations à celle-là.

En effet, dans le cas le plus général, nous pouvons encore considérer x, y, z et ξ, η, ζ comme les coordonnées de deux points m, μ appartenant à deux figures différentes et rapportés à deux systèmes d'axes rectangulaires des x, y, z et ξ, η, ζ. Et voici comment s'opère la transformation de l'une des figures dans l'autre.

D'abord on passe de x, y, z à X, Y, Z par les formules

$$\begin{aligned}
X &= \alpha\,(x - x_0) + \beta\,(y - y_0) + \gamma\,(z - z_0),\\
Y &= \alpha'(x - x_0) + \beta'(y - y_0) + \gamma'(z - z_0),\\
Z &= \alpha''(x - x_0) + \beta''(y - y_0) + \gamma''(z - z_0).
\end{aligned}$$

Or, à cause des équations de condition entre α, β, etc., ce passage n'est qu'un changement de coordonnées rectangulaires en d'autres coordonnées rectangulaires, qui n'altère en rien la première figure à laquelle il est appliqué; on peut le supposer opéré d'avance, et confondre dès lors X, Y, Z avec x, y, z.

De là nous irons aux formules

$$\xi - \xi^0 = \frac{nX}{X^2 + Y^2 + Z^2}, \quad \eta - \eta^0 = \frac{nY}{X^2 + Y^2 + Z^2}, \quad \zeta - \zeta^0 = \frac{nZ}{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

et nous aurons ainsi une transformation de X, Y, Z en $\xi - \xi_0$, $\eta - \eta_0$, $\zeta - \zeta^0$, que nous regarderons comme des coordonnées rectangulaires prises par rapport aux mêmes axes. Cette transformation est à rayons vecteurs réciproques, comme nous l'avons vu n° 3. Elle s'opère en portant sur les rayons vecteurs menés de l'origine actuelle des longueurs inversement proportionnelles à ces rayons vecteurs; l'ancienne figure se trouve ainsi changée en celle qui résulte des extrémités de toutes ces longueurs. Passer ensuite de $\xi - \xi^0$, $\eta - \eta^0$, $\zeta - \zeta^0$ à ξ, η, ζ, n'est qu'un simple déplacement de l'origine, les axes restant parallèles à eux-mêmes; cela ne produit dans la figure transformée aucune altération.

Nos formules du n° **2** résultent donc d'une transformation par rayons vecteurs réciproques, combinée avec des changements ordinaires de coordonnées. De telles transformations en nombre quelconque donnent toujours naissance à une équation de la forme (1), et l'interprétation géométrique des formules par lesquelles nous avions d'abord lié (n° **1**) x, y, z et ξ, η, ζ semblait en demander deux, relatives à deux origines différentes, l'une pour le passage de x, y, z à u, v, w, l'autre pour le passage de u, v, w à ξ, η, ζ; mais on voit, par ce qui précède, et grâce aux formules plus simples du n° **2**, qu'une seule transformation suffit pour conduire au résultat le plus général : il était important de le démontrer.

7. Les considérations géométriques dont nous venons de faire usage, pour interpréter les formules qui conduisent à l'équation (1), donnent lieu à des conséquences remarquables dont nous allons dire quelques mots. Dans les deux figures que déterminent respectivement les coordonnées x, y, z et les coordonnées ξ, η, ζ, considérons, d'une part, deux points quelconques m, m', et, d'autre part, les points correspondants μ, μ'. Soient D la distance des deux premiers, Δ celle des deux autres, en sorte que

$$\begin{aligned} D^2 &= (x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2, \\ \Delta^2 &= (\xi'-\xi)^2 + (\eta'-\eta)^2 + (\zeta'-\zeta)^2. \end{aligned}$$

L'équation (1), qui pourra s'écrire

$$\Delta^2 = \frac{D^2}{p^2p'^2}, \quad \Delta = \frac{D}{pp'}, \quad \frac{1}{\Delta} = \frac{pp'}{D},$$

fournit une relation entre la distance Δ de deux points μ, μ' dans l'une des figures et les quantités D, p, p'. Nous venons de dire que D est la distance des deux points m, m' correspondants dans l'autre figure; quant à p et p', ce sont, à un facteur constant près, les distances des points m, m' à un certain point fixe. Toute relation métrique entre deux ou plusieurs distances Δ dans l'une des figures fournira donc immédiatement une relation analogue dans l'autre figure. Mais il ne faut pas croire que les divers points correspondants à ceux de la droite Δ soient sur la droite D; cela arrive pour les points extrêmes par la définition même de ces droites, mais n'a pas lieu, en général, pour les points intermédiaires. En général, la suite des points correspondants à ceux d'une droite de la première figure forme dans la seconde figure une circonférence de cercle, laquelle ne se réduit à une ligne droite que dans un cas particulier, celui où son rayon est infini.

Ayant en ξ, η, ζ l'équation d'une surface ou les équations d'une ligne appartenant à la première figure, il suffit de substituer à ξ, η, ζ leurs valeurs pour former en x, y, z l'équation de la surface ou les équations de la ligne correspondante. On trouve bien facilement, de cette manière, que des plans et des sphères se transforment en des sphères qui peuvent se réduire à des plans quand le rayon devient infini; que, de même, des droites et des circonférences de cercle se transforment en des circonférences de cercle, etc. Mais, pour suivre le mécanisme de ces transformations, il suffit de considérer la transformation par rayons vecteurs réciproques, qui combinée avec des changements de coordonnées donne, comme on l'a vu, la transformation la plus générale. Soit donc

$$\xi = \frac{nx}{x^2+y^2+z^2} = \frac{nx}{r^2}, \quad x = \frac{n\xi}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2} = \frac{n\xi}{\rho^2},$$

$$\eta = \frac{ny}{x^2+y^2+z^2} = \frac{ny}{r^2}, \quad y = \frac{n\eta}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2} = \frac{n\eta}{\rho^2},$$

$$\zeta = \frac{nz}{x^2+y^2+z^2} = \frac{nz}{r^2}, \quad z = \frac{n\zeta}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2} = \frac{n\zeta}{\rho^2},$$

$$\Delta = \frac{D}{\rho\rho'} = \frac{nD}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)(x'^2+y'^2+z'^2)}} = \frac{nD}{rr'},$$

l'ensemble des formules relatives à la transformation par rayons vecteurs réciproques. On en conclut immédiatement ce que nous venons d'avancer, concernant les plans et les sphères, les droites et les circonférences de cercle. Mais on voit, de plus, et même sans calcul, que les plans qui passent par le point O, origine des rayons vecteurs, sont les seuls qui restent des plans dans la transformation; avant et après, leur position est la même, quoique leurs divers points, bien entendu, se soient déplacés pour se substituer les uns aux autres, ceux qui étaient loin de l'origine en étant à présent devenus voisins, et *vice versâ*. Tout autre plan se transforme en une sphère passant par le point O (où la transformation amène tous les points situés à l'infini) et ayant son centre sur la perpendiculaire au plan menée du point O; la perpendiculaire et le diamètre de la sphère ont un produit égal à la constante n, et se déduisent ainsi facilement l'une de l'autre. Il est inutile d'ajouter que deux sphères qui correspondent à deux plans parallèles se touchent au point O. De même, deux sphères ainsi posées se transformeraient en deux plans parallèles. Mais une sphère qui ne passe pas par le point O doit rester une sphère, puisqu'elle ne peut acquérir aucun point à l'infini. Les droites passant par le point O restent des droites, et conservent leur position invariable. Toute autre droite donne lieu à une circonférence de cercle dont le plan est déterminé par la droite et par le point O, et dont le centre est situé sur la perpendiculaire abaissée du point O sur la droite; le diamètre est le quotient de la constante n par cette perpendiculaire. Les circonférences provenant de droites parallèles sont toutes tangentes à une parallèle menée par le point O à ces droites. On peut voir, enfin, que la transformée d'une circonférence est une droite quand la circonférence passe par le point O, et, dans tout autre cas, reste une circonférence.

Une propriété remarquable de ce genre de transformation consiste en ce que les deux triangles formés par trois points infiniment voisins quelconques de la figure primitive et les trois points correspondants de sa transformée sont semblables l'un à l'autre, en sorte que si deux lignes se coupent dans l'une des deux figures sous un certain angle, les lignes correspondantes de l'autre figure se couperont sous le même angle [*]. La démonstration de cette propriété repose sur l'équation (1), à laquelle nous avons donné la forme

$$\Delta = \frac{D}{pp'}.$$

Supposons, en effet, que les deux points m, m', ou (x, y, z), (x', y', z'), soient infiniment voisins, et que leur distance D soit représentée par ds. Représentons par $d\sigma$ celle des deux points correspondants μ, μ'.

---

[*] De la similitude des triangles infiniment petits correspondants, il résulte encore que la figure transformée est semblable à la figure primitive, ou à sa symétrique, dans ses éléments infiniment petits. En s'en tenant au premier cas, qui est proprement celui de nos formules, où nous prenons naturellement la constante n positive, on aura, à trois dimensions, une sorte de représentation des corps, analogue au tracé des cartes géographiques, pour lesquelles le rapport de similitude des éléments correspondants est variable aussi d'un lieu à l'autre.

Comme p et p' n'auront pas de différence sensible, il nous viendra

$$d\sigma = \frac{ds}{p^2}.$$

Les éléments $d\sigma$, ds ont donc en chaque lieu un rapport constant qui dépend de p et change, en général, d'un lieu à l'autre. Considérons un troisième point m'' infiniment voisin des deux premiers, et désignons par ds' et ds'' ses distances à m et à m'; $d\sigma'$, $d\sigma''$ étant les distances correspondantes dans la seconde figure, on aura encore

$$d\sigma' = \frac{ds'}{p^2},$$
$$d\sigma'' = \frac{ds''}{p^2}.$$

Donc

$$d\sigma : d\sigma' : d\sigma'' :: ds : ds' : ds''.$$

Ainsi, le triangle infinitésimal $mm'm''$ est semblable au triangle correspondant $\mu\mu'\mu''$. L'angle de ds avec ds' est, par conséquent, le même que celui de $d\sigma$ avec $d\sigma'$. Cette démonstration, on le voit, n'exige pas même que l'équation (1) ait lieu pour deux points situés à une distance finie; elle demande seulement que cette équation ait toujours lieu pour deux points infiniment voisins. On doit en dire autant d'un théorème que je vais établir, et qui n'est qu'un corollaire de la proposition précédente.

Une surface appartenant à l'une des deux figures étant donnée, représentez-vous les lignes de courbure de cette surface, et les deux séries de surfaces développables, orthogonales entre elles et à la surface donnée, qui sont formées par les normales successives. Dans la seconde figure, les séries de surfaces correspondantes resteront orthogonales entre elles et à la transformée de la surface donnée; par suite, en vertu du beau théorème de M. Ch. Dupin, elles traceront encore sur cette transformée des lignes de courbure. Ces lignes de courbure résulteront ainsi des lignes de courbure de la première surface donnée, et seront immédiatement connues si les autres le sont. Il sera aisé d'appliquer ce théorème aux surfaces du second degré, comme aussi aux systèmes triples de surfaces orthogonales que M. Serret a indiqués dans une Note récente [*], et qui, par notre transformation, en donneront d'autres non moins curieux, etc.

Proposons-nous, par exemple, de trouver les lignes de courbure de la surface enveloppe des sphères qui touchent trois sphères données, problème que M. Ch. Dupin a résolu jadis dans la *Correspondance sur l'École Polytechnique,* tome I, page 22. Soient O et P les points d'intersection de ces trois sphères; prenons le point O pour origine, et opérons une transformation par rayons vecteurs réciproques, ce qui nous fournira une seconde figure d'où nous reviendrons aisément à la première. Dans la seconde figure, les trois sphères données seront remplacées par trois plans qui se couperont en un point Π correspondant au second point P d'intersection de nos trois sphères. La surface enveloppe des sphères tangentes à ces trois plans sera (en se bornant à un des angles solides et à son opposé) celle d'un cône droit à base circulaire ayant son sommet au point Π, et circonscrit à une quelconque des sphères tangentes aux trois plans. Les lignes de courbure de cette surface conique sont : 1° les génératrices rectilignes qui passent toutes par le point Π: dans le retour à la première figure, ces droites deviendront des cercles passant tous par le point P, dont les tangentes en P feront toutes le même angle avec la tangente au cercle dans lequel se transforme l'axe du cône, d'où résultera un nouveau cône droit, et passant toutes aussi avec des circonstances semblables par le point O; 2° des cercles, dont les plans sont tous parallèles entre eux et perpendiculaires à l'axe du cône, et qui, lors du retour à la première figure, deviendront des cercles coupant à angle droit ceux qui résultent des génératrices rectilignes. Les lignes de courbure de la surface enveloppe des sphères tangentes à trois sphères données sont donc des circonférences de cercle.

On démontre avec la même facilité le théorème de M. Dupin concernant la courbe que trace sur chacune des trois sphères données la sphère variable qui les touche. En effet, quand les trois sphères données sont remplacées par trois plans, il est clair que la suite des points suivant lesquels la sphère variable touche un quelconque des plans est une ligne droite passant par le point d'intersection Π. Donc, en revenant

---

[*] Page 241 du présent volume.

aux trois sphères données, la courbe demandée est une circonférence de cercle qui passe par les points O et P. Il peut arriver, bien entendu, que les points O et P soient imaginaires; mais il n'y a alors aucun changement essentiel à faire dans ce que nous venons de dire, et nos conclusions subsistent.

La circonstance d'une origine O imaginaire aurait plus d'inconvénient s'il s'agissait de résoudre le problème d'une sphère tangente à quatre autres, en le ramenant au problème très-simple de trouver une sphère tangente à une sphère donnée et à trois plans donnés; mais on y remédierait en augmentant d'une même quantité les rayons des quatre sphères données, ce qui ne change pas la position du centre de la sphère tangente. De même, en se bornant à considérer des points tous situés dans un plan passant par l'origine O, on ramènera la détermination du cercle tangent à trois autres à celle d'un cercle qui touche un cercle donné et deux droites données.

En général, les systèmes de sphères ou de cercles, et spécialement de sphères ou de cercles passant par un point donné, jouissent de propriétés curieuses dont beaucoup deviennent intuitives par la transformation dont nous venons de nous occuper. On peut appliquer en particulier cette remarque aux théorèmes que M. Miquel a donnés dans son Mémoire sur les angles curvilignes [*]. Pour nous borner au cas le plus simple, il est évident que, dans un triangle ABC formé par trois arcs de cercles passant tous par un même point O, la somme des angles vaut 2 droits, puisque notre transformation rend ce triangle rectiligne sans altérer ses angles.

8. Le passage des relations métriques d'une figure à l'autre, dans la transformation par rayons vecteurs réciproques, en allant des coordonnées ξ, η, ζ aux coordonnées x, y, z, s'opère à l'aide de la formule

$$\Delta = \frac{nD}{rr'},$$

ou simplement

$$\Delta = \frac{D}{rr'};$$

[*] Tome IX de ce Journal, page 20.

en posant $n = 1$, ce qui n'a aucun inconvénient. Mais en désignant par O l'origine, dans la seconde figure seulement, et en employant les autres lettres A, B, etc., pour représenter à la fois les points de la première figure et les points correspondants de la seconde figure, cette formule revient à dire que, dans toute relation entre des distances AB, BD, etc., il faut remplacer chaque distance telle que AB par $\frac{AB}{OA.OB}$. Voilà donc une règle pratique très-commode; cette règle convient aussi bien au cas du plan qu'à celui de l'espace. Deux exemples suffiront.

Que des droites partant d'un point fixe A coupent chacune un cercle en deux points B et C, B′ et C′, etc., on aura

$$AB \times AC = AB' \times AC' = \text{constante}.$$

Donc, dans la figure transformée,

$$\frac{AB}{OA.OB} \times \frac{AC}{OA.OC} = \frac{AB'}{OA.OB'} \times \frac{AC'}{OA.OC'},$$

et, par conséquent,

$$\frac{AB}{OB} \times \frac{AC}{OC} = \text{constante}.$$

D'ailleurs les points A, B, C, qui étaient en ligne droite, se trouvent à présent sur une circonférence de cercle passant par le point O. Nous voyons par là que les cercles passant par deux points fixes A, O coupent un cercle donné en deux points B, C tels, que le rapport des produits des distances $AB \times AC$ et $OB \times OC$ a une valeur constante pour tous ces cercles.

Que les côtés BC, AC, AB d'un triangle rectiligne ABC soient coupés en trois points A′, B′, C′ par une transversale, on aura

$$AC' \times BA' \times CB' = BC' \times CA' \times AB'.$$

Donc, dans la figure transformée,

$$\frac{AC'}{OA.OC'} \times \frac{BA'}{OB.OA'} \times \frac{CB'}{OC.OB'} = \frac{BC'}{OB.OC'} \times \frac{CA'}{OC.OA'} \times \frac{AB'}{OA.OB'},$$

ce qui redonne

$$AC' \times BA' \times CB' = BC' \times CA' \times AB'.$$

Mais cette relation s'applique à présent à un triangle curviligne ABC formé par trois cercles qui passent tous au point O et dont les côtés sont coupés en A', B', C' par un quatrième cercle passant aussi au point O. Il est, du reste, inutile d'ajouter que AC', BA', etc., sont les plus courtes distances des points A et C', B et A', etc., et non des segments mesurés sur les côtés du triangle curviligne.

On généraliserait aisément de la même manière le théorème relatif à un polygone gauche coupé par un plan. Mais en voilà assez sur ce sujet.

9. Étant données deux sphères qui ne se coupent pas, on peut toujours placer l'origine sur la droite qui joint leurs centres, en un point réel tel, qu'après la transformation par rayons vecteurs réciproques, ces deux sphères seront concentriques. Prenons la droite des centres pour axe des x; désignons par h la distance inconnue du point O au centre de la première sphère, et par $h+l$ sa distance au centre de la seconde sphère; soient k, k' les rayons. Les équations des deux sphères seront, avant la transformation,

$$(x-h)^2+y^2+z^2=k^2,$$
$$(x-h-l)^2+y^2+z^2=k'^2,$$

et après la transformation, qui consistera à remplacer x, y, z par

$$\frac{x}{x^2+y^2+z^2},\quad \frac{y}{x^2+y^2+z^2},\quad \frac{z}{x^2+y^2+z^2},$$

elles deviendront

$$\left(x-\frac{h}{h^2-k^2}\right)^2+y^2+z^2=\frac{k^2}{(h^2-k^2)^2},$$
$$\left[x-\frac{h+l}{(h+l)^2-k'^2}\right]^2+y^2+z^2=\frac{k'^2}{[(h+l)^2-k'^2)]^2}.$$

Pour que le centre soit le même à présent, il faut et il suffit que

$$\frac{h}{h^2-k^2}=\frac{h+l}{(h+l)^2-k'^2},$$

d'où

$$lh^2+(l^2+k^2-k'^2)h+lk^2=0,$$

équation du second degré qui donnera pour h deux valeurs,

$$h = -\frac{l^2 + k^2 - k'^2}{2l} \pm \frac{1}{2l}\sqrt{G},$$

en posant

$$G = (l - k - k')(l - k + k')(l + k - k')(l + k + k');$$

et il est aisé de voir que G sera positive si les deux sphères qu'on a données d'abord ne se coupent pas.

10. Ce théorème pourra être utile en géométrie; mais il aura surtout une application importante dans les questions de physique mathématique. Essayons ici d'indiquer rapidement l'usage, en ce genre de questions, de la transformation générale qui donne l'équation (1). La Lettre de M. Thomson nous servira de guide; nous y ajouterons quelques développements. La généralité plus ou moins grande de la solution par laquelle on satisfait à l'équation (1) ne change en rien la marche à suivre, qui reste la même dans tous les cas.

Et d'abord de l'équation

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{pp'}{D}$$

on peut conclure, avec M. Thomson, que, si une fonction U de ξ, η, ζ satisfait à l'équation

$$\frac{d^2U}{d\xi^2} + \frac{d^2U}{d\eta^2} + \frac{d^2U}{d\zeta^2} = 0,$$

cette même fonction, divisée par p et exprimée en x, y, z, vérifiera l'équation de même forme

$$\frac{d^2 . p^{-1}U}{dx^2} + \frac{d^2 . p^{-1}U}{dy^2} + \frac{d^2 . p^{-1}U}{dz^2} = 0.$$

De là une liaison entre deux problèmes distincts concernant tous deux l'équilibre de température dans les corps homogènes, mais relatifs à deux systèmes dont l'un résulte de l'autre par la transformation qui lie ξ, η, ζ à x, y, z.

Que le premier système soit formé de deux sphères qui ne se coupent pas, que la température soit donnée en chaque point de leurs surfaces, et demandons quelle est la loi des températures permanentes dans l'espace compris entre elles, si l'une est intérieure à l'autre, ou dans l'espace infini extérieur à toutes deux, si l'une est en dehors de l'autre, en ajoutant dans ce dernier cas la condition que la température soit nulle à l'infini. On ramènera cette question au cas très-facile de deux sphères concentriques. Cela résulte du théorème établi ci-dessus et en montre toute l'importance. En indiquant cette application à la théorie de la chaleur, M. Thomson ajoute, du reste, avec raison qu'elle s'étend d'elle-même à la théorie de l'électricité.

Dans la théorie de l'électricité ou du magnétisme, et, en général, dans la théorie de l'attraction, la quantité que G. Green et M. Gauss nomment *potentiel*, c'est-à-dire la quantité qu'on obtient en faisant la somme des éléments attractifs ou répulsifs d'une masse divisés par leurs distances à un point, joue un rôle capital. On connaît le problème de M. Gauss : « Distribuer sur une surface donnée une masse attractive ou répulsive, de telle sorte que le potentiel ait en chaque point de la surface une valeur donnée. » On a résolu ce problème pour différentes surfaces, en particulier pour l'ellipsoïde. Or la solution relative à une surface quelconque donne la solution pour toutes les surfaces qui se déduisent de celle-là par une transformation pour laquelle l'équation (1) ait lieu. Ayant, en effet, l'équation

$$\int\int \frac{\lambda' d\omega'}{\Delta} = Q$$

pour la première surface, on aura pour la seconde surface une équation du même genre, en remplaçant par leurs nouvelles valeurs Δ et $d\omega'$. On a

$$\Delta = \frac{D}{pp'}.$$

Quant à $d\omega'$, j'observe que les éléments linéaires correspondants $d\sigma$ et ds sont liés par la formule

$$d\sigma = \frac{ds}{p^2}.$$

Donc entre deux éléments superficiels correspondants $d\omega$, da, on aura

$$d\omega = \frac{da}{p^4}, \quad d\omega' = \frac{da'}{p'^4};$$

par suite,

$$\int\int \frac{\lambda'}{p'^3}\frac{da'}{D} = \frac{Q}{p},$$

ce qui résout le problème de M. Gauss pour la surface transformée.

On peut voir aussi que les équations désignées par (A), (B), (C) dans mes Lettres à M. Blanchet [*], et qui sont d'un si grand usage dans la plupart des questions physico-mathématiques concernant l'ellipsoïde, ont leurs analogues, qu'on en déduit immédiatement pour les surfaces transformées de l'ellipsoïde [**].

On peut considérer encore l'équation

$$\frac{d^2U}{dt^2} = \frac{d^2U}{d\xi^2} + \frac{d^2U}{d\eta^2} + \frac{d^2U}{d\zeta^2},$$

et lui faire subir la transformation de ξ, η, ζ en x, y, z.

A cause de l'équation

$$d\sigma = \frac{ds}{p^2},$$

qui peut s'écrire

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{p^4},$$

on trouve, par des formules connues, que la quantité

$$\frac{d^2U}{d\xi^2} + \frac{d^2U}{d\eta^2} + \frac{d^2U}{d\zeta^2}$$

est égale à

$$p^6\left(\frac{d.\frac{1}{p^2}\frac{dU}{dx}}{dx} + \frac{d.\frac{1}{p^2}\frac{dU}{dy}}{dy} + \frac{d.\frac{1}{p^2}\frac{dU}{dz}}{dz}\right),$$

---

[*] *Voyez* le tome XI de ce Journal.

[**] Parmi ces surfaces, il faut distinguer celle que donne la transformation *par rayons vecteurs réciproques*, en mettant l'origine au centre même de l'ellipsoïde. On sait qu'elle est aussi le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du centre sur les plans tangents à un autre ellipsoïde dont les axes ont pour valeurs les inverses des valeurs des axes de l'ellipsoïde donné. Une propriété analogue a lieu dans le plan, pour la lemniscate par exemple, qui peut ainsi être engendrée de deux manières différentes

c'est-à-dire à

$$p^4\left(\frac{d^2U}{dx^2}+\frac{d^2U}{dy^2}+\frac{d^2U}{dz^2}\right)-2p^3\left(\frac{dU}{dx}\frac{dp}{dx}+\frac{dU}{dy}\frac{dp}{dy}+\frac{dU}{dz}\frac{dp}{dz}\right),$$

ou enfin à

$$p^5\left(\frac{d^2.p^{-1}U}{dx^2}+\frac{d^2.p^{-1}U}{dy^2}+\frac{d^2.p^{-1}U}{dz^2}\right),$$

en se rappelant que

$$\frac{d^2\frac{1}{p}}{dx^2}+\frac{d^2\frac{1}{p}}{dy^2}+\frac{d^2\frac{1}{p}}{dz^2}=0.$$

Par là on voit d'abord que l'équation

$$\frac{d^2U}{d\xi^2}+\frac{d^2U}{d\eta^2}+\frac{d^2U}{d\zeta^2}=0$$

revient à celle-ci :

$$\frac{d^2.p^{-1}U}{dx^2}+\frac{d^2.p^{-1}U}{dy^2}+\frac{d^2.p^{-1}U}{dz^2}=0,$$

ce que nous savions déjà. On voit ensuite que l'équation

$$\frac{d^2U}{dt^2}=\frac{d^2U}{d\xi^2}+\frac{d^2U}{d\eta^2}+\frac{d^2U}{d\zeta^2}$$

se transforme en

$$\frac{d^2U}{dt^2}=p^5\left(\frac{d^2.p^{-1}U}{dx^2}+\frac{d^2.p^{-1}U}{dy^2}+\frac{d^2.p^{-1}U}{dz^2}\right),$$

ou, mieux encore, en

$$\frac{d^2.p^{-1}U}{dt^2}=p^4\left(\frac{d^2.p^{-1}U}{dx^2}+\frac{d^2.p^{-1}U}{dy^2}+\frac{d^2.p^{-1}U}{dz^2}\right).$$

Réciproquement, cette dernière équation, où le coefficient p varie proportionnellement à la distance du point (x, y, z) à un point fixe, se

---

au moyen d'une hyperbole équilatère, circonstance dont M. Chasles a tiré un heureux parti dans ses recherches *sur les arcs égaux de la lemniscate* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, tome XXI, séance du 21 juillet 1845).

ramène à l'équation

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d^2U}{d\xi^2} + \frac{d^2U}{d\eta^2} + \frac{d^2U}{d\zeta^2},$$

qui est à coefficients constants, résultat qui trouve une application utile dans la théorie du son.

On peut enfin ajouter que les équations aux différences partielles

$$\left(\frac{dU}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dU}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{dU}{d\zeta}\right)^2 = Q$$

et

$$\left(\frac{dU}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dU}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dU}{dz}\right)^2 = \frac{Q}{p^4}$$

sont des transformées l'une de l'autre, ce qui pourra servir dans les questions de dynamique, où MM. Hamilton et Jacobi ont introduit de telles équations aux différences partielles.

On me pardonnera, je l'espère, ces développements que j'ai cru pouvoir donner, à la suite des deux Lettres si intéressantes de M. Thomson, sans le gêner dans ses recherches. Mon but sera rempli, je le répète, s'ils peuvent aider à bien faire comprendre la haute importance du travail de ce jeune géomètre, et si M. Thomson lui-même veut bien y voir une preuve nouvelle de l'amitié que je lui porte et de l'estime que j'ai pour son talent.