JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

WILLIAM THOMSON

Extraits de deux lettres adressées à M. Liouville

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 12 (1847), p. 256-264.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1847_1_12__256_0>

EXTRAITS DE DEUX LETTRES ADRESSÉES A M. LIOUVILLE,

PAR M. WILLIAM THOMSON.

« Cambridge, 26 juin 1846.

» ..... Les recherches sur lesquelles je vous ai écrit, le 8 octobre 1845 [*], m'ont conduit à l'emploi d'un système nouveau de coordonnées orthogonales très-commode dans quelques problèmes des théories de la chaleur et de l'électricité. Les surfaces coordonnées dans ce système sont les surfaces engendrées par la rotation, autour d'un axe convenable, d'un système de coordonnées curvilignes dans un plan, et les plans méridiens. En effet, soit M un plan méridien quelconque; les coordonnées d'un point P dans ce plan sont deux cercles qui se coupent à angle droit en ce point, et dont le premier passe par deux points fixes A, A', dans l'axe de révolution X'X, tandis que le second est la courbe orthogonale de la série entière des cercles qui passent par les points A, A'. On démontre facilement que cette courbe est un cercle qui passe par deux points imaginaires B, B', dans la droite Y'OY perpendiculaire à X'OX, à des distances aux deux côtés de O dont chacune est égale à $a\sqrt{-1}$, a étant la valeur des distances égales A'O, OA. En effet, la première série est exprimée par l'équation

$$x^2 + y^2 - 2uy = a^2, \tag{1}$$

u étant un paramètre variable, et l'on en déduit

$$x^2 + y^2 - 2vx = -a^2. \tag{2}$$

pour l'équation de la courbe orthogonale.

[*] Permettez-moi de vous faire remarquer une faute qui a passé dans l'extrait de cette Lettre que vous avez publié (il est probable que je l'ai faite moi-même). La lettre s, qui ne devait nullement paraître dans les formules, y est plusieurs fois répétée au lieu de n [**].

[**] Cette faute, qui existait, en effet, dans le manuscrit, a été déjà signalée dans l'*errata* du tome X, où la Lettre de M. Thomson se trouve imprimée. (J. LIOUVILLE.)

» Posons

$$u = a \cot \theta, \quad v = a\sqrt{-1}.\cot \psi;$$

θ sera l'angle que la tangente du cercle (1), au point A ou A', fait avec l'axe X'X, et ψ sera l'angle imaginaire que la tangente du cercle (2), au point B ou B', fait avec Y'Y. Pour avoir la série entière des cercles (1), il faudrait donner à u toutes les valeurs réelles de $-\infty$ à ∞, ou à θ toutes les valeurs de 0 à π; et, pour la série (2), il faudrait donner à v toutes les valeurs de a à ∞, et de $-\infty$ à $-a$. On peut considérer un point P comme déterminé sans ambiguïté par les coordonnées θ, ψ (en prenant $\theta + \pi$ au lieu de θ pour l'autre point d'intersection des mêmes cercles). Les équations de transformation, entre les coordonnées (x, y) et (θ, ψ) d'un même point P, sont

$$x^2 + y^2 - 2ay \cot \theta = a^2, \tag{3}$$

$$x^2 + y^2 - 2ax \cot \psi \sqrt{-1} = -a^2. \tag{4}$$

On en déduit

$$x = -a\frac{\sin \psi \sqrt{-1}}{\cos \psi - \cos \theta},$$

$$y = a\frac{\sin \theta}{\cos \psi - \cos \theta},$$

$$x^2 + y^2 = a^2 \frac{\cos \psi + \cos \theta}{\cos \psi - \cos \theta}.$$

Dans les applications physiques, il s'agit d'exprimer la distance Δ, entre deux points P, P', en fonction des nouvelles coordonnées. On trouve facilement, à l'aide des formules données ci-dessus, dans le cas de P et P' dans un même plan méridien M,

$$\Delta^2 = 2a^2 \frac{\cos(\psi - \psi') - \cos(\theta - \theta')}{(\cos \psi - \cos \theta)(\cos \psi' - \cos \theta')}.$$

Pour les trois coordonnées d'un point dans l'espace, je prends θ, ψ qui fixent sa position dans un plan méridien, et l'angle φ que ce plan fait avec un plan méridien fixe. Je trouve maintenant, pour la distance entre deux points quelconques P, P',

$$\Delta^2 = 2a^2 \frac{\cos(\psi - \psi') - [\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi')]}{(\cos \psi - \cos \theta)(\cos \psi' - \cos \theta')}.$$

Pour éviter l'emploi de quantités imaginaires, je pose

$$2\cos\psi = r + \frac{1}{r}, \quad 2\cos\psi' = r' + \frac{1}{r'},$$

d'où l'on déduit

$$2\cos(\psi - \psi') = \frac{r}{r'} + \frac{r'}{r},$$

et l'expression précédente se réduit à

$$\Delta^2 = a^2 \frac{r^2 - 2rr'[\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi - \varphi')] + r'^2}{(r^2 - 2r\cos\theta + 1)(r'^2 - 2r'\cos\theta' + 1)}.$$

A l'aide de cette expression, on trouve

$$r\frac{d^2(s^{-1}vr)}{dr^2} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{d\left[\sin\theta\frac{d(s^{-1}v)}{d\theta}\right]}{d\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{d^2(s^{-1}v)}{d\varphi^2} = 0,$$

où

$$s = (r^2 - 2r\cos\theta + 1)^{\frac{1}{2}},$$

pour l'équation du mouvement uniforme de la chaleur exprimée par les coordonnées r, θ, φ.

» Les surfaces représentées par l'équation

$$r = \text{constante}$$

sont des sphères engendrées par la révolution d'une série de cercles autour de la droite qui contient leurs centres. Supposons que l'espace entre deux de ces sphères (quand chaque sphère est en dehors de l'autre, cet espace sera l'espace infini en dehors des deux sphères), dont les équations sont

$$r = \alpha, \quad r = \alpha_1,$$

soit rempli d'un milieu solide homogène, que les températures de tous les points de chaque surface soient données, et qu'il s'agisse de déterminer la température stationnaire d'un point quelconque dans le solide; on résoudra ce problème avec beaucoup de facilité au moyen de l'analyse de Laplace, en employant les coordonnées que j'ai indiquées. Dans le cas particulier d'une température constante pour chaque sphère, on parvient, après quelques réductions, à trouver la solution que Poisson a donnée pour le problème correspondant de deux sphères électrisées.

» Il y a un système nouveau et très-remarquable de coordonnées, qu'on trouve en posant

$$r\cos\theta = \xi,\quad r\sin\theta\cos\varphi = \eta,\quad r\sin\theta\sin\varphi = \zeta,$$

r, θ, φ appartenant au système expliqué ci-dessus. Dans ce système (ξ, η, ζ), les surfaces coordonnées sont des sphères orthogonales qui passent par un point fixe, et qui touchent, par conséquent, trois plans orthogonaux menés par ce point. Je suis parvenu à considérer ces systèmes de coordonnées en cherchant les *images* des séries de surfaces des systèmes (polaire et rectangulaire) ordinaires, dans des sphères convenablement disposées.

» L'application du système (ξ, η, ζ) aux problèmes de physique, pour le cas de deux systèmes qui se touchent l'un l'autre, en donne les solutions avec beaucoup de facilité; mais il est plus simple de faire directement la recherche de ces coordonnées, que de les déduire du système (r, θ, φ). En effet, soient

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{x}{\xi} = 0,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{y}{\eta} = 0,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{z}{\zeta} = 0$$

les équations de trois sphères qui se coupent à un point P (elles se coupent aussi à l'origine O). Je prends ξ, η, ζ pour les coordonnées de ce point $\left(\text{il faudrait substituer } \frac{\xi-1}{a}, \frac{\eta}{a}, \frac{\zeta}{a} \text{ dans ces équations, au lieu de } \xi, \eta, \zeta, \text{ pour retrouver les coordonnées } \xi, \eta, \zeta \text{ indiquées ci-dessus}\right)$. De ces équations on tire

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2},$$

$$x = \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2},\quad y = \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2},\quad z = \frac{\zeta}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2},$$

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 = \frac{(\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2 + (\zeta - \zeta')^2}{(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2)},$$

et l'équation

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{d^2 v}{dz^2} = 0$$

devient, pour les nouvelles coordonnées,

$$(a) \qquad \frac{d^2(\rho^{-1}v)}{d\xi^2} + \frac{d^2(\rho^{-1}v)}{d\eta^2} + \frac{d^2(\rho^{-1}v)}{d\zeta^2} = 0,$$

où

$$\rho = (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Pour exemple de l'emploi qu'on peut faire de ce système de coordonnées, supposons que la température d'un point (α, η, ζ) est une fonction donnée $F(\eta, \zeta)$ des coordonnées η, ζ de sa position sur la sphère α, et que la température d'un point (α_1, η, ζ) est $F_1(\eta, \zeta)$, et qu'il s'agit de déterminer la température permanente d'un point quelconque $P(\xi, \eta, \zeta)$ dans l'espace entre les sphères α, α_1 (c'est-à-dire l'espace entier pour lequel ξ a une valeur intermédiaire à α et α_1), que nous supposerons rempli d'un solide homogène. Suivant la méthode de Fourier, en observant que les valeurs

$$\begin{gathered}\cos m\eta.\cos \eta\zeta.\varepsilon^{h\xi},\\ \cos m\eta.\sin \eta\zeta.\varepsilon^{h\xi},\\ \ldots\ldots\ldots\end{gathered}$$

substituées pour $\rho^{-1}v$, sont des solutions particulières de l'équation (a), pourvu que $h^2 = m^2 + n^2$, je trouve, pour la solution du problème proposé,

$$(b) \qquad \left\{\begin{aligned} v = \frac{\rho}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dm\,dn \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d\eta'\,d\zeta'\,\frac{\cos m(\eta-\eta')\cos n(\zeta-\zeta')}{\varepsilon^{h(\alpha-\alpha_1)}-\varepsilon^{-h(\alpha-\alpha_1)}}\\ \times\left\{\begin{aligned} &\frac{F(\eta',\zeta')}{(\alpha^2+\eta'^2+\zeta'^2)^{\frac{1}{2}}}\left[\varepsilon^{h(\xi-\alpha_1)}-\varepsilon^{-h(\xi-\alpha_1)}\right]\\ -&\frac{F_1(\eta',\zeta')}{(\alpha_1^2+\eta'^2+\zeta'^2)^{\frac{1}{2}}}\left[\varepsilon^{h(\xi-\alpha)}-\varepsilon^{-h(\xi-\alpha)}\right]\end{aligned}\right\},\end{aligned}\right.$$

où ε est la base des logarithmes népériens, et

$$h = (m^2 + n^2)^{\frac{1}{2}}.$$

» Comme exemple de l'usage de cette formule, je ferai

$$F(\eta, \zeta) = F_1(\eta, \zeta) = V,$$

V étant une constante. Pour la réduction de l'expression, dans ce cas, j'observe que

$$(c)\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dp\,dq\,\frac{\cos mp \cos nq}{(\lambda+p^2+q^2)^{\frac{1}{2}}} = 2\pi\,\frac{\varepsilon^{-(m^2+n^2)^{\frac{1}{2}}\lambda^{\frac{1}{2}}}}{(m^2+n^2)^{\frac{1}{2}}}\cdot$$

d'où l'on déduit

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d\eta'\,d\zeta'\,\frac{\cos m(\eta-\eta')\cos(\zeta-\zeta')}{(\alpha^2+\eta'^2+\zeta'^2)^{\frac{1}{2}}} = 2\pi\cos m\eta.\cos n\zeta.\frac{\varepsilon^{-h\alpha}}{h},$$

et

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d\eta'\,d\zeta'\,\frac{\cos m(\eta-\eta')\cos n(\zeta-\zeta')}{(\alpha_1^2+\eta'^2+\zeta'^2)^{\frac{1}{2}}} = 2\pi\cos m\eta.\cos n\zeta.\frac{\varepsilon^{\mp h\alpha_1}}{h}.$$

le signe supérieur ou inférieur étant pris, dans la seconde expression, selon que α_1 est positif ou négatif (je prends α toujours positif et $> \alpha_1$). Ces réductions faites, l'expression (b) se trouve réduite à

$$(\mathrm{I})\qquad v = \frac{\mathrm{V}\rho}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dm\,dn\cos m\eta.\cos n\zeta.\frac{\varepsilon^{-(m^2+n^2)^{\frac{1}{2}}\xi}}{(m^2+n^2)^{\frac{1}{2}}},$$

et

$$(\mathrm{II})\qquad \begin{cases} v = \dfrac{\mathrm{V}\rho}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dm\,dn\cos m\eta.\cos n\zeta \\ \quad\times\dfrac{(\varepsilon^{-h\alpha_1}-\varepsilon^{h\alpha_1})\,\varepsilon^{h(\xi-\alpha)}+(\varepsilon^{-h\alpha}-\varepsilon^{h\alpha})\,\varepsilon^{-h(\xi-\alpha_1)}}{h\left[\varepsilon^{h(\alpha-\alpha_1)}-\varepsilon^{-h(\alpha-\alpha_1)}\right]}\end{cases}$$

suivant les deux cas. L'équation (I) se réduit à

$$v = \mathrm{V},$$

à cause de la valeur qu'on trouve pour l'intégrale définie qui y est contenue [*].

» L'expression pour v, dans le second cas, se trouve réduite en série convergente, si l'on substitue pour $\frac{1}{\varepsilon^{h(\alpha-\alpha_1)}-\varepsilon^{-h(\alpha-\alpha_1)}}$ la série

$$\varepsilon^{-h(\alpha-\alpha_1)}\left[1+\varepsilon^{-2h(\alpha-\alpha_1)}+\varepsilon^{-4h(\alpha-\alpha_1)}+\ldots\right],$$

[*] Les intégrales définies (c) et (I) sont des cas particuliers de deux intégrales multiples dont j'ai trouvé les valeurs en cherchant une démonstration de la formule (5), tome X

et puis, pour chaque terme, sa valeur, suivant la formule citée dans le cas (I). On trouve ainsi

$$
v = V\rho \left\{
\begin{array}{l}
\dfrac{1}{[(2\alpha-\xi)^2+\eta^2+\zeta^2]^{\frac{1}{2}}} + \dfrac{1}{[(\gamma+2\alpha-\xi)^2+\eta^2+\zeta^2]^{\frac{1}{2}}} + \dfrac{1}{[(2\gamma+2\alpha-\xi)^2+\eta^2+\zeta^2]^{\frac{1}{2}}} + \ldots\ldots \\
- \dfrac{1}{[(\gamma-\xi)^2+\eta^2+\zeta^2]^{\frac{1}{2}}} - \dfrac{1}{[(2\gamma-\xi)^2+\eta^2+\zeta^2]^{\frac{1}{2}}} - \dfrac{1}{[(3\gamma-\xi)^2+\eta^2+\zeta^2]^{\frac{1}{2}}} - \ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ \dfrac{1}{[(\xi-2\alpha_1)^2+\eta^2+\zeta^2]^{\frac{1}{2}}} + \dfrac{1}{[(\gamma+\xi-2\alpha_1)^2+\eta^2+\zeta^2]^{\frac{1}{2}}} + \dfrac{1}{[(2\gamma+\xi-2\alpha_1)^2+\eta^2+\zeta^2]^{\frac{1}{2}}} + \ldots \\
- \dfrac{1}{[(\gamma+\xi)^2+\eta^2+\zeta^2]^{\frac{1}{2}}} - \dfrac{1}{[(2\gamma+\xi)^2+\eta^2+\zeta^2]^{\frac{1}{2}}} - \dfrac{1}{[(3\gamma+\xi)^2+\eta^2+\zeta^2]^{\frac{1}{2}}} - \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
\right\},
$$

où

$$\gamma = 2(\alpha - \alpha_1).$$

De cette expression on déduit facilement la distribution d'électricité sur deux sphères qui se touchent.

» Le cas (I) correspond à deux sphères dont l'une, (α), est en dedans de l'autre, (α_1). Dans le cas (II), le solide considéré remplit l'espace entier en dehors des deux sphères, et la température est zéro à une distance infinie.

» Il y a une interprétation pour le nouveau système de coordon-

---

de votre Journal, page 141. J'ai trouvé, en effet,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\frac{dp_1dp_2\ldots dh_n\cos m_1p_1\cos m_2p_2\ldots}{(p_1^2+p_2^2+\ldots+p_n^2+u^2)^{\frac{n-1}{2}}} = \frac{(n-1)\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\,\frac{\varepsilon^{-(m_1^2+m_2^2+\ldots)^{\frac{1}{2}}u}}{(m_1^2+m_2^2+\ldots)^{\frac{1}{2}}},$$

et

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\frac{dm_1\,dm_2\ldots\cos m_1x_1\cos m_2x_2\ldots\varepsilon^{-(m_1^2+m_2^2+\ldots)^{\frac{1}{2}}u}}{(m_1^2+m_2^2\ldots)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{2^n\pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{(n-1)(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2+u^2)^{\frac{n-1}{2}}},$$

d'où l'on déduit immédiatement les intégrales citées.

nées (r, θ) dans un plan, qui est très-simple. En effet, soient A, A′ deux points fixes, et P un point quelconque dont il s'agit d'exprimer la position. Cela peut se faire au moyen de l'angle APA′, que j'appelle θ, et de la raison r de AP à AP′. Quand θ a une valeur constante, le lieu de P est un cercle qui passe par les points A, A′; et quand r a une valeur constante, le lieu de P est un cercle, dont le centre est dans le prolongement de AA′, d'un côté ou de l'autre, suivant que cette valeur est plus grande ou plus petite que l'unité, et qui a la propriété de couper à angle droit tout cercle décrit par les points A, A′.

» Posons maintenant, pour expliquer le second système,

$$r\cos\theta = \xi, \quad r\sin\theta = \eta.$$

Le lieu de P, quand ξ a une valeur constante, sera tel que, si l'on mène, de A, AD perpendiculaire à A′P, la raison DP : AP sera constante, et l'on trouve ainsi que ce lieu est un cercle qui touche en A′ une droite perpendiculaire à A′A; et l'on trouve semblablement que le lieu de P, quand η a une valeur constante, est un cercle qui touche A′A au point A′. »

« Knock, le 15 septembre 1846.

» . . . Depuis que je vous ai écrit la dernière fois, j'ai considéré le problème de la distribution d'électricité sur le segment d'une couche sphérique infiniment mince, fait par un plan, ce corps étant composé de matière conductrice, et j'ai trouvé, en expression finie, la solution complète, en supposant que le corps possède une quantité donnée d'électricité et que la distribution se fait sous l'influence de masses électriques données. J'avais l'intention de rédiger de suite pour vous un petit Mémoire sur ces recherches, mais j'ai rencontré quelque difficulté dans l'exposition de la méthode suivie, et comme je suis à présent très-occupé (les cours à Glasgow commencent le 1er novembre, et il me faudra beaucoup de préparation), il me faut différer cette tâche. Je me bornerai pour le moment aux énoncés de quelques-uns des résultats.

» Soit S le corps conducteur sur lequel il s'agit de déterminer la distribution. Pour premier cas, soit Q un point en dehors de S, sur la même surface sphérique dont S fait partie, et supposons que S soit mis en communication avec le sol par un fil conducteur infiniment mince (ainsi le potentiel dans S sera toujours zéro, quels que soient les corps électrisés qui en soient voisins). Il s'agit de déterminer la distribution d'électricité sur S sous l'influence d'une quantité donnée d'électricité négative Q, concentrée au point Q. Je démontre que l'intensité d'électricité a la même valeur aux points voisins des deux côtés de la couche S, et, en dénotant par σ cette valeur, pour un point quelconque P de S, je trouve

$$\sigma = \frac{Q}{2\pi^2} \cdot \frac{(s^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}}{(a^2 - r^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \Delta^2},$$

où a, s et r sont les distances du bord de S, du point Q et du point P, à un point C de S qu'on peut appeler son centre, et Δ est la distance entre Q et P. Il est remarquable que cette expression ne contient pas le rayon de la sphère dont S fait partie. En supposant que ce rayon soit infini, on a l'expression pour la distribution d'électricité sur un disque circulaire, sous l'influence d'un point dans son plan, qui est, en effet, la même que celle que Green a donnée pour ce cas.

» Pour trouver la distribution dans le cas de S isolé et électrisé, je remarque que, si la quantité d'électricité sur S est telle que le potentiel qui en résulte a une valeur donnée V, la distribution sur S sera la même que celle qui aurait lieu si S était situé dans l'intérieur d'une couche électrique qui produit le potentiel $-$V, S étant dans l'état d'un corps qui n'est pas isolé. On peut prendre pour cette couche une sphère concentrique avec celle dont S fait partie; en supposant l'excès du rayon de la première sphère sur le rayon de la seconde infiniment petit, on réduit le problème à la détermination de la distribution sur S, sous l'influence d'une distribution donnée d'électricité sur la sphère dont S fait partie, ce corps S n'étant pas isolé. Ainsi, par intégration, je déduis du résultat donné ci-dessus les expressions

$$\sigma = \frac{V}{2\pi^2 f}\left[\left(\frac{f^2 - a^2}{a^2 - r^2}\right)^{\frac{1}{2}} - \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{f^2 - a^2}{a^2 - r^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right] + \frac{1}{2\pi f},$$

$$\sigma' = \frac{V}{2\pi^2 f}\left[\left(\frac{f^2 - a^2}{a^2 - r^2}\right)^{\frac{1}{2}} - \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{f^2 - a^2}{a^2 - r^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

(où f est le diamètre de la sphère dont S fait partie), pour les intensités sur les deux côtés, convexe et concave, de S en un point P. »