JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

J.-A. SERRET

Mémoire sur les surfaces orthogonales

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 12 (1847), p. 241-254.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1847_1_12__241_0>

MÉMOIRE
SUR LES SURFACES ORTHOGONALES;

PAR M. J.-A. SERRET.

I.

Dans une Note, publiée au tome précédent de ce Recueil, M. Bouquet, professeur à la Faculté des Sciences de Lyon, s'est proposé de démontrer qu'*une famille de surfaces représentée par une équation, où entre un paramètre indéterminé, ne peut pas toujours être considérée comme l'une des familles d'un système triple de surfaces orthogonales*. Pour établir cette proposition, M. Bouquet emploie une marche assurément fort simple: il cite des exemples. Il me semble, toutefois, que la démonstration de ce fait résulte naturellement des conditions analytiques auxquelles satisfont les paramètres des trois surfaces qui composent tout système triple de surfaces orthogonales. Ces trois paramètres vérifient, en effet, les trois équations aux différentielles partielles

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\rho}{dx}\frac{d\mu}{dx}+\frac{d\rho}{dy}\frac{d\mu}{dy}+\frac{d\rho}{dz}\frac{d\mu}{dz}=0,\\ &\frac{d\rho}{dx}\frac{d\nu}{dx}+\frac{d\rho}{dy}\frac{d\nu}{dy}+\frac{d\rho}{dz}\frac{d\nu}{dz}=0,\\ &\frac{d\mu}{dx}\frac{d\nu}{dx}+\frac{d\mu}{dy}\frac{d\nu}{dy}+\frac{d\mu}{dz}\frac{d\nu}{dz}=0;\end{aligned}\right.$$

et, par suite, les quantités ρ, μ, ν semblent déterminées en x, y et z, sauf les arbitraires qui entrent nécessairement dans leur composition.

D'ailleurs, si l'on différentie les équations (1) par rapport à x, y, z, autant que possible, et de manière à n'avoir de dérivées que jusqu'à l'ordre p inclusivement, on aura, en comptant les équations (1), un nombre d'équations marqué par $\frac{p(p+1)(p+2)}{2}$, et le nombre des dérivées des quantités μ et ν sera $\frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{3} - 2$; pour que l'élimination de ces dérivées soit possible, il faut que le premier nombre surpasse le second, ce qui donne

$$p = 6 \quad \text{ou} \quad > 6.$$

Si l'on prend $p = 6$, on aura alors cent soixante-huit équations entre lequelles on pourra éliminer les dérivées de μ et ν au nombre de cent soixante-six, et il restera deux équations aux différentielles partielles du sixième ordre, auxquelles devra satisfaire le paramètre ρ de toute surface susceptible de faire partie d'un système triple. Cette dernière circonstance de deux conditions auxquelles le paramètre ρ est assujetti, permet de penser que le nombre des surfaces susceptibles de faire partie d'un système triple pourrait bien être assez limité, et la détermination d'une classe de pareils systèmes n'en présente que plus d'intérêt.

Je me propose ici de faire connaître quelques nouveaux systèmes triples de surfaces orthogonales.

II.

Je ferai voir qu'on peut intégrer les équations (1) si l'on assujettit l'un des paramètres, ρ par exemple, à être de la forme

$$\rho = X + Y + Z, \tag{2}$$

X, Y, Z étant trois fonctions indéterminées dont la première ne contient que x, la seconde y et la troisième z. M. Bouquet, dans son Mémoire, a montré que ces fonctions devaient satisfaire à une certaine équation de condition, pour que les surfaces représentées par l'équation (2) pussent faire partie d'un système triple; mais la marche indirecte qu'il a suivie ne lui a pas permis de déterminer les surfaces conjuguées, dans le cas où elles existent.

Dans l'hypothèse où nous nous plaçons, les équations (1) deviennent, en dénotant les dérivées à la manière de Lagrange,

$$(3)\quad \begin{cases} X'\dfrac{d\mu}{dx} + Y'\dfrac{d\mu}{dy} + Z'\dfrac{d\mu}{dz} = 0, \\ X'\dfrac{d\nu}{dx} + Y'\dfrac{d\nu}{dy} + Z'\dfrac{d\nu}{dz} = 0, \\ \dfrac{d\mu}{dx}\dfrac{d\nu}{dx} + \dfrac{d\mu}{dy}\dfrac{d\nu}{dy} + \dfrac{d\mu}{dz}\dfrac{d\nu}{dz} = 0. \end{cases}$$

Or, si l'on fait

$$(4)\quad \begin{cases} \displaystyle\int\frac{dx}{X'} - \int\frac{dy}{Y'} = \alpha, \\ \displaystyle\int\frac{dx}{X'} - \int\frac{dz}{Z'} = \beta, \end{cases}$$

les quantités μ et ν, définies par les deux premières des équations (3), seront des fonctions des deux nouvelles variables α et β; par suite, la troisième équation (3) deviendra

$$(5)\quad \left(\frac{d\mu}{d\alpha} + \frac{d\mu}{d\beta}\right)\left(\frac{d\nu}{d\alpha} + \frac{d\nu}{d\beta}\right) + \frac{X'^2}{Y'^2}\frac{d\mu}{d\alpha}\frac{d\nu}{d\alpha} + \frac{X'^2}{Z'^2}\frac{d\mu}{d\beta}\frac{d\nu}{d\beta} = 0.$$

En outre, comme α et β sont des fonctions de x, y et z, on peut considérer y et z comme des fonctions de α, β et x; en sorte qu'il restera dans l'équation (5) un paramètre indéterminé x, et que cette équation devra être satisfaite indépendamment de x. Les quantités μ et ν devront donc vérifier non-seulement l'équation (5), mais toutes celles que l'on en déduit par la différentiation relative à x seul.

En différentiant une première fois par rapport à x, et remarquant que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y'}{X'}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{Z'}{X'},$$

on aura

$$(6)\quad \frac{X'' - Y''}{Y'^2}\frac{d\mu}{d\alpha}\frac{d\nu}{d\alpha} + \frac{X'' - Z''}{Z'^2}\frac{d\mu}{d\beta}\frac{d\nu}{d\beta} = 0,$$

à moins cependant que X' ne soit nul; mais alors l'équation (2) représenterait des surfaces cylindriques, et nous faisons abstraction de ce cas. Si l'on différentie de nouveau, on aura

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{X'X''' - Y'Y''' - 2Y''(X'' - Y'')}{Y'^2}\dfrac{d\mu}{d\alpha}\dfrac{d\nu}{d\alpha} \\ + \dfrac{X'X''' - Z'Z''' - 2Z''(X'' - Z'')}{Z'^2}\dfrac{d\mu}{d\beta}\dfrac{d\nu}{d\beta} = 0. \end{cases}$$

La comparaison des équations (6) et (7) fournit la suivante :

$$(8)\qquad \begin{cases} X'X'''(Y''-Z'')+Y'Y'''(Z''-X'')+Z'Z'''(X''-Y'') \\ +2(Y''-Z'')(Z''-X'')(X''-Y'')=0, \end{cases}$$

laquelle exprime la condition pour que les surfaces représentées par l'équation (2) aient des conjuguées orthogonales; c'est la même que M. Bouquet a obtenue par un moyen tout à fait différent, et dont il a déduit la démonstration du théorème qu'il avait en vue.

III.

On aperçoit assez facilement que l'équation (8) résulte de l'élimination des quantités a et b entre les trois suivantes :

$$(9)\qquad \begin{cases} X'X'''-2(X''-a)(X''-b)=0, \\ Y'Y'''-2(Y''-a)(Y''-b)=0, \\ Z'Z'''-2(Z''-a)(Z''-b)=0; \end{cases}$$

les valeurs de a et b, tirées de deux de ces équations, des deux premières par exemple, ne peuvent contenir z. Pour une raison semblable, elles ne pourront contenir ni y ni x; elles sont donc consantes. D'où résulte ce théorème : *Pour que les surfaces* (2) *fassent partie d'un système triple, il faut et il suffit que les fonctions* X, Y *et* Z *satisfassent aux équations* (9) *qui sont aux différentielles ordinaires, et du troisième ordre, et qui contiennent deux constantes arbitraires a et b.*

Il n'y a d'exception que dans le cas où deux des trois quantités X'', Y'', Z'' se réduisent à une même constante; si, par exemple,

$$X''=Y''=2c,$$

les deux premières des équations (9) se réduisent à

$$(c-a)(c-b)=0;$$

on doit donc faire l'une des quantités a et b égale à c, mais on peut prendre pour l'autre une fonction arbitraire de z, en sorte que la troisième équation (9) donne pour Z une fonction arbitraire de z. C'est ce que l'on aperçoit de suite à l'inspection de l'équation (8), qui est satisfaite quel que soit Z, si l'on a

$$X'' = Y'' = 2c.$$

Ce cas particulier ne présente rien de remarquable; deux des trois familles se composent de surfaces de révolution autour de l'un des axes, et la troisième, des plans passant par cet axe: ainsi l'on a pour les trois familles

$$\rho = c(x^2 + y^2) + Z,$$
$$\mu = (x^2 + y^2)\, e^{-4c\int \frac{dz}{Z'}},$$
$$\nu = \frac{x}{y}.$$

Les équations (9) s'intègrent aisément quels que soient a et b; nous examinerons d'abord le cas où ces deux constantes sont nulles.

IV.

On a alors

$$X'X''' - 2X''^2 = 0,$$
$$Y'Y''' - 2Y''^2 = 0,$$
$$Z'Z''' - 2Z''^2 = 0.$$

On tire de la première

$$X = X_0 + \mathrm{l}(x - x_0)^m,$$

X_0, x_0 et m étant les trois constantes naissant de l'intégration; mais on peut négliger les deux premières, dont la première se fondra dans ρ, et dont la seconde ne produit qu'une modification dans la position des axes: on aura donc

$$X = \mathrm{l}(x^m), \quad Y = \mathrm{l}(y^n), \quad Z = \mathrm{l}(z^p),$$

et l'équation (2) sera alors

$$(2\ bis) \quad \rho = \mathrm{l}(x^m) + \mathrm{l}(y^n) + \mathrm{l}(z^p), \quad \text{ou, si l'on veut,} \quad \rho = x^m y^n z^p.$$

Les équations (4) sont, dans ce cas,

$$(4\ bis) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{x^2}{2m} - \frac{y^2}{2n} &= \alpha, \\ \frac{x^2}{2m} - \frac{z^2}{2p} &= \beta, \end{aligned} \right.$$

et l'équation (5),

$$(5\ bis)\quad \begin{cases} \left(\frac{d\mu}{d\alpha}+\frac{d\mu}{d\beta}\right)\left(\frac{d\nu}{d\alpha}+\frac{d\nu}{d\beta}\right)+\left(\frac{m}{n}-\frac{2m^2\alpha}{nx^2}\right)\frac{d\mu}{d\alpha}\frac{d\nu}{d\alpha} \\ \qquad +\left(\frac{m}{p}-\frac{2m^2\beta}{px^2}\right)\frac{d\mu}{d\beta}\frac{d\nu}{d\beta}=0; \end{cases}$$

et cette équation ayant lieu quel que soit x, on aura

$$(10)\quad \begin{cases} \left(1+\frac{m}{n}\right)\frac{d\mu}{d\alpha}\frac{d\nu}{d\alpha}+\left(1+\frac{m}{p}\right)\frac{d\mu}{d\beta}\frac{d\nu}{d\beta}+\frac{d\mu}{d\beta}\frac{d\nu}{d\alpha}+\frac{d\mu}{d\alpha}\frac{d\nu}{d\beta}=0, \\ \frac{\alpha}{n}\frac{d\mu}{d\alpha}\frac{d\nu}{d\alpha}+\frac{\beta}{p}\frac{d\mu}{d\beta}\frac{d\nu}{d\beta}=0. \end{cases}$$

A l'aide de ces deux équations on pourra déterminer μ et ν en fonction de α et β, et, par conséquent, en fonction de x, y et z. Si l'on fait

$$(11)\qquad \frac{d\mu}{d\alpha}=-\mathrm{M}\frac{d\mu}{d\beta},\quad \frac{d\nu}{d\alpha}=-\mathrm{N}\frac{d\nu}{d\beta},$$

on aura

$$\left(1+\frac{m}{n}\right)\mathrm{MN}+\left(1+\frac{m}{p}\right)-(\mathrm{M}+\mathrm{N})=0,\qquad \frac{\alpha}{n}\mathrm{MN}+\frac{\beta}{p}=0,$$

d'où il suit que M et N seront les racines de l'équation du second degré

$$(12)\qquad p\alpha\mathrm{M}^2+[(m+n)\beta-(m+p)\alpha]\mathrm{M}-n\beta=0.$$

M et N étant connus, on aura μ et ν à l'aide des équations (11); mais il résulte de la méthode d'intégration pour les équations linéaires aux différentielles partielles, qu'il suffira de remplacer M par $\frac{d\beta}{d\alpha}$, puis, après avoir intégré l'équation (12), d'égaler à des fonctions arbitraires de μ et ν, ou simplement à μ et à ν, les deux valeurs que l'on déduira pour la constante arbitraire naissant de l'intégration. En résumé, les paramètres des surfaces conjuguées des surfaces (2) sont les deux valeurs de la constante arbitraire qui se trouve dans l'intégrale de l'équation différentielle

$$(13)\qquad p\alpha\, d\beta^2+[(m+n)\beta-(m+p)\alpha]\,d\alpha\, d\beta-n\beta\, d\alpha^2=0.$$

Cette équation est homogène par rapport à α, β, $d\alpha$ et $d\beta$: on pourra donc aisément l'intégrer; d'ailleurs, en la résolvant par rapport à β, et conservant M à la place de $\frac{d\beta}{d\alpha}$, on a

$$\beta = \frac{pM^2 - (m+p)M}{n - (m+n)M}\alpha,$$

et, sous cette forme, on pourra encore l'intégrer par une méthode connue.

Ce calcul ne présente aucune difficulté, il est seulement un peu compliqué; il se simplifie beaucoup, si l'on suppose

$$p = n = -m = 1,$$

auquel cas la première famille du système triple se compose de paraboloïdes hyperboliques ayant pour équation

$$\rho = \frac{yz}{x}.$$

L'équation (13) devient, dans ce cas,

$$\frac{d\alpha^2}{\alpha} = \frac{d\beta^2}{\beta},$$

dont l'intégrale est

$$\sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\beta} = \text{une constante};$$

mais, dans ce cas, les équations (4 *bis*) donnent

$$x^2 + y^2 = -2\alpha, \quad x^2 + z^2 = -2\beta:$$

on aura donc pour les équations des trois familles de surfaces orthogonales,

$$(14)\qquad \begin{cases} \rho = \dfrac{yz}{x}, \\ \mu = \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x^2+z^2}, \\ \nu = \sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{x^2+z^2}. \end{cases}$$

Voilà donc un système nouveau et fort simple de surfaces orthogonales ou de surfaces qui se coupent mutuellement suivant leurs lignes de courbure. Les deux paramètres μ et ν, ou plutôt leurs carrés, sont les racines d'une même équation algébrique du second degré; ou, ce qui revient au même, les surfaces des familles μ et ν sont représentées par la même équation du quatrième degré

$$(15)\qquad (z^2 - y^2)^2 - 2\mu^2(z^2 + y^2 + 2x^2) + \mu^4 = 0.$$

Chacune des surfaces que représente l'équation (15) se compose d'une nappe fermée et de plusieurs nappes non fermées; en sorte que le triple système que nous considérons se compose : 1° de paraboloïdes hyperboliques dont les paraboles principales sont égales; 2° des nappes fermées de l'équation (15); 3° des nappes non fermées de la même équation. En d'autres termes, les deux familles de surfaces représentées par l'équation (15) et la première des équations (14) jouissent de cette propriété remarquable, que l'une des surfaces de l'une quelconque des deux familles est coupée par toutes les surfaces de l'autre famille, suivant *ses deux systèmes de lignes de courbure* [*].

On trouverait une multitude d'autres systèmes de surfaces orthogonales, toutes algébriques, en intégrant généralement l'équation (13). Nous nous bornerons à examiner le cas de $m = n = p = 1$: alors la première famille est représentée par l'équation

$$\rho = xyz,$$

et l'équation (13) se réduit à

$$\beta = \frac{M^2 - 2M}{1 - 2M}\alpha,$$

en conservant M à la place de $\frac{d\beta}{d\alpha}$; on en déduit, par la différentiation et à cause de $d\beta = M d\alpha$,

$$3\frac{d\alpha}{\alpha} = -2\frac{dM}{M} - 2\frac{dM}{M-1} + 3\frac{2dM}{2M-1};$$

et, par suite,

$$\frac{\alpha}{c} = \frac{2M-1}{(M^2-M)^{\frac{2}{3}}}, \quad \frac{\beta}{c} = \frac{2M-M^2}{(M^2-M)^{\frac{2}{3}}},$$

c étant la constante qui naît de l'intégration. Pour éliminer M, je fais la combinaison suivante :

$$\frac{(\alpha+\beta)(\beta-2\alpha)(\alpha-2\beta)}{c^3} = \frac{2M^6 - 6M^5 - 15M^4 + 40M^3 - 15M^2 - 6M + 2}{(M^2-M)^2},$$

---

[*] On déduit de là ce théorème de géométrie : *Dans un paraboloïde hyperbolique, dont les paraboles principales sont égales, la somme ou la différence des distances de chaque point d'une même ligne de courbure à deux génératrices rectilignes fixes est constante.*

puis celle-ci,

$$\frac{\sqrt{\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2}}{c}=\frac{M^2-M+1}{(M^2-M)^{\frac{2}{3}}};$$

d'où

$$\frac{(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)^{\frac{3}{2}}}{c^3}=\frac{M^6-3M^5+6M^4-7M^3+6M^2-3M+1}{(M^2-M)^2},$$

et enfin

$$\frac{(\alpha+\beta)(\beta-2\alpha)(\alpha-2\beta)-2(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)^{\frac{3}{2}}}{c^3}=-27.$$

On pourra donc prendre, pour les valeurs de μ et ν,

$$\begin{aligned}\mu&=8(\alpha+\beta)(\beta-2\alpha)(\alpha-2\beta)-2(4\alpha^2-4\alpha\beta+4\beta^2)^{\frac{3}{2}},\\ \nu&=8(\alpha+\beta)(\beta-2\alpha)(\alpha-2\beta)+2(4\alpha^2-4\alpha\beta+4\beta^2)^{\frac{3}{2}}.\end{aligned}$$

D'ailleurs,

$$2\alpha=x^2-y^2,\quad 2\beta=x^2-z^2;$$

on aura donc, pour les équations des trois familles de ce nouveau système,

$$(16)\quad\left\{\begin{aligned}&\rho=xyz,\\ &\mu=(2x^2-y^2-z^2)(2y^2-z^2-x^2)(2z^2-x^2-y^2)\\ &\quad-2(x^4+y^4+z^4-x^2y^2-x^2z^2-y^2z^2)^{\frac{3}{2}},\\ &\nu=(2x^2-y^2-z^2)(2y^2-z^2-x^2)(2z^2-x^2-y^2)\\ &\quad+2(x^4+y^4+z^4-x^2y^2-x^2z^2-y^2z^2)^{\frac{3}{2}}.\end{aligned}\right.$$

Ce système conduit à des remarques semblables à celles qui ont été faites au sujet du système (14).

V.

Supposons maintenant que l'une des constantes a et b du paragraphe III, a par exemple, ne soit pas nulle; on aura alors, pour déterminer les fonctions X, Y, Z, trois équations semblables, dont la première sera

$$X'X'''-2X''(X''-a)=0:$$

on trouve, en intégrant,

$$X = X_0 - \frac{1}{m^2 a} \,\mathrm{l} \cos ma(x - x_0),$$

X_0, x_0 et m désignant les constantes naissant de l'intégration; on peut supposer nulles les deux premières, et écrire simplement

$$X = -\frac{1}{m^2 a} \,\mathrm{l} \cos max, \quad Y = -\frac{1}{n^2 a} \,\mathrm{l} \cos nay, \quad Z = -\frac{1}{p^2 a} \,\mathrm{l} \cos paz;$$

et l'on pourra prendre, pour valeur de ρ,

$$(2\ ter) \qquad \rho = (\cos max)^{\frac{1}{m^2}} (\cos nay)^{\frac{1}{n^2}} (\cos paz)^{\frac{1}{p^2}}.$$

D'ailleurs,

$$X' = \frac{1}{m} \operatorname{tang} max, \quad Y' = \frac{1}{n} \operatorname{tang} nay, \quad Z' = \frac{1}{p} \operatorname{tang} paz;$$

et si l'on met $-\frac{1}{a} \,\mathrm{l}\, \alpha$, $-\frac{1}{a} \,\mathrm{l}\, \beta$, à la place de α et β, les équations (4) deviendront

$$(4\ ter) \qquad \begin{cases} \sin nay = \alpha \sin max, \\ \sin paz = \beta \sin max; \end{cases}$$

et l'équation (5), où l'on effectue le même changement, se réduit à

$$\cos^2 max \left[(m^2+n^2)\alpha^2 \frac{d\mu}{d\alpha}\frac{d\nu}{d\alpha} + (m^2+p^2)\beta^2 \frac{d\mu}{d\beta}\frac{d\nu}{d\beta} + m^2 \alpha\beta \left(\frac{d\mu}{d\alpha}\frac{d\nu}{d\beta} + \frac{d\mu}{d\beta}\frac{d\nu}{d\alpha} \right) \right]$$
$$+ n^2(1-\alpha^2)\frac{d\mu}{d\alpha}\frac{d\nu}{d\alpha} + p^2(1-\beta^2)\frac{d\mu}{d\beta}\frac{d\nu}{d\beta} = 0.$$

Cette équation se décompose en deux, et si l'on fait, comme précédemment,

$$\frac{d\mu}{d\alpha} = -M \frac{d\mu}{d\beta}, \quad \frac{d\nu}{d\alpha} = -N \frac{d\nu}{d\beta},$$

on aura

$$(m^2+n^2)\alpha^2 MN + (m^2+p^2)\beta^2 - m^2 \alpha\beta(M+N),$$
$$n^2(1-\alpha^2)MN + p^2(1-\beta^2) = 0,$$

et l'on voit que M et N seront les deux racines de l'équation du second degré

$$(17)\ n^2(1-\alpha^2)M^2 - \frac{n^2(m^2+p^2)\beta^2(1-\alpha^2) - p^2(m^2+n^2)\alpha^2(1-\beta^2)}{m^2\alpha\beta} M - p^2(1-\beta^2) = 0;$$

et si, dans cette équation (17), on considère M comme représentant $\frac{d\beta}{d\alpha}$, les deux valeurs de la constante arbitraire qui se trouve dans son intégrale seront les valeurs des paramètres μ et ν des surfaces conjuguées et orthogonales de celles que représente l'équation (2 *ter*).

Cette équation se simplifie beaucoup si l'on pose

$$m = 1, \quad n = p = \sqrt{-1};$$

elle devient, en effet, en mettant $\frac{d\beta}{d\alpha}$ à la place de M,

$$\frac{d\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} \pm \frac{d\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = 0,$$

d'où, en intégrant,

$$\alpha\beta \pm \sqrt{1-\alpha^2}\,\sqrt{1-\beta^2} = \text{constante}:$$

on pourra donc poser

$$\mu = \alpha\beta + \sqrt{1-\alpha^2}\,\sqrt{1-\beta^2},$$
$$\nu = \alpha\beta - \sqrt{1-\alpha^2}\,\sqrt{1-\beta^2},$$

et l'on aura finalement, pour les valeurs de ρ, μ, ν, exprimées en x, y, z,

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} \rho &= \frac{\cos ay\sqrt{-1}\,\cos az\sqrt{-1}}{\cos ax},\\ \mu &= \frac{\sin ay\sqrt{-1}\,\sin az\sqrt{-1} + \sqrt{\sin^2 ax - \sin^2 ay\sqrt{-1}}\,\sqrt{\sin^2 ax - \sin^2 az\sqrt{-1}}}{\sin^2 ax},\\ \nu &= \frac{\sin ay\sqrt{-1}\,\sin az\sqrt{-1} - \sqrt{\sin^2 ax - \sin^2 ay\sqrt{-1}}\,\sqrt{\sin^2 ax - \sin^2 az\sqrt{-1}}}{\sin^2 ax}. \end{aligned}\right.$$

équations où les imaginaires n'entrent qu'en apparence, et disparaîtraient en remplaçant $\cos ay\sqrt{-1}$ et $\sin ay\sqrt{-1}$ par leurs valeurs $\frac{e^{ay}+e^{-ay}}{2}$, $\frac{e^{ay}-e^{-ay}}{2\sqrt{-1}}$.

Voilà encore un nouveau système triple de surfaces orthogonales, dont la forme conduit à des remarques semblables à celles qui ont été faites précédemment; il est le plus simple parmi tous ceux qui correspondent aux formes des fonctions X, Y, Z, que nous avons considérées dans ce paragraphe. On en obtiendrait d'ailleurs une multitude d'autres, en intégrant complétement l'équation (17); mais les résultats auxquels on est conduit sont extrêmement compliqués.

VI.

Supposons, en troisième lieu, que les constantes a et b du paragraphe III soient égales et de signes contraires; on aura, pour déterminer X, Y, Z, trois équations semblables, dont la première sera

$$X'X''' - 2(X''^2 - a^2) = 0;$$

la fonction X déterminée par cette équation est une fonction elliptique identique à la fonction inverse de celle qui représente l'arc de lemniscate : on trouve, en effet, très-simplement, pour équation intégrale de la précédente,

$$x - x_0 = \frac{1}{\sqrt{ma}} \int^{m(X-X_0)} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin 2\theta}},$$

x_0, X_0 et m étant les trois constantes qui naissent de l'intégration : on peut supposer nulles les deux premières, sans altérer la généralité des résultats; et, si l'on pose

$$\int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\sin 2\theta}} = \varepsilon \quad \text{et} \quad \theta = \lambda(\varepsilon),$$

on aura, pour les valeurs de X, Y, Z,

$$X = \frac{1}{m}\lambda(x\sqrt{ma}), \qquad Y = \frac{1}{n}\lambda(y\sqrt{na}), \qquad Z = \frac{1}{p}\lambda(z\sqrt{pa}),$$

et pour l'équation de la première famille du système triple de surfaces orthogonales qui en résultent,

$$(2\ quater) \qquad \rho = \frac{1}{m}\lambda(x\sqrt{ma}) + \frac{1}{n}\lambda(y\sqrt{na}) + \frac{1}{p}\lambda(z\sqrt{pa}).$$

Les équations (4) deviennent alors, en introduisant X, Y, Z à la place de x, y et z, et mettant $-\frac{1}{2}\,\mathrm{l}\,\alpha$, $-\frac{1}{2}\,\mathrm{l}\,\beta$ au lieu de α et β,

$$\operatorname{tang} n\mathrm{Y} = \alpha \operatorname{tang} m\mathrm{X},$$
$$\operatorname{tang} p\mathrm{Z} = \beta \operatorname{tang} m\mathrm{X};$$

alors μ et ν seront fonctions de α et β, et en se rappelant que

$$m\mathrm{X}' = \sqrt{ma}\sin 2m\mathrm{X}, \quad n\mathrm{Y}' = \sqrt{na}\sin 2n\mathrm{Y}, \quad p\mathrm{Z}' = \sqrt{pa}\sin 2p\mathrm{Z},$$

d'où

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{-2\alpha\sqrt{ma}}{\sqrt{\sin 2m\mathrm{X}}}, \qquad \frac{d\alpha}{dy} = \frac{2\alpha\sqrt{na}}{\sqrt{\sin 2n\mathrm{Y}}},$$
$$\frac{d\beta}{dx} = \frac{-2\beta\sqrt{ma}}{\sqrt{\sin 2m\mathrm{X}}}, \qquad \frac{d\beta}{dz} = \frac{2\beta\sqrt{pa}}{\sqrt{\sin 2p\mathrm{Z}}},$$

on trouvera facilement une équation de la forme

$$\mathrm{P} + \mathrm{Q}\operatorname{tang}^2 m\mathrm{X} = 0.$$

P et Q ne contenant que α et β, celle-ci se décomposera en deux autres qui seront, toutes réductions faites,

$$(m\alpha^2 + n\alpha)\frac{d\mu}{d\alpha}\frac{d\nu}{d\alpha} + (m\beta^2 + p\beta)\frac{d\mu}{d\beta}\frac{d\nu}{d\beta} + m\alpha\beta\left(\frac{d\mu}{d\alpha}\frac{d\nu}{d\beta} + \frac{d\nu}{d\alpha}\frac{d\mu}{d\beta}\right) = 0,$$
$$(m\alpha^2 + n\alpha^3)\frac{d\mu}{d\alpha}\frac{d\nu}{d\alpha} + (m\beta^2 + p\beta^3)\frac{d\mu}{d\beta}\frac{d\nu}{d\beta} + m\alpha\beta\left(\frac{d\mu}{d\alpha}\frac{d\nu}{d\beta} + \frac{d\nu}{d\alpha}\frac{d\mu}{d\beta}\right) = 0;$$

en posant

$$\frac{d\mu}{d\alpha} = -\mathrm{M}\frac{d\mu}{d\beta}, \qquad \frac{d\nu}{d\alpha} = -\mathrm{N}\frac{d\nu}{d\beta},$$

on trouvera que M et N sont les racines d'une équation du second degré, que l'on devra intégrer en y considérant M comme représentant le quotient des différentielles $d\beta$ et $d\alpha$; ensuite, on égalera à μ et ν les deux valeurs de la constante arbitraire résultant de cette intégration : mais les calculs qu'il faut exécuter, même dans les cas les plus simples, sont trop compliqués pour offrir quelque intérêt.

VII.

Les cas que nous venons d'examiner sont les plus remarquables; on peut d'ailleurs intégrer, dans tous les cas, les équations (9), et en déduire l'équation de la famille de surfaces

$$\rho = X + Y + Z,$$

susceptible d'avoir des conjuguées orthogonales.

Si l'on considère, en effet, la première des équations (9)

$$X'X''' - 2(X'' - a)(X'' - b) = 0,$$

on en déduit, en intégrant une première fois, et désignant par m une constante arbitraire,

$$X' = m(X'' - a)^{\frac{a}{2(a-b)}}(X'' - b)^{\frac{b}{2(b-a)}};$$

par suite, on pourra exprimer X et x à l'aide de X'', de la manière suivante :

$$(19)\quad \begin{cases} x - x_0 = \dfrac{m}{2}\displaystyle\int (X'' - a)^{\frac{a}{2(a-b)} - 1}(X'' - b)^{\frac{b}{2(b-a)} - 1}\,dX'', \\ X - X_0 = \dfrac{m^2}{2}\displaystyle\int (X'' - a)^{\frac{a}{a-b} - 1}(X'' - b)^{\frac{b}{b-a} - 1}\,dX''; \end{cases}$$

on pourra donner aux deux constantes x_0 et X_0 telles valeurs déterminées que l'on voudra, et si l'on désigne par $F(x, m)$ la valeur de X, on aura

$$X = F(x, m), \quad Y = F(y, n), \quad Z = F(z, p),$$

et l'équation

$$(20)\qquad \rho = F(x, m) + F(y, n) + F(z, p),$$

où m, n, p désignent trois constantes arbitraires, comprend toutes les familles *de la forme que nous considérons* et qui possèdent des conjuguées orthogonales. Cette équation (20) comprend en particulier les équations (2) des paragraphes IV, V et VI. Il faut pourtant en excepter, ainsi que nous l'avons déjà remarqué, les surfaces cylindriques ou de révolution.