JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

A. RISPAL

Note sur une propriété mécanique du cercle

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 12 (1847), p. 225-230.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1847_1_12__225_0>

NOTE

SUR UNE PROPRIÉTÉ MÉCANIQUE DU CERCLE;

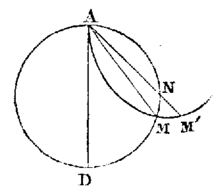
Par M. A. RISPAL,
Élève de l'École Normale.

Dans le tome IX de ce Journal, page 116, M. O. Bonnet a obtenu une propriété mécanique nouvelle de la lemniscate hyperbolique, en résolvant le problème suivant: « Trouver une courbe AMM′, telle » que les arcs AM soient parcourus dans le même temps que les cordes » correspondantes par des mobiles partant du point A sans vitesse » initiale et soumis à l'action d'une force dirigée vers un centre » fixe et proportionnelle à la distance. » Il démontre, en effet, que la courbe demandée est une lemniscate hyperbolique, ce qu'on ne savait auparavant que pour le cas particulier où le centre d'action est situé à l'infini, c'est-à-dire pour le cas d'une force constante en grandeur et en direction, dont M. Serret s'était occupé dans le même volume, page 28, en rappelant un Mémoire antérieur de N. Fuss [*]. La méthode de Fuss est géométrique et rattache la propriété citée de la lemniscate à une propriété du cercle. Nous allons d'abord montrer que cette méthode peut être étendue au cas général traité par M. Bonnet; nous donnerons ensuite, et ce sera l'objet principal de cette Note, quelques développements sur la propriété du cercle qui lui sert de base.

---

[*] M. Serret nous a fait observer que le titre qu'il a donné à sa Note: *Sur une propriété de la lemniscate découverte par N. Fuss,* renferme une inexactitude. Et, en effet, on peut voir au tome IX des *Mémoires de l'Académie de Saint-Pétersbourg* (c'est le volume pour 1819-1820, la date 1824 que M. Serret cite est celle de la publication), que Fuss, en démontrant cette propriété, ne s'en attribue pas l'invention; il dit qu'elle a été trouvée par le géomètre italien Saladini.

Par le point M quelconque de la courbe cherchée AMM′ et par le point donné A, traçons un cercle dont le diamètre AD soit situé sur



la droite qui va du point A au centre d'attraction et qui est évidemment la première tangente de la courbe AMM′. Considérons dans cette courbe AMM′ deux cordes infiniment voisines AM, AM′ dont la première lui est commune avec le cercle AMD et dont la seconde coupe ce cercle en N. D'après la définition de la courbe, les arcs AM et AM′ doivent être parcourus dans le même temps que les cordes correspondantes; or, par une propriété connue du cercle, les deux cordes AM et AN sont parcourues dans le même temps si le mobile, parti de A sans vitesse initiale, est soumis à l'action de la pesanteur ou d'une force proportionnelle à la distance et émanant d'un centre situé sur AD.

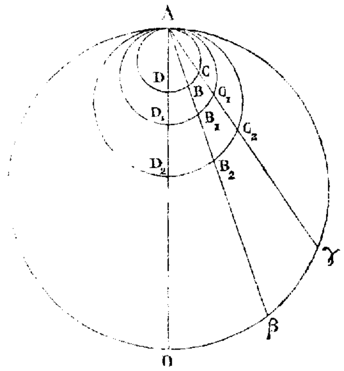
Donc les deux lignes MM′ et NM′ sont parcourues dans le même temps: or les vitesses en M et en N ne diffèrent que d'un infiniment petit, et ces deux espaces MM′, NM′ sont assez petits pour qu'on puisse supposer que la vitesse y reste constante; donc $MM' = NM'$. Ainsi le triangle infinitésimal NM′M est isocèle; mais l'angle $\widehat{MNM'}$, qui a pour mesure la moitié de l'arc AN, est le complément de l'angle $DAN = \theta$.

Donc l'angle $M' = 2\theta$, et l'équation différentielle de la courbe est, par suite,

$$\frac{r\,d\theta}{dr} = \operatorname{tang} 2\theta.$$

C'est précisément l'équation différentielle d'une lemniscate hyperbolique dont l'axe focal fait avec AD un angle de 45 degrés.

Nous nous proposons à présent de trouver quelles sont toutes les lois d'attraction vers le centre fixe qui laissent subsister la propriété du cercle (ou si l'on veut des cordes du cercle) sur laquelle est fondée la démonstration précédente. Nous allons en premier lieu faire cette recherche d'une façon géométrique, puis nous indiquerons l'analyse qui nous a guidé.



Soit O le centre d'attraction, et soient différents cercles AD, AD_1, AD_2,... passant tous en A et ayant leurs centres sur AO.

Considérons deux cordes AB, AC.

D'après l'énoncé de la question, les lignes AB, AC; AB_1, AC_1, AB_2, AC_2,... sont parcourues dans le même temps; donc aussi les segments AB, AC; BB_1, CC_1; B_1B_2, C_1C_2,... sont parcourus en temps égaux.

Il en résulte qu'en supposant les segments B_1B_2, C_1C_2, par exemple, infiniment petits, les vitesses v, v' aux points correspondants B_1, C_1 sont proportionnelles à ces segments, ou bien (d'après une propriété des figures semblables) aux cordes $A\beta$, $A\gamma$ que l'on obtient en décrivant le cercle qui passe en O, ou bien encore aux portions $B_1\beta$, $C_1\gamma$, qui restent à parcourir pour arriver en β et en γ.

En effet, les deux espaces B_1B_2, C_1C_2 étant infiniment petits, on peut supposer que les vitesses restent constantes pendant le temps dt employé à les parcourir. On peut donc écrire

$$B_1B_2 = vt, \quad C_1C_2 = v't;$$

d'où

$$\frac{v}{v'} = \frac{B_1B_2}{C_1C_2} = \frac{A\beta}{A\gamma} = \frac{B_1\beta}{C_1\gamma}.$$

Ainsi en B_1 et C_1, et de même en B_2 et C_2,..., les vitesses sont proportionnelles aux espaces qui restent à parcourir; donc aussi les forces sont proportionnelles à ces espaces: car puisqu'en deux points correspondants on a toujours

$$v = mv',$$

on aura aussi

$$\frac{dv}{dt} = m\,\frac{dv'}{dt}.$$

Ainsi les choses se passent comme si les deux mobiles étaient attirés vers les points β et γ par des forces proportionnelles à la distance.

Si donc on désigne par R et R_1 les forces en B_1 et C_1 émanées du point O, et par r, r_1 les rayons vecteurs correspondants, on aura

$$\frac{R\cos\widehat{OB_1\beta}}{R_1\cos\widehat{OC_1\gamma}} = \frac{r\cos\widehat{OB_1\beta}}{r_1\cos\widehat{OC_1\gamma}};$$

donc

$$\frac{R}{R_1} = \frac{r}{r_1},$$

ce qui montre que l'attraction émanée du point O doit s'exercer proportionnellement à la distance pour que les cercles jouissent de la propriété énoncée.

Si l'on considère le cercle passant en O, les points arriveront en β et en γ avec la vitesse maximum; si le cercle est au-dessous de O, la vitesse décroîtra après le passage du mobile au point γ, et il se fera autour du centre O de petites oscillations. Enfin, si le centre du cercle est en O, le mobile arrivera au bas de la corde avec une vitesse nulle; puis il remontera jusqu'en A, puis reviendra, et continuera ainsi d'osciller indéfiniment, et toujours dans des temps égaux, autour du centre d'attraction. Si le centre du cercle descendait au-dessous du point O, il y aurait encore des oscillations; mais on voit aisément que les mobiles ne pourraient parcourir les cordes dans toute leur étendue, puisque leurs vitesses seraient éteintes avant qu'ils ne fussent arrivés à l'extrémité de ces cordes.

Passons maintenant à la démonstration analytique du même théorème.

Soient h la distance du point A au centre d'attraction, ω l'angle d'une corde avec la verticale, s la longueur d'une corde, r le rayon vecteur correspondant, et R la force. Le temps de la descente a pour expression

$$(1) \qquad t = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{K - 2\int R\,dr}},$$

où K est une constante, et à laquelle il faut joindre l'équation

$$(2) \qquad r^2 - h^2 = s^2 - 2hs\cos\omega.$$

Il faut dans l'intégrale remplacer r par sa valeur en fonction de ω, puis exprimer que celle-ci est indépendante de ω; de plus, comme les extrémités des cordes se trouvent sur les mêmes cercles, s est une fonction de l'angle ω exprimée par l'équation

$$s = a\cos\omega,$$

dans laquelle a, qui représente le diamètre du cercle correspondant, doit rester constante.

Les deux équations précédentes deviennent ainsi

$$(3) \qquad t = \int_0^a \frac{da.\cos\omega}{\sqrt{K - 2\int R\,dr}},$$

$$(4) \qquad r^2 - h^2 = (a^2 - 2ah)\cos^2\omega.$$

L'équation (4), différentiée par rapport à ω, en y laissant a constante, donne

$$rdr = -(a^2 - 2ah)\cos\omega\sin\omega\,d\omega,$$

d'où l'on déduit

$$(5) \qquad \frac{r\,dr}{h^2 - r^2} = \operatorname{tang}\omega\,d\omega.$$

L'équation (3) doit aussi être différentiée par rapport à ω, puis sa différentielle doit être égalée à zéro: ce qui donne, en ayant égard à l'équation (5),

$$\int_0^a \frac{r(K - 2\int R\,dr) + (r^2 - h^2)R}{(r^2 - h^2)(K - 2\int R\,dr)^{\frac{3}{2}}}\,dr\,da\cos\omega = 0,$$

et, comme cette intégrale doit être toujours nulle, indépendamment de ω et quelle que soit la limite a, il faut égaler l'élément à zéro.

Donc

$$rK - 2r\int R\,dr + (r^2 - h^2)R = 0,$$

d'où l'on déduit

$$K\,dr - 2dr\int R\,dr + (r^2 - h^2)\,dR = 0:$$

puis, si l'on multiplie la première par dr, la seconde par r, et si l'on retranche, il vient

$$Rdr - rdR = 0,$$

d'où

$$R = cr.$$

Ainsi l'attraction est proportionnelle à la distance.

On trouve aisément pour le temps de la descente

$$t = \frac{1}{\sqrt{c}}\left(\frac{\pi}{2} + \text{arc sin}\,\frac{a-h}{h}\right);$$

quantité qui n'a une valeur réelle qu'autant que a est moindre que le double de h; car autrement le sinus serait plus grand que l'unité.

Dans le cas où $a=2h$, on a, comme nous l'avons vu précédemment, une suite indéfinie d'oscillations; la durée de chacune d'elles est égale à $\frac{\pi}{2\sqrt{c}}$.