JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

B. AMIOT

Note sur quelques points de la théorie analytique des surfaces

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 12 (1847), p. 129-135.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1847_1_12__129_0>

NOTE

SUR QUELQUES POINTS

DE LA THÉORIE ANALYTIQUE DES SURFACES;

PAR M. B. AMIOT.

§ I.

Monge, dans son *Application de l'Analyse à la Théorie des Surfaces et des Courbes* (*voyez* 3ᵉ édition, § XIX), démontre que : *La surface de la sphère est la seule qui jouisse de la propriété d'avoir pour chacun de ses points les centres de ses deux courbures réunis, et dont l'aire ne soit pas nulle.* Pour cela, il exprime que l'équation du deuxième degré

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} R^2(rt-s^2)+R\sqrt{1+p^2+q^2}\,[(1+p^2)t-2pqs+(1+q^2)r] \\ \qquad\qquad +(1+p^2+q^2)^2=0, \end{array}\right.$$

entre les rayons de courbure principaux en un même point d'une surface quelconque, a ses deux racines égales et de même signe. Il obtient ainsi l'équation aux différences partielles secondes de la surface cherchée

$$(2)\quad [(1+p^2)t-2pqs+(1+q^2)r]^2-4(rt-s^2)(1+p^2+q^2)=0.$$

Pour intégrer cette équation, Monge distingue deux cas :

1°. Le cas particulier où l'on aurait les trois équations de condition :

$$(1+q^2)s-pqt=0,\quad (1+p^2)s-pqr=0,\quad (1+q^2)r-(1+p^2)t=0,$$

dont l'une quelconque est une conséquence des deux autres ;

2°. Le cas général, c'est-à-dire celui où l'on suppose que les différences partielles p, q, r, s et t ne satisfont pas à deux au moins des relations précédentes.

Or, le cas général rentre dans le cas particulier, puisque l'équation (2) *se décompose nécessairement* dans les deux suivantes :

$$(3)\qquad r(q^2+1)-t(p^2+1)=0 \quad \text{et} \quad s(p^2+1)-pqr=0.$$

Pour le démontrer plus simplement qu'on ne le fait d'ordinaire, je pose

$$r(q^2+1)-t(p^2+1)=\mathrm{X} \quad \text{et} \quad s(p^2+1)-pqr=\mathrm{Y};$$

d'où je déduis

$$t=\frac{r(q^2+1)-\mathrm{X}}{p^2+1} \quad \text{et} \quad s=\frac{\mathrm{Y}+pqr}{p^2+1}.$$

En portant ces deux valeurs de s et t dans l'équation (2), et nommant V le premier membre, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(1+p^2)^2=&[2r(1+p^2+q^2)-2pq\mathrm{Y}-(1+p^2)\mathrm{X}]^2\\&-4(1+p^2+q^2)[r^2(1+p^2+q^2)-r\mathrm{X}(p^2+1)-\mathrm{Y}^2-2pqr\mathrm{Y}];\end{aligned}$$

d'où, en développant et réduisant, on déduit aisément

$$\mathrm{V}(1+p^2)=\mathrm{X}^2+4\mathrm{Y}^2+(p\mathrm{X}+2q\mathrm{Y})^2.$$

Par conséquent, V ne peut être égal à zéro sans que l'on ait

$$\mathrm{X}=0, \quad \mathrm{Y}=0,$$

et réciproquement; l'équation (2) équivaut donc au système des deux équations (3). Telle est la véritable explication de ce que M. Charles Dupin appelle *une espèce de paradoxe* (voyez *Développements de Géométrie*, page 129), à savoir : *Comment la coexistence des deux équations* (3) *ne dit rien de plus particulier que l'existence de la seule équation* (2) *entre les mêmes variables.*

Les équations (3) peuvent se mettre sous la forme connue

$$\frac{r}{p^2+1}=\frac{s}{pq}=\frac{t}{q^2+1},$$

ou bien sous la suivante :

$$\frac{d\left(\dfrac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)}{dx}=0, \quad \frac{d\left(\dfrac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)}{dy}=0,$$

et conduisent à l'intégrale générale

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=c^2.$$

(*Voyez* Traité de Monge, déjà cité, page 175.)

Par conséquent, la sphère est la seule surface représentée par l'équation (2), et il devient inutile d'intégrer cette équation elle-même, puisqu'elle ne peut rien dire de plus que les deux équations (3), dans lesquelles elle se décompose nécessairement.

§ II.

L'équation générale des deux lignes de courbure qui se croisent en chaque point d'une surface quelconque

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned}&\left(\frac{dy}{dx}\right)^2[s(1+q^2)-pqt]+\frac{dy}{dx}[r(1+q^2)-t(1+p^2)]\\&\qquad\qquad\qquad+rpq-s(1+q^2)=0\end{aligned}\right.$$

devient

$$(5)\qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2[pqX+Y(q^2+1)]+\frac{dy}{dx}(p^2+1)X-(p^2+1)Y=0,$$

lorsqu'on y remplace s et t par leurs valeurs en X et Y employées au paragraphe précédent. On déduit, de l'équation (5),

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{X(p^2+1)\pm\sqrt{(p^2+1)[X^2+4Y^2+(pX+2qY)^2]}}{Y(q^2+1)+pqX};$$

ce qui montre, comme on le sait d'ailleurs, que les deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$ fournies par l'équation (4) sont toujours réelles, et que le radical qu'elles renferment est identique avec celui qui affecte les valeurs des deux rayons de courbures principaux, fournies par l'équation (1).

Les ombilics d'une surface quelconque étant définis par la condition qu'en chaque point de cette espèce la surface est susceptible d'être osculée par une sphère, ou, ce qui revient au même, a ses rayons de courbure principaux égaux et de même signe, on voit que les ombilics d'une surface quelconque sont déterminés par les deux équations (3), jointes à celle de la surface

$$F(x, y, z) = 0.$$

Observons d'abord que si les deux équations (3) sont distinctes et compatibles avec celle de la surface, celle-ci n'admet que des points *ombilicaux isolés*. Mais si les deux équations (3) sont conséquences l'une de l'autre, il ne reste plus alors qu'une seule équation qui, jointe à celle de la surface, détermine généralement une *ligne* de points ombilicaux. Dans tous les cas, en chaque point ombilical, l'équation des lignes de courbure devient indéterminée, puisque les coordonnées d'un tel point satisfont toujours aux deux équations

$$X = 0, \quad Y = 0.$$

Il peut arriver, toutefois, que les lignes de courbure de la surface qui passent par un ombilic soient en nombre infini ou bien en nombre limité. De là résulte entre les points ombilicaux une distinction essentielle sur laquelle nous allons donner quelques développements.

§ III.

Pour cela supposons que, dans l'équation (4), on ait remplacé p, q, r, s et t par leurs valeurs en x, y, z déduites de l'équation de la surface; admettons, en outre, qu'on ait éliminé z au moyen de la même équation : alors l'équation générale des lignes de courbure sera de la forme

$$(6) \qquad A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + B\left(\frac{dy}{dx}\right) + C = 0,$$

A, B, C étant des fonctions de x et de y seulement.

Cela posé, pour les valeurs $x = x_1$, $y = y_1$, déduites des équations

$$X = 0, \quad Y = 0,$$

on a

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0.$$

Mais faisons

$$y = y_1 + \delta y \quad \text{et} \quad x = x_1 + \delta x, \quad \text{avec} \quad \delta y = y'\delta x.$$

ce qui revient à passer, sur la surface, de l'ombilic à un point infiniment voisin en suivant une direction déterminée par $y' = \frac{\delta y}{\delta x}$. En substituant ces valeurs dans l'équation (6), on obtient

$$(7)\qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\left(\frac{dA}{dx} + \frac{dA}{dy}y'\right) + \frac{dy}{dx}\left(\frac{dB}{dx} + \frac{dB}{dy}y'\right) + \frac{dC}{dx} + \frac{dC}{dy}y' = 0.$$

Supposons d'abord que cette équation soit déterminée quand on y fait $x = x_1$ et $y = y_1$. On aura deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$, fonctions de y', qui déterminent les directions des deux lignes de courbure de la surface pour le point infiniment voisin de l'ombilic où l'on s'est placé. Pour que l'une de ces deux lignes de courbure passe par l'ombilic, il faut et il suffit que l'une des valeurs de $\frac{dy}{dx}$, fournies par l'équation (7), soit égale à celle de y' qui détermine la direction suivie sur la surface. Cela posé, faisons $y' = \frac{dy}{dx}$ dans l'équation (7), et supposons qu'elle devienne identique; c'est que son premier membre est divisible par $\frac{dy}{dx} - y'$, et, par conséquent, quelle que soit la direction suivant laquelle on s'éloigne de l'ombilic, on suit toujours une ligne de courbure de la surface. Donc, *dans ce cas, il passe par l'ombilic une infinité de lignes de courbure.*

Supposons, en second lieu, que, par l'hypothèse $y' = \frac{dy}{dx}$, l'équation (7) ne devienne point identique et soit généralement de la forme

$$(8)\qquad Py'^3 + Qy'^2 + Ry' + S = 0.$$

Chaque valeur réelle de y' qu'elle fournira, donnera une direction suivant laquelle on peut marcher sur la surface, à partir de l'ombilic, en suivant une ligne de courbure. Donc *le nombre des racines réelles de l'équation* (8) *indique combien il passe de lignes de courbure à l'ombilic considéré.*

Supposons ensuite que l'équation (7) devienne elle-même indéterminée, quel que soit y', quand on y fait $x = x_1$ et $y = y_1$; en y faisant de nouveau

$$x = x_1 + \delta x \quad \text{et} \quad y = y_1 + \delta y, \quad \text{avec} \quad \delta y = y'\delta x.$$

on obtient

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\left[\frac{d^2A}{dx^2}+2\frac{d^2A}{dx\,dy}y'+\frac{d^2A}{dy^2}y'^2\right]+\frac{dy}{dx}\left[\frac{d^2B}{dx^2}+2\frac{d^2B}{dx\,dy}y'+\frac{d^2B}{dy^2}y'^2\right]\\ &\qquad+\left[\frac{d^2C}{dx^2}+2\frac{d^2C}{dx\,dy}y'+\frac{d^2C}{dy^2}y'^2\right]=0,\end{aligned}\right.$$

équation à laquelle on peut appliquer le raisonnement que nous venons de faire sur l'équation (8). Nous remarquerons seulement que si l'équation (9), qui devient du quatrième degré par l'hypothèse $\frac{dy}{dx}=y'$, avait ses quatre racines imaginaires, il ne pourrait passer à l'ombilic aucune ligne de courbure de la surface.

Si l'équation (9) était elle-même indéterminée, on y ferait encore $x=x_1+\delta x$, $y=y_1+\delta y$, et ainsi de suite.

§ IV.

Appliquons cette théorie générale à l'ellipsoïde. On trouve pour l'équation des lignes de courbure,

$$(C)\quad \left\{\begin{aligned} &a^2(b^2-c^2)xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\\ &+[b^2(a^2-c^2)x^2-a^2(b^2-c^2)y^2-a^2b^2(a^2-b^2)]\frac{dy}{dx}\\ &+b^2(a^2-c^2)xy=0,\end{aligned}\right.$$

et pour les équations des ombilics,

$$b^2(a^2-c^2)xy=0,\quad b^2(a^2-c^2)x^2-a^2(b^2-c^2)y^2-a^2b^2(a^2-b^2)=0.$$

Soient

$$y=0\quad\text{et}\quad x=\pm a\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}};$$

ce qui suppose $a>b$ et $b>c$, pour que la valeur correspondante de z soit réelle.

En différentiant l'équation (C), on trouve

$$(C')\quad \left\{\begin{aligned} &a^2(b^2-c^2)(xy'+y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+[b^2(a^2-c^2)2x-a^2(b^2-c^2)2yy']\frac{dy}{dx}\\ &\qquad-b^2(a^2-c^2)(xy'+y)=0,\end{aligned}\right.$$

équation qui, pour

$$y = 0 \quad \text{et} \quad x = \pm a\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}},$$

devient

$$a^2(b^2-c^2)y'\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2b^2(a^2-c^2)\frac{dy}{dx} - b^2(a^2-c^2)y' = 0,$$

et pour

$$y' = \frac{dy}{dx},$$

on a

$$a^2(b^2-c^2)y'^3 + b^2(a^2-c^2)y' = 0,$$

équation qui n'admet que la seule racine réelle $y' = 0$. Donc la section de l'ellipsoïde par le plan principal du plus grand et du plus petit axe est la seule direction des lignes de courbure passant par les ombilics lorsque l'ellipsoïde n'est pas de révolution.

Mais supposons $a^2 = b^2$ avec $xy = 0$; on a alors, pour déterminer les ombilics,

$$x = 0, \quad y = 0,$$

et l'équation (C′) est elle-même indéterminée. En la différentiant de nouveau, on trouve

$$(\mathrm{C}'') \quad \left\{ \begin{aligned} & a^2 y'(b^2-c^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + [b^2(a^2-c^2) - a^2 y'^2(b^2-c^2)]\frac{dy}{dx} \\ & \qquad - b^2 y'(a^2-c^2) = 0, \end{aligned} \right.$$

équation qui peut être mise sous la forme

$$\left[a^2(b^2-c^2)y'\frac{dy}{dx} + b^2(a^2-c^2)\right]\left(\frac{dy}{dx} - y'\right) = 0.$$

On voit qu'elle est vérifiée par $\frac{dy}{dx} = y'$, quel que soit y'. Donc il passe par chaque ombilic une infinité de lignes de courbure.