JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. BERTRAND

Note sur le problème des tautochrones

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 12 (1847), p. 121-128.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1847_1_12__121_0>

NOTE

SUR LE PROBLÈME DES TAUTOCRONES;

PAR M. J. BERTRAND.

Le problème des tautochrones, résolu d'abord par Huygens et Newton pour le cas d'un point situé dans le vide ou dans un milieu qui résiste proportionnellement à la vitesse, le fut ensuite par Euler [*] et Jean Bernoulli, dans l'hypothèse d'une résistance proportionnelle au carré de la vitesse, et par Fontaine, en ajoutant même un terme proportionnel à la simple vitesse. Dans les *Mémoires de Berlin* pour 1765, Lagrange se proposa la question plus générale de déterminer quelle est la force nécessaire pour produire le tautochronisme en considérant cette force comme une fonction quelconque de la vitesse et de la position du mobile. La formule à l'aide de laquelle Lagrange résout ce problème parut assez importante à d'Alembert pour qu'il en cherchât une démonstration qui se trouve dans les *Mémoires de Berlin* à la suite de celle de Lagrange. Lagrange lui-même est revenu sur cette formule dans les *Mémoires de Berlin* pour 1770, et la présente, je crois, comme beaucoup plus générale qu'elle ne l'est en effet :

« Ayant, dit-il, envisagé la question des tautochrones sous un point » de vue un peu plus général qu'on ne l'avait fait avant moi, je suis

[*] Euler est le premier géomètre qui ait cherché les tautochrones dans un milieu dont la résistance est une fonction de la vitesse autre que la première puissance; son premier travail, sur ce sujet, date de 1726 (*Actes de Leipsig*). La solution qu'il donne est défectueuse, comme il l'a reconnu lui-même quelques années plus tard en traitant de nouveau la même question dans le tome IV des *Commentaires de Saint-Pétersbourg* (1729). Le Mémoire de Jean Bernoulli, imprimé dans le Recueil de l'Académie de Paris pour 1730, est postérieur d'une année, quoiqu'il paraisse composé antérieurement à la publication de celui d'Euler.

» parvenu à une formule générale et très-simple qui renferme non-
» seulement tous les résultats déjà connus, mais encore une infinité
» d'autres.... Mon travail n'a pas été jugé si favorablement par
» M. Fontaine, qui vient de m'attaquer dans le volume de l'Académie
» de Paris pour 1768. Je m'attendais avec raison à trouver dans ce
» Mémoire des objections solides et dignes de cet illustre adversaire;
» mais j'ai été bien surpris de n'y voir que quelques expressions peu
» obligeantes, sans aucune raison, bonne ou mauvaise. Comme la
» seule lecture de son Mémoire et du mien peut suffire à me mettre à
» couvert de ses critiques, je les passerai entièrement sous silence. »

Et, en effet, Lagrange, dans ce nouveau Mémoire, ne répond nullement aux objections faites par Fontaine, qui, il faut le dire, étaient formulées d'une manière obscure et sans développement, mais dont la plus importante au moins me paraît très-fondée. Je me propose de faire voir, dans cette Note, que loin de donner la solution générale du problème qu'il s'était proposé, Lagrange n'en a traité qu'un cas très-particulier, et que, si l'on cherche à appliquer sa formule à la recherche de la courbe tautochrone pour une loi donnée de la résistance du milieu, elle ne pourra servir que dans le cas traité antérieurement par Euler et Jean Bernoulli. Ainsi on ne peut pas regarder comme générale la démonstration que Lagrange a donnée du théorème suivant qu'il déduit de sa solution :

« Toute courbe qui est tautochrone dans une hypothèse quel-
» conque de force et de résistance, l'est encore si l'on suppose la ré-
» sistance augmentée d'un terme proportionnel à la vitesse. »

I.

Le problème que se propose Lagrange dans le Mémoire de 1765 est énoncé par lui dans les termes suivants :

« Quelque profonde et quelque ingénieuse que soit la théorie des
» tautochrones, elle laisse beaucoup à désirer. Lorsqu'il n'y a point
» de résistance, et que, par conséquent, la force accélératrice est
» indépendante de la vitesse, on sait depuis longtemps que cette
» force doit être proportionnelle à l'espace qui reste à parcourir. Mais
» quelle est, en général, la force nécessaire pour produire le tauto-

» chronisme, en la regardant comme une fonction quelconque de » l'espace et de la vitesse? Voilà le problème qu'il faut résoudre » pour avoir une théorie générale et complète des tautochrones. » M'étant occupé de ce problème, voici la solution que j'en ai trou- » vée, qui est, ce me semble, générale et nouvelle. »

On peut remarquer que le problème, énoncé de cette manière, est essentiellement indéterminé, et que la solution devrait renfermer une fonction arbitraire de deux variables.

Considérons, en effet, une fonction arbitraire du temps t et d'une ligne a, et supposons que cette fonction $\varphi(t, a)$ satisfasse à la double condition $\varphi = 0$ pour $t = t_1$ et $\frac{d\varphi}{dt} = 0$ pour $t = 0$; il est évident qu'en représentant le mouvement rectiligne d'un point par la formule

$$x = \varphi(t, a), \tag{1}$$

les différents mobiles dont le mouvement serait défini par cette formule dans laquelle on donnerait à a toutes les valeurs possibles, parviendraient dans le même temps au point pour lequel on a

$$x = 0.$$

Or la force nécessaire pour produire un pareil mouvement peut s'exprimer facilement au moyen de la position et de la vitesse : on a, en effet, en désignant cette force par p et la vitesse par v,

$$v = \frac{d\varphi}{dt}, \tag{2}$$

$$p = \frac{d^2\varphi}{dt^2}; \tag{3}$$

et si, entre les trois formules (1), (2) et (3), on élimine t et a, on aura la solution la plus générale du problème proposé par Lagrange.

J'ajouterai que cette élimination, fût-elle même possible sous une forme simple, n'avancerait pas beaucoup la solution de la question des tautochrones, qui exigerait que l'on pût déterminer la manière dont la force doit varier avec la position, lorsque la résistance du milieu est donnée en fonction de la vitesse.

II.

La solution que je viens d'indiquer en quelques mots contient une fonction arbitraire de deux variables; celle de Lagrange contient seulement deux fonctions arbitraires d'une seule variable : aussi n'est-elle pas, à beaucoup près, aussi générale qu'on a semblé le croire. Je commencerai par en donner une démonstration qui me semble beaucoup plus simple que celles qui avaient été proposées par d'Alembert et Lagrange lui-même.

Soit

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{P} = \psi(x, v)$$

une force accélératrice sous l'influence de laquelle un mobile, parcourant une droite donnée en partant sans vitesse d'un point de cette droite, ait un mouvement tel, que sa distance à l'extrémité soit exprimée par une certaine fonction du temps, en sorte que l'on ait

$$x = \varphi(t);$$

si l'on voulait que x fût exprimé par la formule

$$x = m\varphi(t),$$

m étant une constante, il suffirait de rendre la force m fois plus grande à chaque instant, et, comme la vitesse augmenterait dans le même rapport, il faudrait, pour que la force fût représentée par la formule (1), que l'on eût

$$mp = \psi(mx,\ mv),$$

et, par suite, d'après la théorie des fonctions homogènes,

$$\text{(2)} \qquad p = x\psi\left(\frac{v}{x}\right):$$

c'est là une première formule, qui donne une solution particulière du problème des tautochrones. Avant d'aller plus loin, je ferai remarquer que, tout en renfermant une fonction arbitraire, cette formule ne pourrait résoudre le problème que dans un très-petit nombre de cas. Supposons, en effet, que l'on demande la force nécessaire pour produire le tautochronisme dans un milieu qui résiste suivant une fonction de la vitesse; il faudra chercher à déterminer la fonction ψ de telle façon que

$$p = x\psi\left(\frac{v}{x}\right) = \mathrm{F}(x) - f(v),$$

ce qui exige

$$\frac{d^2 p}{dx\,dv} = 0;$$

d'où l'on tire immédiatement

$$\psi''\left(\frac{v}{x}\right) = 0,$$

en sorte que

$$\psi\left(\frac{v}{x}\right) = \mathrm{A} + \mathrm{B}\frac{v}{x}$$

et

$$p = \mathrm{A}v + \mathrm{B}x;$$

c'est la solution connue de Newton, et la formule (2) ne peut en donner d'autres.

III.

Pour déduire de cette formule (2) le résultat de Lagrange, posons

$$x = \theta(u),$$

et cherchons ce que doit devenir la force p, pour que la distance du mobile à l'origine, au bout du temps t, soit u et non plus x. Il est évident qu'il y aura encore tautochronisme, pourvu que l'on ait $\theta(u) = 0$ pour $u = 0$; or la vitesse v_1 du nouveau mobile sera

$$v_1 = \frac{du}{dt} = \frac{v}{\left(\frac{d\theta}{du}\right)},$$

et, en différentiant, nous aurons, pour la force capable de produire le mouvement,

$$\mathrm{F} = \frac{dv_1}{dt} = \frac{\frac{dv}{dt}}{\frac{d\theta}{du}} - \frac{v^2\frac{d^2\theta}{du^2}}{\left(\frac{d\theta}{du}\right)^3}.$$

En remplaçant $\frac{dv}{dt}$ par sa valeur $x\psi\left(\frac{v}{x}\right)$, et v par $v_1\frac{d\theta}{du}$, il vient

$$F = \frac{\theta(u)\psi\left[\frac{\theta(u)}{v_1\frac{d\theta}{du}}\right]}{\frac{d\theta}{du}} - \frac{v_1^2\frac{d^2\theta}{du^2}}{\frac{d\theta}{du}};$$

nous ferons coïncider cette formule avec celle de Lagrange, en posant

$$\frac{\frac{d\theta}{du}}{\theta} = \frac{1}{\xi},$$

d'où l'on tire sans difficulté, par la simple différentiation,

$$\frac{\frac{d^2\theta}{du^2}}{\theta} - \frac{\left(\frac{d\theta}{du}\right)^2}{\theta^2} = -\frac{1}{\xi^2}\frac{d\xi}{du},$$

et, en multipliant par $\xi = \frac{\theta}{\frac{d\theta}{du}}$,

$$\frac{\frac{d^2\theta}{du^2}}{\frac{d\theta}{du}} - \frac{1}{\xi} = -\frac{1}{\xi}\frac{d\xi}{du};$$

ce qui met la valeur de F sous la forme

$$F = \xi\varphi\left(\frac{v_1}{\xi}\right) - \frac{v_1^2}{\xi}\frac{d\xi}{du} + \frac{v_1^2}{\xi}.$$

Mettons v_1^2 en facteur, et posons

$$1 + \varphi\left(\frac{v_1}{\xi}\right)\frac{\xi}{v_1} = \varpi\left(\frac{v_1}{\xi}\right),$$

il vient

$$(3) \qquad F = v_1^2\left[\frac{\varpi\left(\frac{v_1}{\xi}\right)}{\xi} - \frac{1}{\xi}\frac{d\xi}{du}\right];$$

ξ désigne ici une fonction quelconque de a.

IV.

La formule que nous venons d'obtenir est précisément celle de Lagrange; cherchons maintenant suivant quelle fonction de la vitesse doit varier la résistance du milieu, pour que cette formule puisse être appliquée. On verra, comme plus haut, que, pour cela, on doit avoir

$$\frac{d^2 F}{du\,dv} = 0,$$

ou, ce qui revient au même, puisque ξ est fonction de u,

$$\frac{d^2 F}{dv\,d\xi} = 0;$$

remarquons que l'on peut poser

$$\frac{1}{\xi}\frac{d\xi}{du} = \chi(\xi),$$
$$\frac{v}{\xi}\varpi\left(\frac{v}{\xi}\right) = f\frac{v}{\xi},$$

en sorte que l'expression de F devient

$$F = vf\left(\frac{v}{\xi}\right) - v^2\chi(\xi),$$

et la dérivée seconde

$$\frac{d^2 F}{dv\,d\xi} = -\left[\frac{2v}{\xi^2}f'\left(\frac{v}{\xi}\right) + \frac{v^2}{\xi}f''\left(\frac{v}{\xi}\right) + 2v\chi'(\xi)\right],$$

ou, en égalant à zéro après avoir supprimé le facteur $2v$ et multiplié par ξ^2,

$$0 = 2f'\left(\frac{v}{\xi}\right) + \frac{v}{\xi}f''\left(\frac{v}{\xi}\right) + 2\xi^2\chi'(\xi),$$

ou, en posant $\frac{v}{\xi} = z,$

$$2f'(z) + zf''(z) = -2\xi^2\chi'(\xi);$$

z et ξ pouvant être considérés comme variables indépendantes, cette équation exige évidemment que l'on ait

$$2f'(z) + zf''(z) = m,$$
$$2\xi^2\chi'(\xi) = -m,$$

m étant une constante. La première de ces équations nous donne

$$zf = \frac{mz^2}{2} + bz + c, \quad f = \frac{mz}{2} + b + \frac{c}{z},$$

et la seconde

$$\chi(\xi) = \frac{m}{2\xi} + c';$$

d'où l'on conclut

$$F = v\left(\frac{m}{2}\frac{v}{\xi} + b + \frac{c\xi}{v}\right) - \frac{mv^2}{2\xi} - c'v^2,$$

ou, en réduisant,

$$F = bv - c'v^2 + c\xi.$$

Or nous avons fait

$$\chi(\xi) = \frac{1}{\xi}\frac{d\xi}{du},$$

donc

$$\frac{m}{2\xi} + c' = \frac{1}{\xi}\frac{d\xi}{du},$$

$$du = \frac{\xi}{\frac{m}{2} + c'\xi},$$

$$u = \frac{1}{c'}\, lk\left(\frac{m}{2} + c'\xi\right),$$

$$kc'\xi = e^{c'u} - \frac{km}{2}.$$

On déterminera k par la condition $\xi = 0$ pour $u = 0$.

En sorte que la fonction F se compose d'un terme fonction de la vitesse et de la forme $bv - c'v^2$, et d'un terme fonction de la position du mobile, représenté par la valeur de $c\xi$; c'est-à-dire que la seule loi de résistance du milieu dans laquelle la formule de Lagrange puisse servir à déterminer la force, est précisément celle à laquelle s'appliquait la méthode de Fontaine [*].

---

[*] Il n'a été question, dans cet article, que du mouvement en ligne droite; mais on sait qu'un mouvement curviligne quelconque peut être assimilé à un mouvement rectiligne, pourvu que l'on remplace la force accélératrice par sa composante, suivant la tangente à la trajectoire.