

JOURNAL  
DE  
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

---

BESGE

Sur l'équation  $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{y}{(e^t + e^{-t})^2}$

*Journal de mathématiques pures et appliquées 1<sup>re</sup> série*, tome 11 (1846), p. 96.

[http://www.numdam.org/item?id=JMPA\\_1846\\_1\\_11\\_\\_96\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1846_1_11__96_0)

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc  
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

---

SUR L'ÉQUATION  $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{y}{(e^t + e^{-t})^2}$ ;

PAR M. BESGE.

---

Cette équation a une forme assez remarquable pour qu'il soit peut-être bon de faire observer qu'elle s'intègre à l'aide des fonctions elliptiques.

Posons, en effet,

$$t = \log \frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

et prenons, pour variable indépendante,  $x$  au lieu de  $t$ ; en développant les calculs, il viendra

$$(x - x^3) \frac{d^2y}{dx^2} + (1 - 3x^2) \frac{dy}{dx} - xy = 0.$$

C'est précisément l'équation de laquelle dépendent les fonctions elliptiques complètes de première espèce dont le module est  $x$  ou  $\sqrt{1-x^2}$ . On a donc

$$y = A \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{1-x^2 \sin^2 \alpha}} + B \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{1-(1-x^2) \sin^2 \alpha}},$$

A et B étant deux constantes arbitraires. En changeant  $t$  en  $at$  ou en  $at\sqrt{-1}$ , on voit qu'on intégrerait aussi les équations

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{a^2y}{(e^{at} + e^{-at})^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{a^2y}{4 \cos^2 at}.$$


---