JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

BESGE

Sur l'équation $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{y}{(e^t+e^{-t})^2}$

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 11 (1846), p. 96.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1846_1_11__96_0>

SUR L'ÉQUATION $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{y}{(e^t + e^{-t})^2}$;

PAR M. BESGE.

Cette équation a une forme assez remarquable pour qu'il soit peut-être bon de faire observer qu'elle s'intègre à l'aide des fonctions elliptiques.

Posons, en effet,

$$t = \log \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}},$$

et prenons, pour variable indépendante, x au lieu de t; en développant les calculs, il viendra

$$(x - x^3) \frac{d^2y}{dx^2} + (1 - 3x^2) \frac{dy}{dx} - xy = 0.$$

C'est précisément l'équation de laquelle dépendent les fonctions elliptiques complètes de première espèce dont le module est x ou $\sqrt{1 - x^2}$. On a donc

$$y = A \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2 \alpha}} + B \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - (1 - x^2) \sin^2 \alpha}},$$

A et B étant deux constantes arbitraires. En changeant t en at ou en $at\sqrt{-1}$, on voit qu'on intégrerait aussi les équations

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{a^2 y}{(e^{at} + e^{-at})^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{a^2 y}{4 \cos^2 at}.$$