JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

WILLIAM ROBERTS

Note sur l'évaluation de l'aire de la surface nommée, dans l'optique, surface d'élasticité

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 11 (1846), p. 81-86.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1846_1_11__81_0>

NOTE

Sur l'évaluation de l'aire de la surface nommée, dans l'optique, surface d'élasticité ;

PAR M. WILLIAM **ROBERTS**.

1. Soit une surface donnée par le système des équations

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v),$$

et l'on sait que son aire superficielle s'exprimera par l'intégrale double

$$S = \iint \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}\, du\, dv,$$

où

$$\xi = \frac{dx}{du}\frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}, \quad \eta = \frac{dz}{du}\frac{dx}{dv} - \frac{dz}{dv}\frac{dx}{du}, \quad \zeta = \frac{dy}{du}\frac{dz}{dv} - \frac{dy}{dv}\frac{dz}{du}$$

(voir LACROIX, *Traité de calcul différentiel et intégral,* tome II, n° 774). Cela posé, supposons qu'on transforme x, y, z en coordonnées polaires ordinaires R, θ, ψ pour trois dimensions, ce qui donnera

$$x = R\sin\theta\cos\psi, \quad y = R\sin\theta\sin\psi, \quad z = R\cos\theta,$$

d'où l'on déduit, en regardant θ et ψ comme des variables indépendantes, dont R est une fonction,

$$\xi = R\sin\theta\left(R\cos\theta + \sin\theta\frac{dR}{d\theta}\right),$$

$$\eta = -R\cos\psi\frac{dR}{d\psi} + R\sin\theta\sin\psi\left(R\sin\theta - \cos\theta\frac{dR}{d\theta}\right),$$

$$\zeta = R\sin\psi\frac{dR}{d\psi} + R\sin\theta\cos\psi\left(R\sin\theta - \cos\theta\frac{dR}{d\theta}\right),$$

en sorte que

$$(1) \qquad S = \iint \sqrt{\left(R^2 + \frac{dR^2}{d\theta^2}\right)\sin^2\theta + \frac{dR^2}{d\psi^2}}\, R\, d\theta\, d\psi.$$

2. L'expression pour S, qu'on vient de donner, conduit facilement à une formule simple pour l'aire d'une surface, qui est lieu géométrique des projections orthogonales d'un point fixe sur les plans tangents à une surface donnée.

En effet, soient θ_1, ψ_1 les angles qui déterminent la position d'une perpendiculaire R_1, abaissée du point fixe sur un plan tangent quelconque à la surface donnée. On aura donc, x, y, z étant les coordonnées du point de contact sur cette dernière,

$$R_1 = x\sin\theta_1\cos\psi_1 + y\sin\theta_1\sin\psi_1 + z\cos\theta_1,$$

et, par la différentiation, en se rappelant que

$$\sin\theta_1\cos\psi_1\,dx + \sin\theta_1\sin\psi_1\,dy + \cos\theta_1\,dz = 0,$$

on trouve

$$\frac{dR_1}{d\theta_1} = (x\cos\psi_1 + y\sin\psi_1)\cos\theta_1 - z\sin\theta_1,$$
$$\frac{dR_1}{d\psi_1} = -(x\sin\psi_1 - y\cos\psi_1)\sin\theta_1.$$

Donc

$$R_1^2 + \frac{dR_1^2}{d\theta_1^2} + \frac{1}{\sin^2\theta_1}\frac{dR_1^2}{d\psi_1^2} = x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

R étant le rayon vecteur au point de contact sur la surface donnée. En comparant cette équation avec l'équation (1), on verra que l'aire S_1 de la surface qui se dérive de la surface donnée par la construction dont il s'agit, s'exprimera par la formule très-simple

$$S_1 = \iint RR_1 \sin\theta_1\, d\theta_1\, d\psi_1 \text{ [*]}.$$

3. Pour faire application de cette formule, nous supposerons que

---

[*] Semblablement, si l'on désigne par r et ω le rayon vecteur mené d'un point donné à un point quelconque sur une courbe et l'angle que fait la normale à l'extrémité de r avec un axe fixe, l'arc de la courbe, lieu des projections orthogonales du point fixe sur les tangentes de la courbe donnée, se trouvera exprimé par l'intégrale $\int r d\omega$; équation dont j'ai déjà fait usage pour démontrer par la méthode des infiniment petits une propriété des arcs d'une suite de courbes, dérivées d'une hyperbole équilatère. *Voyez* le tome X de ce Journal, page 192.

la surface donnée soit un ellipsoïde, dont le centre est au point ou origine fixe. La surface dérivée sera donc celle employée par Fresnel dans ses recherches sur l'optique, et nommée par cet illustre géomètre et physicien *surface d'élasticité*.

Pour obtenir la valeur de son aire, on n'a qu'à exprimer le rayon vecteur à un point quelconque d'un ellipsoïde, par les angles faits par la normale à son extrémité avec les axes de la surface.

Ceci s'effectue aisément : car, soient x, y, z les coordonnées d'un point quelconque sur un ellipsoïde dont les demi-axes sont a, b, c, et soient λ, μ, ν les angles faits par la normale au point (x, y, z) avec les axes. On a donc

$$x = \frac{a^2 \cos\lambda}{R_1}, \quad y = \frac{b^2 \cos\mu}{R_1}, \quad z = \frac{c^2 \cos\nu}{R_1},$$

et, par conséquent,

$$RR_1 = \sqrt{a^4 \cos^2\lambda + b^4 \cos^2\mu + c^4 \cos^2\nu},$$

d'où l'on trouve, en mettant pour λ, μ, ν leurs valeurs en θ_1, ψ_1, l'aire S_1 de la surface d'élasticité donnée par la formule

$$S_1 = \iint \sqrt{a^4 \cos^2\theta_1 + (b^4 \sin^2\psi_1 + c^4 \cos^2\psi_1) \sin^2\theta_1}\, \sin\theta_1\, d\theta_1\, d\psi_1.$$

On obtiendra la huitième partie de la surface totale en prenant chacune des variables depuis o jusqu'à $\frac{\pi}{2}$.

Maintenant, si l'on considère l'ellipsoïde,

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1,$$

et si l'on fait

$$x = \alpha \cos\theta, \quad y = \beta \sin\theta \sin\varphi, \quad z = \gamma \sin\theta \cos\varphi,$$

on en déduira, pour la huitième partie de sa surface totale, l'intégrale double définie

$$(2) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\beta^2 \gamma^2 \cos\theta + \alpha^2 (\beta^2 \cos^2\varphi + \gamma^2 \sin^2\varphi) \sin^2\theta}\, \sin\theta\, d\theta\, d\varphi.$$

Cette expression sera identique avec la valeur de S_1, pourvu qu'on ait

$$\alpha = \frac{bc}{a}, \quad \beta = \frac{ac}{b}, \quad \gamma = \frac{ab}{c},$$

ce qui donne le théorème suivant:

THÉORÈME. *L'aire totale de la surface d'élasticité, qu'on tire d'un ellipsoïde dont les demi-axes sont a, b, c, sera égale à l'aire d'un ellipsoïde dont les demi-axes sont* $\frac{bc}{a}, \frac{ac}{b}, \frac{ab}{c}$.

Il est presque superflu de remarquer que les volumes des deux ellipsoïdes dont il s'agit sont égaux.

4. Parmi les diverses méthodes pour déterminer l'aire ellipsoïdale, qu'on doit aux travaux des géomètres, je ne sais pas si l'on a remarqué celle que je vais indiquer. Elle consiste en ce qu'on ramène l'expression pour l'aire à une intégrale définie connue, évaluée par Legendre.

En effet, si l'on intègre l'expression (2) par rapport à θ, depuis $\theta = 0$ jusqu'à $\theta = \frac{\pi}{2}$, on trouvera

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{P}{\sqrt{Q}} \operatorname{arc}\left(\sin = \sqrt{\frac{Q}{P}}\right) + \beta\gamma\right] d\varphi,$$

en faisant, pour abréger,

$$P = \alpha^2 (\beta^2 \cos^2\varphi + \gamma^2 \sin^2\varphi),$$
$$Q = \beta^2 (\alpha^2 - \gamma^2) \cos^2\varphi + \gamma^2 (\alpha^2 - \beta^2) \sin^2\varphi.$$

Pour transformer cette expression, nous prendrons un nouvel angle ω, tel que

$$\sin\omega = \sqrt{\frac{Q}{P}},$$

ce qui donne, pour la valeur de S, après toutes les réductions convenables,

$$S = \frac{1}{2}\frac{\beta^2\gamma^2}{\alpha^2}\int_\nu^\mu \frac{\omega}{\cos^2\omega}\frac{d\omega}{\sqrt{\sin^2\mu - \sin^2\omega}\sqrt{\sin^2\omega - \sin^2\nu}} + \frac{\pi}{4}\beta\gamma,$$

où

$$\sin^2\mu = \frac{\alpha^2 - \gamma^2}{\alpha^2}, \quad \sin^2\nu = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2}.$$

Maintenant, Legendre a démontré que

$$\int_{\nu}^{\mu} \frac{\omega}{\cos^2\omega} \frac{d\omega}{\sqrt{\sin^2\mu - \sin^2\omega}\sqrt{\sin^2\omega - \sin^2\nu}} = \frac{\pi(\cos\mu - \cos\nu)}{2\cos^2\nu\cos\mu}$$

$$+ \frac{\pi}{2\cos\nu\sin\mu\cos^2\mu}\left[\cos^2\mu\,\mathrm{F}(c,\mu) + \sin^2\mu\,\mathrm{E}(c,\mu)\right],$$

où

$$c^2 = \frac{\tan g^2\mu - \tan g^2\nu}{\tan g^2\mu}.$$

(*Traité des fonctions elliptiques*, tome I, page 313, la deuxième formule de la case VIII.)

Donc, on a finalement

$$\mathrm{S} = \frac{\pi\gamma^2}{4} + \frac{\pi\alpha\beta}{4\sin\mu}\left[\cos^2\mu\,\mathrm{F}(c,\mu) + \sin^2\mu\,\mathrm{E}(c,\mu)\right],$$

ce qui s'accorde parfaitement avec le résultat de Legendre (tome I, page 359).

5. Nous remarquerons enfin que la méthode la plus simple peut-être d'évaluer l'aire d'ellipsoïde est due à M. Jacobi; cet illustre géomètre présente l'élément de la surface sous une forme rationnelle, en choisissant pour variables les angles qui déterminent la position d'une normale à un point quelconque (Journal de M. Crelle, tome X).

La formule qu'il en tire se déduit immédiatement de l'équation générale, qui a lieu pour une surface quelconque,

$$(3) \qquad \mathrm{S} = \iint \rho_1\rho_2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi,$$

dans laquelle ρ_1, ρ_2 désignent les rayons de courbure en un point quelconque, et θ, φ les angles qui fixent la position de la normale. Car, dans l'ellipsoïde, par un théorème de M. Ch. Dupin,

$$\rho_1\rho_2 = \frac{a^2b^2c^2}{p^4},$$

a, b, c étant les demi-axes, et p la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent. Donc

$$\mathrm{S} = a^2b^2c^2 \iint \frac{\sin\theta\, d\theta\, d\varphi}{[a^2\cos^2\theta + (b^2\cos^2\varphi + c^2\sin^2\varphi)\sin^2\theta]^2},$$

ce qui est l'expression trouvée par M. Jacobi. On en trouve encore une autre démonstration, fondée sur des principes géométriques, dans le dernier numéro du *Cambridge and Dublin mathematical Journal*, par M. Jellett, où le même auteur a donné quelques constructions élégantes par rapport à ce sujet.

Quoique je n'aie vu la formule (3) dans aucun ouvrage, je n'ai pas de doute qu'elle a déjà été donnée; il est très-probable, je crois, que M. Gauss l'a obtenue.

P. S. Il saute aux yeux que l'élément de l'aire de la surface d'élasticité

$$\sqrt{a^4 \cos^2 \theta_1 + (b^4 \cos^2 \psi_1 + c^4 \sin^2 \psi_1) \sin^2 \theta_1} \sin \theta_1 \, d\theta_1 \, d\psi_1$$

sera également celui de l'aire d'une surface, qui est lieu des projections orthogonales du centre d'un hyperboloïde (à une ou à deux nappes), ayant a, b, c pour demi-axes, sur ses plans tangents. Par conséquent, si l'on conçoit un système d'un ellipsoïde et des hyperboloïdes qui ont les mêmes axes quant à la grandeur et à la direction, et si l'on en tire des surfaces par la construction dont nous avons parlé, un cône quelconque, dont le sommet est placé au centre et qui les coupe suivant des courbes fermées, déterminera sur toutes des portions de même étendue.

La surface (H), dérivée d'un hyperboloïde, aura un point multiple à son centre, et sera enveloppée là par un cône du second degré, *réciproque* au cône asymptotique de l'hyperboloïde auquel elle appartient. Ce cône tangent déterminera sur la surface d'élasticité correspondante une portion égale à l'aire totale de la surface (H).

Comme cas particulier de ce qu'on vient d'énoncer, on verra aisément que, si l'on fait tourner autour de son axe l'ensemble d'une lemniscate, de ses tangentes centrales, et du cercle décrit sur l'axe, la surface engendrée par la révolution de la lemniscate sera égale au petit cercle de la sphère, qui est formé par la révolution des tangentes.