JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

PUISEUX

Sur les sommes des puissances semblables des termes d'une progression arithmétique

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 11 (1846), p. 477-488.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1846_1_11__477_0>

Sur les sommes des puissances semblables des termes d'une progression arithmétique;

PAR M. PUISEUX.

1. Pour abréger, nous désignerons, dans ce qui va suivre, par $(\mu)_p$ le produit

$$\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-p+1),$$

où p désigne un nombre entier et positif, μ étant quelconque; on aura alors

$$(\mu)_1 = \mu.$$

Cela posé, faisons

$$(1) \qquad \varphi x = \frac{x^{a+m}-x^a}{x-1} = x^a + x^{a+1} + x^{a+2} + \ldots + x^{a+m-1},$$

m étant entier et positif, et soient, de plus,

$$(2) \quad \varphi_1 x = x^{b-a+1}\varphi' x, \quad \varphi_2 x = x^{c-b+1}\varphi'_1 x, \quad \varphi_3 x = x^{d-c+1}\varphi'_2 x, \text{ etc.};$$

nous déduirons de ces équations

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} \varphi_1 x = ax^b + (a+1)x^{b+1} + (a+2)x^{b+2} + \ldots + (a+m-1)x^{b+m-1}, \\ \varphi_2 x = abx^c + (a+1)(b+1)x^{c+1} + (a+2)(b+2)x^{c+2} + \ldots \\ \qquad + (a+m-1)(b+m-1)x^{c+m-1}, \\ \varphi_3 x = abcx^d + (a+1)(b+1)(c+1)x^{d+1} + \ldots \\ \qquad + (a+m-1)(b+m-1)(c+m-1)x^{d+m-1}, \\ \text{etc.} \end{array} \right.$$

Appelons

$$\varphi, \quad \varphi_1, \quad \varphi_2, \ldots, \quad \varphi', \quad \varphi'_1, \ldots, \quad \varphi'', \quad \text{etc.},$$

ce que deviennent, pour $x = 1$, les fonctions

$$\varphi x, \quad \varphi_1 x, \quad \varphi_2 x, \ldots, \quad \varphi' x, \quad \varphi'_1 x, \ldots, \quad \varphi'' x, \quad \text{etc.}$$

et faisons $x = 1$ dans les équations (3); elles nous donneront

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &a + (a+1) + (a+2) + \ldots + (a+m-1) = \varphi_1,\\ &ab + (a+1)(b+1) + (a+2)(b+2) + \ldots\\ &\qquad\qquad + (a+m-1)(b+m-1) = \varphi_2,\\ &abc + (a+1)(b+1)(c+1) + \ldots\\ &\qquad\qquad + (a+m-1)(b+m-1)(c+m-1) = \varphi_3,\\ &\quad \text{etc.} \end{aligned}\right.$$

2. Pour avoir les valeurs des seconds membres φ_1, φ_2, etc., différentions l'équation

$$(x-1)\,\varphi x = x^{a+m} - x^a;$$

il viendra

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &(x-1)\varphi' x + \varphi x = (a+m)_1 x^{a+m-1} - (a)_1 x^{a-1},\\ &(x-1)\varphi'' x + 2\varphi' x = (a+m)_2 x^{a+m-2} - (a)_2 x^{a-2},\\ &(x-1)\varphi''' x + 3\varphi'' x = (a+m)_3 x^{a+m-3} - (a)_3 x^{a-3},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &(x-1)\varphi^{(p+1)} x + (p+1)\varphi^{(p)} x = (a+m)_{p+1} x^{a+m-p-1} - (a)_{p+1} x^{a-p-1},\\ &\quad \text{etc.} \end{aligned}\right.$$

D'un autre côté, en différentiant les équations (2), nous aurons

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &\varphi_1 x = x^{b-a+1}\varphi' x,\\ &\varphi'_1 x = (b-a+1)_1 x^{b-a}\varphi' x + x^{b-a+1}\varphi'' x,\\ &\varphi''_2 x = (b-a+1)_2 x^{b-a-1}\varphi' x + 2(b-a+1)_1 x^{b-a}\varphi'' x + x^{b-a+1}\varphi''' x,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\varphi_1^{(p)} x = (b-a+1)_p x^{b-a-p+1}\varphi' x + \frac{p}{1}(b-a+1)_{p-1} x^{b-a-p+2}\varphi'' x\\ &\qquad + \frac{p(p-1)}{1.2}(b-a+1)_{p-2} x^{b-a-p+3}\varphi''' x + \ldots + x^{b-a+1}\varphi^{(p+1)} x,\\ &\quad \text{etc.};\\ &\varphi_2 x = x^{c-b+1}\varphi'_1 x,\\ &\varphi'_2 x = (c-b+1)_1 x^{c-b}\varphi'_1 x + x^{c-b+1}\varphi''_1 x,\\ &\varphi''_2 x = (c-b+1)_2 x^{c-b-1}\varphi'_1 x + 2(c-b+1)_1 x^{c-b}\varphi''_1 x + x^{c-b-1}\varphi'''_1 x,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\varphi_2^{(p)} x = (c-b+1)_p x^{c-b-p+1}\varphi'_1 x + \frac{p}{1}(c-b+1)_{p-1} x^{c-b-p+2}\varphi''_1 x + \ldots\\ &\qquad + x^{c-b+1}\varphi_1^{(p+1)} x,\\ &\quad \text{etc.} \end{aligned}\right.$$

Faisons maintenant

$$x = 1$$

dans les équations (5) et (6), et nous trouverons

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi\ &= (a+m)_1 - (a)_1,\\ 2\varphi' &= (a+m)_2 - (a)_2,\\ 3\varphi'' &= (a+m)_3 - (a)_3,\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ (p+1)\varphi^{(p)} &= (a+m)_{p+1} - (a)_{p+1},\\ &\text{etc.}, \end{aligned}\right.$$

et

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &\varphi_1 = \varphi',\\ &\varphi'_1 = (b-a+1)_1\varphi' + \varphi'',\\ &\varphi''_1 = (b-a+1)_2\varphi' + 2(b-a+1)_1\varphi'' + \varphi''',\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &\varphi_1^{(p)} = (b-a+1)_p\varphi' + \frac{p}{1}(b-a+1)_{p-1}\varphi''\\ &\qquad + \frac{p(p-1)}{1.2}(b-a+1)_{p-2}\varphi''' + \ldots + \varphi^{(p+1)},\\ &\quad\text{etc.};\\ &\varphi_2 = \varphi'_1,\\ &\varphi'_2 = (c-b+1)_1\varphi'_1 + \varphi''_1,\\ &\varphi''_2 = (c-b+1)_2\varphi'_1 + (c-b+1)_1\varphi''_1 + \varphi'''_1,\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &\varphi_2^{(p)} = (c-b+1)_p\varphi'_1 + \frac{p}{1}(c-b+1)_{p-1}\varphi''_1 + \ldots + \varphi_1^{(p+1)},\\ &\quad\text{etc.} \end{aligned}\right.$$

En substituant, dans les équations (8), les valeurs de φ', φ'', φ''', etc., tirées des équations (7), nous en déduirons aisément les valeurs de φ_1, φ_2, φ_3, etc., et, en portant ces dernières dans les équations (4), nous obtiendrons les formules suivantes :

$$
(9)\quad \left\{
\begin{aligned}
& a + (a+1) + (a+2) + \ldots + (a+m-1) = \frac{(a+m)_2 - (a)_2}{2},\\
& ab + (a+1)(b+1) + \ldots + (a+m-1)(b+m-1)\\
& \qquad = (b-a+1)\cdot\frac{(a+m)_2 - (a)_2}{2} + \frac{(a+m)_3 - (a)_3}{3},\\
& abc + (a+1)(b+1)(c+1) + \ldots + (a+m-1)(b+m-1)(c+m-1)\\
& \qquad = (b-a+1)(c-a+1)\frac{(a+m)_2 - (a)_2}{2}\\
& \qquad + (b+c-2a+3)\frac{(a+m)_3 - (a)_3}{3} + \frac{(a+m)_4 - (a)_4}{4},\\
& \quad \text{etc.}
\end{aligned}
\right.
$$

En développant les seconds membres, on trouvera, comme il était aisé de le prévoir, que celui de la première formule est une fonction linéaire de a, celui de la deuxième une fonction linéaire de chacune des quantités a et b, celui de la troisième une fonction linéaire de chacune des quantités a, b, c, et ainsi de suite. De plus, ces fonctions sont symétriques par rapport à ces lettres.

Remplaçons, dans les équations précédentes, a, b, c, etc., par $\frac{a}{h}$, $\frac{b}{k}$, $\frac{c}{l}$, et multiplions-les, la première par h, la deuxième par hk, la troisième par hkl, etc., il viendra

$$
(10)\quad \left\{
\begin{aligned}
& a + (a+h) + (a+2h) + \ldots + [a + (m-1)h] = a\cdot\frac{\left(\frac{a}{h}+m\right)_2 - \left(\frac{a}{h}\right)_2}{2},\\
& ab + (a+h)(b+k) + \ldots + [a+(m-1)h][b+(m-1)]k.\\
& \qquad = (bh - ak + hk)\,\frac{\left(\frac{a}{h}+m\right)_2 - \left(\frac{a}{h}\right)_2}{2} + hk\cdot\frac{\left(\frac{a}{h}+m\right)_3 - \left(\frac{a}{h}\right)_3}{3},\\
& abc + (a+h)(b+k)(c+l) + \ldots\\
& \qquad + [a+(m-1)h][b+(m-1)k][c+(m-1)l]\\
& \qquad = \frac{(bh-ak+hk)(ch-al+hl)}{h}\cdot\frac{\left(\frac{a}{h}+m\right)_2 - \left(\frac{a}{h}\right)_2}{2}\\
& + (bhl + chk - 2akl + 3hkl)\cdot\frac{\left(\frac{a}{h}+m\right)_3 - \left(\frac{a}{h}\right)_3}{3} + hkl\cdot\frac{\left(\frac{a}{h}+m\right)_4 - \left(\frac{a}{h}\right)_4}{4},\\
& \quad \text{etc.,}
\end{aligned}
\right.
$$

formules plus générales que les équations (9).

3. Les formules (9) se simplifient dans le cas particulier où l'on a

$$b = a - 1, \quad c = b - 1, \quad d = c - 1, \quad \text{etc.};$$

en effet, les équations (8) nous donnent, dans cette hypothèse,

$$\varphi_1 = \varphi', \quad \varphi_2 = \varphi'', \quad \varphi_3 = \varphi''', \quad \text{etc.},$$

et, par conséquent,

$$(11)\left\{\begin{aligned} &a + (a+1) + (a+2) + \ldots + (a+m-1) = \frac{(a+m)_2 - (a)_2}{2},\\ &a(a-1) + (a+1)a + (a+2)(a+1) + \ldots\\ &\qquad + (a+m-1)(a+m-2) = \frac{(a+m)_3 - (a)_3}{3},\\ &a(a-1)(a-2) + (a+1)a(a-1) + (a+2)(a+1)a + \ldots\\ &\qquad + (a+m-1)(a+m-2)(a+m-3) = \frac{(a+m)_4 - (a)_4}{4},\\ &\qquad \text{etc.},\end{aligned}\right.$$

formules que l'on changera en d'autres plus générales en y remplaçant a par $\frac{a}{h}$ et multipliant la première par h, la deuxième par h^2, la troisième par h^3, etc.

4. Considérons maintenant un autre cas qui fait l'objet spécial de cet article, savoir celui où, dans les formules (9), on suppose

$$a = b = c = d = \ldots;$$

les équations (8) deviennent alors

$$(12)\left\{\begin{aligned} &\varphi_1 = \varphi', && \varphi_2 = \varphi'_1,\\ &\varphi'_1 = \varphi' + \varphi'', && \varphi'_2 = \varphi'_1 + \varphi''_1,\\ &\varphi''_1 = 2\varphi'' + \varphi''', && \varphi''_2 = 2\varphi''_1 + \varphi'''_1,\\ &\varphi'''_1 = 3\varphi''' + \varphi^{\text{IV}}, && \varphi'''_2 = 3\varphi'''_1 + \varphi^{\text{IV}}_1,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots && \ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\varphi_1^{(p)} = p\varphi^{(p)} + \varphi^{(p+1)}, && \varphi_2^{(p)} = p\varphi_1^{(p)} + \varphi_1^{(p+1)},\\ &\qquad \text{etc.}; && \qquad \text{etc.}\end{aligned}\right.$$

A l'aide de ces équations, il est aisé d'exprimer φ_1, φ_2, φ_3, etc., en φ', φ'', φ''', etc., et l'on voit que, r étant un nombre entier quelconque, l'expression de φ_r sera de la forme

$$\varphi_r = \varphi' + A_r\varphi'' + B_r\varphi''' + C_r\varphi^{\text{IV}} + \ldots + L_r\varphi^{(r)}.$$

Pour obtenir plus promptement les coefficients A_r, B_r, etc., remarquons que, si dans une quelconque des équations (12), on vient à augmenter d'une unité les indices placés au bas de la lettre φ, on retombera sur une autre équation du même groupe; il est donc permis de faire ce changement dans toute équation déduite de celles-là, et, en particulier, dans l'équation

$$\varphi_r = \varphi' + A_r\varphi'' + B_r\varphi''' + C_r\varphi^{\text{IV}} + \ldots,$$

ce qui donne

$$\varphi_{r+1} = \varphi'_1 + A_r\varphi''_1 + B_r\varphi'''_1 + C_r\varphi^{\text{IV}}_1 + \ldots,$$

ou bien, en remplaçant φ'_1, φ''_1, φ'''_1, etc., par leurs valeurs,

$$\varphi_{r+1} = \varphi' + \begin{array}{l|l|l|l} 1 & \varphi'' + A_r & \varphi''' + B_r & \varphi^{\text{IV}} + \ldots. \\ + 2A_r & \quad + 3B_r & \quad + 4C_r & \end{array}$$

On voit par là que, connaissant les coefficients 1, A_r, B_r, etc., de φ', φ'', φ''', etc., dans l'expression de φ_r, si l'on écrit ces coefficients sur une même ligne horizontale, et au-dessous les mêmes coefficients multipliés respectivement par 1, 2, 3, etc., en ayant soin d'avancer chaque terme d'un rang, de manière à former le tableau suivant :

$$\begin{array}{cccccc} & 1, & A_r, & B_r, & C_r,\ldots, & \\ 1, & 2A_r, & 3B_r, & 4C_r, & 5D_r,\ldots; & \end{array}$$

si, enfin, on ajoute les termes contenus dans une même ligne verticale, les sommes ainsi obtenues seront les coefficients de φ', φ'', φ''', etc., dans φ_{r+1}. En appliquant cette règle, on peut former le tableau suivant :

$$\varphi_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; 1\varphi',$$

$$\varphi_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \begin{array}{ccc} 1 & & \\ \hline 1\varphi' & + & 1\varphi'' \end{array},$$

$$\varphi_3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \begin{array}{ccccc} 1 & & 2 & & \\ \hline 1\varphi' & + & 3\varphi'' & + & 1\varphi''' \end{array},$$

$$\varphi_4 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \begin{array}{ccccccc} 1 & & 6 & & 3 & & \\ \hline 1\varphi' & + & 7\varphi'' & + & 6\varphi''' & + & 1\varphi^{\text{IV}} \end{array},$$

$$\varphi_5 = \ldots\ldots\ldots \begin{array}{ccccccccc} 1 & & 14 & & 18 & & 4 & & \\ \hline 1\varphi' & + & 15\varphi'' & + & 25\varphi''' & + & 10\varphi^{\text{IV}} & + & 1\varphi^{\text{V}} \end{array},$$

$$\varphi_6 = \ldots\ldots \begin{array}{ccccccccccc} 1 & & 30 & & 75 & & 40 & & 5 & & \\ \hline 1\varphi' & + & 31\varphi'' & + & 90\varphi''' & + & 65\varphi^{\text{IV}} & + & 15\varphi^{\text{V}} & + & 1\varphi^{\text{VI}} \end{array}.$$

etc.

5. Cherchons maintenant l'expression générale de φ_r; or, à cause de $A_1 = 0$ et de l'équation

$$A_{r+1} = 2A_r + 1,$$

nous aurons

$$\begin{aligned}
A_2 &= 1,\\
A_3 &= 2A_2 + 1,\\
A_4 &= 2A_3 + 1,\\
&\cdots\cdots\\
A_{r-1} &= 2A_{r-2} + 1,\\
A_r &= 2A_{r-1} + 1.
\end{aligned}$$

Ajoutons ces équations, après avoir multiplié la première par 2^{r-2}, la deuxième par 2^{r-3}, la troisième par $2^{r-4}, \ldots$, l'avant-dernière par 2: nous trouverons

$$A_r = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{r-3} + 2^{r-2} = \frac{2^{r-1} - 1}{1}.$$

De même, à cause de $B_2 = 0$ et de l'équation

$$B_{r+1} = 3B_r + A_r = 3B_r + 2^{r-1} - 1,$$

nous aurons

$$\begin{aligned}
B_3 &= 2^1 - 1,\\
B_4 &= 3B_3 + 2^2 - 1,\\
B_5 &= 3B_4 + 2^3 - 1,\\
&\cdots\cdots\\
B_{r-1} &= 3B_{r-2} + 2^{r-3} - 1,\\
B_r &= 3B_{r-1} + 2^{r-2} - 1.
\end{aligned}$$

Ajoutons à ces équations, après avoir multiplié la première par 3^{r-3}, la deuxième par $3^{r-4}, \ldots$, l'avant-dernière par 3, il viendra

$$\begin{aligned}
B_r &= 2^1 3^{r-3} + 2^2 3^{r-4} + \ldots + 2^{r-3} 3^1 + 2^{r-2} - (1 + 3^1 + 3^2 + \ldots + 3^{r-3}),\\
&= 2^{r-2}\left[1 + \left(\frac{3}{2}\right)^1 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{3}{2}\right)^{r-3}\right] - (1 + 3^1 + 3^2 + \ldots + 3^{r-3}),
\end{aligned}$$

ou bien

$$B_r = \frac{3^{r-1} - 2.2^{r-1} + 1}{1.2}.$$

Nous déduirons de même de l'équation

$$C_{r+1} = 4C_r + B_r,$$

la formule

$$C_r = \frac{4^{r-1} - 3.3^{r-1} + 3.2^{r-1} - 1}{1.2.3},$$

puis, de l'équation

$$D_{r+1} = 5D_r + C_r,$$

cette autre formule

$$D_r = \frac{5^{r-1} - 4.4^{r-1} + 6.3^{r-1} - 4.2^{r-1} + 1}{1.2.3.4},$$

et ainsi de suite. On aperçoit aisément la loi de ces expresssions, et l'on en conclut qu'en posant

$$\varphi_r = \varphi' + A_r\varphi'' + B_r\varphi''' + \ldots + G_r\varphi^{(p-1)} + H_r\varphi^{(p)} + \ldots,$$

on aura

$$H_r = \frac{p^{r-1} - \frac{p-1}{1}(p-1)^{r-1} + \frac{(p-1)(p-2)}{1.2}(p-2)^{r-1} - \frac{(p-1)(p-2)(p-3)}{1.2.3}(p-3)^{r-1} + \ldots \pm 1}{1.2.3\ldots(p-1)}.$$

Pour s'assurer de l'exactitude de cette formule, il suffit de vérifier que, si elle a lieu pour une certaine valeur de r, elle aura lieu aussi pour la valeur $r+1$; or cela est facile à l'aide de l'équation

$$H_{r+1} = pH_r + G_r;$$

en effet, si l'on y remplace H_r par la valeur précédente, et G_r par

$$\frac{(p-1)^{r-1} - \frac{p-2}{1}(p-2)^{r-1} + \frac{(p-2)(p-3)}{1.2}(p-3)^{r-1} - \ldots \pm 1}{1.2.3\ldots(p-2)},$$

on trouve

$$H_{r+1} = \frac{p^r - \frac{p-1}{1}(p-2)^r + \frac{(p-1)(p-2)}{1.2}(p-2)^r - \frac{(p-1)(p-2)(p-3)}{1.2.3}(p-3)^r + \ldots \pm 1}{1.2.3\ldots(p-1)},$$

ce qui est la valeur écrite plus haut de H_r où r est remplacé par $r+1$. On a donc généralement

$$(13)\quad\left\{\begin{aligned}
&\varphi_r = \varphi' + \frac{2^{r-1}-1}{1}\varphi'' + \frac{3^{r-1}-2.2^{r-1}+1}{1.2}\varphi''' + \frac{4^{r-1}-3.3^{r-1}+3.2^{r-1}-1}{1.2.3}\varphi^{\text{IV}} + \ldots\\
&+\frac{p^{r-1}-\frac{p-1}{1}(p-1)^{r-1}+\frac{(p-1)(p-2)}{1.2}(p-2)^{r-1}-\frac{(p-1)(p-2)(p-3)}{1.2.3}(p-3)^{r-1}+\ldots\pm 1}{1.2.3\ldots(p-1)}\varphi^{(p)}+\ldots\\
&+\frac{r^{r-1}-\frac{r-1}{1}(r-1)^{r-1}+\frac{(r-1)(r-1)}{1.2}(r-2)^{r-1}-\frac{(r-1)(r-2)(r-3)}{1.2.3}(r-3)^{r-1}+\ldots\pm 1}{1.2.3\ldots(r-1)}\varphi^{(r)}.
\end{aligned}\right.$$

6. *Remarque.* On peut obtenir sous une autre forme la valeur de φ_r : d'abord on voit aisément, par les équations (12) ou par la règle pratique donnée plus haut, que le coefficient de $\varphi^{(r)}$, dans cette valeur, est l'unité. Posons donc

$$\varphi_r = \varphi^{(r)} + M_r\varphi^{(r-1)} + N_r\varphi^{(r-2)} + P_r\varphi^{(r-3)} + \ldots,$$

de sorte qu'on ait aussi

$$\varphi_{r+1} = \varphi^{(r+1)} + M_{r+1}\varphi^{(r)} + N_{r+1}\varphi^{(r-1)} + P_{r+1}\varphi^{(r-2)} + \ldots.$$

Nous conclurons, de la règle qui vient d'être rappelée,

$$M_{r+1} = M_r + r,\quad N_{r+1} = N_r + (r-1)M_r,\quad P_{r+1} = P_r + (r-2)N_r,\quad \text{etc.}$$

Or l'équation

$$M_{r+1} = M_r + r$$

nous donne, à cause de $M_1 = 0$,

$$\begin{aligned}
M_2 &= 1,\\
M_3 &= M_2 + 2,\\
M_4 &= M_3 + 3,\\
&\ldots\ldots\ldots\\
M_r &= M_{r-1} + r - 1,
\end{aligned}$$

d'où, en ajoutant,

$$M_r = \frac{r(r-1)}{2}.$$

Il en résulte

$$N_{r+1} = N_r + \frac{r(r-1)^2}{2},$$

et par suite, à cause de $N_1 = 0$,

$$N_3 = \frac{2.1^2}{2},$$

$$N_4 = N_3 + \frac{3.2^2}{2},$$

$$N^5 = N_4 + \frac{4.3^2}{2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$N_r = N_{r-1} + \frac{(r-1)(r-2)^2}{2},$$

d'où, en ajoutant,

$$N_r = \frac{2.1^2 + 3.2^2 + 4.3^2 + \ldots + (r-1)(r-2)^2}{2}.$$

Le numérateur du second membre s'évaluera à l'aide de la troisième des formules (9), en y supposant

$$a = 2, \quad b = c = 1, \quad m = r = 2,$$

et l'on trouvera

$$N_r = \frac{r(r-1)(r-2)(3r-5)}{24};$$

on obtiendra de même la formule

$$P_r = \frac{r(r-1)(r-2)^2(r-3)^2}{48},$$

et ainsi de suite. Nous avons donc

$$\varphi_r = \varphi^{(r)} + \frac{r(r-1)}{2}.\varphi^{(r-1)} + \frac{r(r-1)(r-2)(3r-5)}{24}\varphi^{(r-2)} + \frac{r(r-1)(r-2)^2(r-3)^2}{48}\varphi^{(r-3)} + \ldots.$$

La comparaison de cette équation avec l'équation (13) conduit aux relations suivantes :

$$r^{r-1}-\frac{r-1}{1}(r-1)^{r-1}+\frac{(r-1)(r-2)}{1.2}(r-2)^{r-1}-\ldots\pm 1=1.2\ldots(r-1),$$

$$(r-1)^{r-1}-\frac{r-2}{1}(r-2)^{r-1}+\frac{(r-2)(r-3)}{1.2}(r-3)^{r-1}-\ldots$$
$$\mp 1=1.2\ldots(r-2)\times\frac{r(r-1)}{2},$$

$$(r-2)^{r-1}-\frac{r-3}{1}(r-3)^{r-1}+\frac{(r-3)(r-4)}{1.2}(r-4)^{r-1}-\ldots$$
$$\pm 1=1.2\ldots(r-3)\times\frac{r(r-1)(r-2)(3r-5)}{24},$$

$$(r-3)^{r-1}-\frac{r-4}{1}(r-4)^{r-1}+\frac{(r-4)(r-5)}{1.2}(r-5)^{r-1}-\ldots$$
$$\mp 1=1.2\ldots(r-4)\times\frac{r(r-1)(r-2)^2(r-3)^2}{48},$$

etc.,

qui ont lieu pour les valeurs entières et positives de r.

7. Si maintenant, dans les équations (4), nous introduisons l'hypothèse

$$a=b=c=\ldots,$$

nous en conclurons, en ayant égard aux équations (13) et (7),

$$a+(a+1)+(a+2)+\ldots+(a+m-1)=\frac{(a+m)_2-(a)_2}{2},$$

$$a^2+(a+1)^2+(a+2)^2+\ldots+(a+m-1)^2=\frac{(a+m)_2-(a)_2}{2}+\frac{(a+m)_3-(a)_3}{3},$$

$$a^3+(a+1)^3+\ldots+(a+m-1)^3=\frac{(a+m)_2-(a)_2}{2}+(a+m)_3-(a)_3+\frac{(a+m)_4-(a)_4}{4},$$

etc.,

et, généralement,

$$(14)\quad\left\{\begin{aligned}&a^r+(a+1)^r+(a+2)^r+\ldots+(a+m-1)^r=\frac{(a+m)_2-(a)_2}{2}+\frac{2^{r-1}-1}{1}\cdot\frac{(a+m)_3-(a)_3}{3}\\&+\frac{3^{r-1}-2.2^{r-1}+1}{1.2}\cdot\frac{(a+m)_4-(a)_4}{4}+\frac{4^{r-1}-3.3^{r-1}+3.2^{r-1}-1}{1.2.3}\cdot\frac{(a+m)_5-(a)_5}{5}+\ldots\\&+\frac{p^{r-1}-\frac{p-1}{1}(p-1)^{r-1}+\frac{(p-1)(p-2)}{1.2}(p-2)^{r-1}-\ldots\pm 1}{1.2.3\ldots(p-1)}\cdot\frac{(a+m)_{p+1}-(a)_{p+1}}{p+1}+\ldots\\&+\frac{(a+m)_{r+1}-(a)_{r+1}}{r+1}.\end{aligned}\right.$$

Cette dernière équation est comprise elle-même dans une autre plus générale, qu'on obtiendra en remplaçant a par $\frac{a}{h}$, et multipliant les deux membres par h^r; on trouve ainsi

$$
(15)\quad \left\{\begin{aligned}
& a^r + (a+h)^r + (a+2h)^r + \ldots + [a+(m-1)h]^r \\
& = h\left\{\begin{aligned}
& h^{r-1}\,\frac{\left(\frac{a}{h}+m\right)_2 - \left(\frac{a}{h}\right)_2}{2} + \frac{(2h)^{r-1}-h^{r-1}}{1}\cdot\frac{\left(\frac{a}{h}+m\right)_3 - \left(\frac{a}{h}\right)_3}{2} + \ldots \\
& + \frac{(ph)^{r-1} - \frac{p-1}{1}(ph-h)^{r-1} + \frac{(p-1)(p-2)}{1.2}(ph-2h)^{r-1} - \frac{(p-1)(p-2)(p-3)}{1.2.3}(ph-3h)^{r-1} + \ldots \pm h^{r-1}}{1.2.3\ldots(p-1)} \\
& \times \frac{\left(\frac{a}{h}+m\right)_{p+1} - \left(\frac{a}{h}\right)_{p+1}}{p+1} + \ldots + h^{r-1}\,\frac{\left(\frac{a}{h}+m\right)_{r-1} - \left(\frac{a}{h}\right)_{r-1}}{r+1}
\end{aligned}\right\}
\end{aligned}\right.
$$

Telle est la formule qui fait connaître la somme des puissances de degré r des termes d'une progression arithmétique.

FIN DU ONZIÈME VOLUME.