JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. STEINER

Théorèmes de géométrie

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 11 (1846), p. 468-470.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1846_1_11__468_0>

THÉORÈMES DE GÉOMÉTRIE;

PAR M. J. STEINER.

(Extrait d'un Mémoire lu à l'Académie de Berlin le 27 novembre 1845.)

1. Une courbe du troisième ordre contient, en général, 27 points dans chacun desquels elle peut avoir un contact du cinquième ordre avec une conique. Parmi ces 27 points, il y en a 9 de réels et 18 d'imaginaires. L'équation du vingt-septième degré, qui détermine ces 27 points, est toujours algébriquement résoluble; résultat intéressant pour l'algèbre.

Parmi ces 27 points P, il s'en trouve cent huit fois 3 situés dans une même droite, et ces 108 droites présentent à leur tour des relations remarquables, tant entre elles qu'avec d'autres droites et points qui dépendent de la courbe. C'est ainsi, par exemple, que neuf fois 3 des 9 points réels P se trouvent dans une même droite, et que 3 de ces droites, qui se distinguent essentiellement des 6 autres, se coupent en un même point Q. Le nombre de ces points Q est 12, pourvu qu'on prenne en considération tous les 27 points P, et ces points Q ont d'ailleurs d'autres rapports remarquables avec la courbe, etc., etc.

2. Si après avoir choisi deux points fixes quelconques P et Q d'une courbe du troisième ordre, l'on prend sur la même courbe un point A entièrement arbitraire, et que l'on tire la droite PA qui rencontrera la courbe en un troisième point B, que l'on tire la droite QB qui rencontrera la courbe en un troisième point C, que l'on tire la droite PC qui coupera la courbe en un nouveau point D, et que l'on continue ainsi à tirer les droites QDE, PEF, QFG,..., qui déterminent successivement les points E, F, G,..., on formera un polygone inscrit ABCDEFG... dont les côtés passent alternativement par les deux points fondamentaux P et Q, et qui pourra présenter deux cas différents. Il peut arriver que ce polygone ne se ferme jamais, quelque loin que l'on pousse la construction invoquée, ou qu'il forme une figure rentrante en elle-même d'un nombre pair égal à $2n$ de côtés. Dans le second de ces deux cas on a ce théorème :

« Si le polygone en question se ferme pour un point de départ dé-
» terminé A, il se fermera toujours et aura toujours le même nombre
» de côtés $2n$, quel que soit le point A. »

Si après avoir tiré la droite PQ, qui coupe la courbe en un troisième point R, on mène de ce dernier une tangente qui touche la courbe au point S, on aura ce théorème :

« Si les points fondamentaux P et Q sont tels, qu'à ces points réponde
» un polygone fermé ayant un nombre de côtés égal à $2n$, chacun des
» deux couples de points P et S, Q et S donnera également lieu à des
» polygones rentrants, mais dont les côtés seront au nombre de $4n$. »

Étant donc donnés deux points fondamentaux P et Q auxquels répond un polygone fermé de $2n$ côtés, il sera facile d'en déduire deux autres points fondamentaux P et S, ou Q et S, auxquels correspondra un polygone d'un nombre double de côtés, et réciproquement.

Dans une courbe donnée du troisième ordre, il existe toujours une infinité de couples de points fondamentaux auxquels correspond un polygone fermé dont le nombre des côtés est un nombre pair quelconque. On peut même arbitrairement choisir l'un de ces points; l'autre comportera alors un certain nombre de positions différentes.

Les couples de points qui donnent lieu à des polygones rentrants sont définis par le théorème donné ci-dessus, et leurs propriétés caractéristiques peuvent s'énoncer comme il suit pour les cas les plus simples :

1°. Pour que le polygone soit un quadrilatère, il faut que les tangentes en P et Q se rencontrent en un point de la courbe. On voit que, pour ce cas, rien n'est plus simple que de trouver des points fondamentaux, et l'on conclut que, P étant pris d'une manière arbitraire, Q comportera trois positions différentes. On voit encore comment on peut assigner les points fondamentaux P et S pour un nombre de côtés égal à 8, et que, dans ce cas, P étant donné, S sera susceptible généralement de 12 positions.

2°. Pour que le polygone soit un hexagone, il faut, après avoir construit les tangentes en P et Q, que je suppose couper, respectivement, la courbe en P_1 et Q_1, et joint les points P et Q_1, Q et P_1, que le point de concours T de ces dernières droites soit sur la courbe. Ce cas présente cela de particulier, que les couples P et T, Q et T donnent également lieu à des hexagones, et l'on satisfera encore à la question au moyen de deux quelconques des trois points P_1, Q_1, T_1, ce dernier étant le point où la courbe est rencontrée par la tangente au point T. On peut aussi, dans ce cas, prendre pour points fondamentaux deux quelconques des points de rebroussement de la courbe, et l'on peut d'ailleurs facilement obtenir, au moyen de ces derniers, tous les points fondamentaux de la courbe. Soient U et V deux points de rebroussement, et X un point quelconque de la courbe. Cela étant, si l'on tire les droites XU, XV, les deux troisièmes points où ces droites rencontreront la courbe seront toujours des points fondamentaux P et Q. On conclut de là qu'à un point déterminé P correspondent toujours 8 points Q, et que, P étant réel, de ces 8 points 2 seront réels, les 6 autres imaginaires, etc.

3°. Dans le cas du décagone, P et Q doivent satisfaire à la condition suivante : Soient P_1 et Q_1 les deux points où la courbe est rencontrée par les tangentes en P et Q; soient encore P_2 et Q_2 les points où la courbe est coupée par les droites PQ_1, QP_1, et enfin P_3 et Q_3 les points de rencontre de la courbe et des droites PQ_2, QP_2. Cela posé, il faudra que le point où les droites PQ_3, QP_3 se rencontrent, se trouve sur la courbe.

3. Si une courbe du quatrième ordre a deux points doubles P et Q, on pourra lui inscrire d'une manière semblable des polygones ABCDEF..., dont les côtés passent alternativement par les points P et Q, et l'on aura toujours la loi déjà énoncée :

Que si le polygone se ferme une seule fois, il se fermera toujours, quel que soit le point de départ, et que le nombre $2n$ des côtés sera toujours le même.

Remarque. Les théorèmes précédents ont lieu d'une manière analogue lorsque les côtés des polygones, au lieu d'être des droites, sont des coniques, savoir : Si dans la courbe donnée on choisit arbitrairement 3 points O, Y, Z, par lesquels et alternativement par P et Q, on fait passer des coniques, et si ensuite l'on construit, au moyen de ces coniques, le polygone inscrit, etc., etc.