JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la décomposition des fractions rationnelles

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 11 (1846), p. 462-463.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1846_1_11__462_0>

SUR LA DÉCOMPOSITION DES FRACTIONS RATIONNELLES;

PAR J. LIOUVILLE.

Soit $x^n + Px^{n-1} + \ldots$ ou $F(x)$ un polynôme de degré n, et $Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots$ ou $f(x)$ un polynôme de degré $(n-1)$ au plus. Considérons l'équation de degré n,

$$F(x) + \alpha f(x) = 0,$$

α désignant un paramètre indéterminé qui n'entre ni dans $F(x)$, ni dans $f(x)$. La somme des racines x s'exprimera par une fonction linéaire de ce paramètre, et, en la représentant par $\sum x$, on aura

$$\sum x = -P - \alpha A,$$

d'où

$$\sum \frac{dx}{d\alpha} = -A.$$

Mais l'équation

$$F(x) + \alpha f(x) = 0$$

donne

$$\frac{dx}{d\alpha} = -\frac{f(x)}{F'(x) + \alpha f'(x)};$$

donc

$$\sum \frac{f(x)}{F'(x) + \alpha f'(x)} = A.$$

En faisant $\alpha = 0$, cette formule prend une forme plus simple, et l'on a

$$\sum \frac{f(x)}{F'(x)} = A,$$

le signe $\sum$ se rapportant actuellement aux racines de

$$F(x) = 0,$$

racines que nous supposerons toutes inégales entre elles, ce qui est le cas général.

Si $f(x)$ n'est que de degré $(n-2)$ au plus, alors A est nul, et il vient

$$\sum \frac{f(x)}{F'(x)} = 0.$$

Or on sait que cette formule contient implicitement toute la théorie de la décomposition des fractions rationnelles en fractions simples. Et, en effet, si on l'applique au cas de

$$F(x) = (x - t)\varphi(x),$$

on en déduira de suite la formule fondamentale

$$\frac{f(t)}{\varphi(t)} = \sum \frac{f(x)}{(t-x)\varphi'(x)},$$

où le signe $\sum$ se rapporte aux racines de

$$\varphi(x) = 0,$$

et dans le premier membre de laquelle le degré du numérateur est inférieur au moins d'une unité à celui du dénominateur.