JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur une transformation de l'équation $\sin\theta\frac{d.\sin\theta\frac{d\Phi}{d\theta}}{d\theta}+\frac{d^2\Phi}{d\varpi^2}+n(n+1)\sin^2\theta.\Phi=\text{o}$

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 11 (1846), p. 458-461.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1846_1_11__458_0>

SUR UNE TRANSFORMATION DE L'ÉQUATION

$$\sin\theta \frac{d.\sin\theta \frac{d\Phi}{d\theta}}{d\theta} + \frac{d^2\Phi}{d\varpi^2} + n(n+1)\sin^2\theta.\Phi = 0\,;$$

PAR J. LIOUVILLE.

Cette équation

$$\sin\theta \frac{d.\sin\theta \frac{d\Phi}{d\theta}}{d\theta} + \frac{d^2\Phi}{d\varpi^2} + n(n+1)\sin^2\theta.\Phi = 0 \tag{1}$$

est celle qui définit les fonctions Y_n de la *Mécanique céleste*. En substituant aux variables θ et ϖ deux autres variables μ et ν, liées aux premières par les équations

$$\frac{\mu\nu}{bc} = \cos\theta, \quad \frac{\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{b^2-\nu^2}}{b\sqrt{c^2-b^2}} = \sin\theta\cos\varpi, \quad \frac{\sqrt{c^2-\mu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}}{c\sqrt{c^2-b^2}} = \sin\theta\sin\varpi,$$

dont l'une quelconque rentre dans les deux autres, c'est-à-dire en prenant

$$\cos\theta = \frac{\mu\nu}{bc}, \quad \operatorname{tang}\varpi = \frac{b}{c}\frac{\sqrt{c^2-\mu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}}{\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{b^2-\nu^2}},$$

on la transforme dans la suivante :

$$\frac{d^2\Phi}{d\eta^2} + \frac{d^2\Phi}{d\varkappa^2} + n(n+1)(\mu^2-\nu^2)\Phi = 0, \tag{2}$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$\frac{d\mu}{\sqrt{(\mu^2-b^2)(c^2-\mu^2)}} = d\eta, \quad \frac{d\nu}{\sqrt{(b^2-\nu^2)(c^2-\nu^2)}} = d\varkappa.$$

Et réciproquement on peut passer de l'équation (2) à l'équation (1) par une transformation inverse. La liaison intime qu'on reconnaît ainsi exister entre ces deux équations entraîne d'importantes conséquences, comme on a pu le voir, par exemple, dans ma seconde Lettre à M. Blanchet (page 279 du présent volume). Je vais ici entrer dans tous les détails du calcul. On a besoin, en effet, de quelque artifice pour éviter de tomber dans des opérations d'une longueur rebutante.

D'abord, en faisant

$$\log \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta = t, \quad \text{d'où} \quad \frac{d\theta}{\sin\theta} = dt, \quad \cos\theta = \frac{1-e^{2t}}{1+e^{2t}},$$

le premier membre de l'équation (1) devient

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} + \frac{d^2\Phi}{d\varpi^2} + n(n+1)\sin^2\theta.\Phi = 0.$$

C'est cette dernière expression qu'il s'agit de transformer en partant de

$$\frac{1-e^{2t}}{1+e^{2t}} = \frac{\mu\nu}{bc}, \quad \operatorname{tang}\varpi = \frac{b}{c}\frac{\sqrt{c^2-\mu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}}{\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{b^2-\nu^2}},$$

et comme on a de suite

$$n(n+1)\sin^2\theta.\Phi = n(n+1)\frac{b^2c^2-\mu^2\nu^2}{b^2c^2}.\Phi,$$

on n'a besoin de s'occuper que des deux premiers termes

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} + \frac{d^2\Phi}{d\varpi^2}.$$

Pour cela, je me servirai du lemme suivant qui est bien connu et dont la démonstration s'offre d'ailleurs d'elle-même: « Si, en exprimant deux » variables t et ϖ, dont Φ dépend, par deux autres η, $\varkappa$, on trouve

$$dt^2 + d\varpi^2 = q\,(d\eta^2 + d\varkappa^2),$$

» il faudra en conclure que

$$\frac{d^2\Phi}{d\eta^2} + \frac{d^2\Phi}{d\varkappa^2} = q\left(\frac{d^2\Phi}{dt^2} + \frac{d^2\Phi}{d\varpi^2}\right). \text{ »}$$

Montrons que la valeur de $dt^2 + d\varpi^2$ est, en effet, de la forme indiquée.

La relation entre $\mu\nu$ et t donne

$$e^{2t} = \frac{bc-\mu\nu}{bc+\mu\nu}, \quad \text{d'où} \quad t = \tfrac{1}{2}\log(bc-\mu\nu) - \tfrac{1}{2}\log(bc+\mu\nu);$$

donc

$$dt = -\frac{bc(\mu d\nu + \nu d\mu)}{b^2c^2 - \mu^2\nu^2}.$$

En posant

$$\frac{d\mu}{\sqrt{(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)}} = d\eta, \quad \frac{d\nu}{\sqrt{(b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)}} = d\varkappa,$$

cette valeur de dt devient

$$dt = -\frac{bc}{b^2c^2 - \mu^2\nu^2}\left[\mu\sqrt{(b^2-\nu^2)(c^2-\nu^2)}.d\varkappa + \nu\sqrt{(\mu^2-b^2)(c^2-\mu^2)}.d\eta\right].$$

D'un autre côté, l'équation

$$\operatorname{tang}\varpi = \frac{b}{c}\frac{\sqrt{c^2-\mu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}}{\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{b^2-\nu^2}}$$

donne

$$\cos^2\varpi = \frac{1}{1+\operatorname{tang}^2\varpi} = \frac{c^2(\mu^2-b^2)(b^2-\nu^2)}{(c^2-b^2)(b^2c^2-\mu^2\nu^2)},$$

et

$$\frac{d\varpi}{\cos^2\varpi} = \frac{b}{c}\left(\frac{\sqrt{c^2-\mu^2}}{\sqrt{\mu^2-b^2}}\,d\frac{\sqrt{c^2-\nu^2}}{\sqrt{b^2-\nu^2}} + \frac{\sqrt{c^2-\nu^2}}{\sqrt{b^2-\nu^2}}\,d\frac{\sqrt{c^2-\mu^2}}{\sqrt{\mu^2-b^2}}\right).$$

A cause de

$$d\frac{\sqrt{c^2-\nu^2}}{\sqrt{b^2-\nu^2}} = \frac{(c^2-b^2)\nu d\nu}{(c^2-\nu^2)\sqrt{(b^2-\nu^2)(c^2-\nu^2)}} = \frac{(c^2-b^2)\nu d\varkappa}{c^2-\nu^2},$$

$$d\frac{\sqrt{c^2-\mu^2}}{\sqrt{\mu^2-b^2}} = -\frac{(c^2-b^2)\mu d\mu}{(\mu^2-b^2)\sqrt{(\mu^2-b^2)(c^2-\mu^2)}} = -\frac{(c^2-b^2)\mu d\eta}{\mu^2-b^2},$$

on en conclut facilement

$$d\varpi = \frac{bc}{b^2c^2-\mu^2\nu^2}\left[\nu\sqrt{(\mu^2-b^2)(c^2-\mu^2)}.d\varkappa - \mu\sqrt{(b^2-\nu^2)(c^2-\nu^2)}.d\eta\right].$$

Enfin, les expressions de dt et $d\varpi$ réunies donnent

$$dt^2 + d\varpi^2 = \frac{b^2c^2(\mu^2-\nu^2)}{b^2c^2-\mu^2\nu^2}(d\eta^2 + d\varkappa^2).$$

Donc, par le lemme invoqué,

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} + \frac{d^2\Phi}{d\varpi^2} = \frac{b^2c^2-\mu^2\nu^2}{b^2c^2(\mu^2-\nu^2)}\left(\frac{d^2\Phi}{d\eta^2} + \frac{d^2\Phi}{d\varkappa^2}\right).$$

Ainsi le premier membre de l'équation (1) est identiquement égal à

$$\frac{b^2c^2 - \mu^2\nu^2}{b^2c^2(\mu^2 - \nu^2)}\left[\frac{d^2\Phi}{d\eta^2} + \frac{d^2\Phi}{d\chi^2} + n(n+1)(\mu^2 - \nu^2)\Phi\right].$$

Par suite, l'équation (1) elle-même se transforme dans l'équation (2), et réciproquement.

On satisfait, comme on sait, à l'équation (2) par une expression de la forme ΣAMN contenant $2n+1$ constantes arbitraires A et $2n+1$ produits MN d'une fonction entière de μ, $\sqrt{\mu^2 - b^2}$, $\sqrt{c^2 - \mu^2}$ par une fonction semblable de ν, $\sqrt{b^2 - \nu^2}$, $\sqrt{c^2 - \nu^2}$, et l'on est ainsi conduit à exprimer les fonctions Y_n, et par suite des fonctions quelconques où les variables sont prises entre certaines limites, par une somme de produits MN. Voyez sur ce point la Lettre citée.