JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. BOUQUET

Note sur les surfaces orthogonales

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 11 (1846), p. 446-450.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1846_1_11__446_0>

NOTE

SUR LES SURFACES ORTHOGONALES;

Par M. J. BOUQUET,

Professeur à la Faculté des Sciences de Lyon.

Dans le xxv^{e} cahier du *Journal de l'Ecole Polytechnique*, M. Chasles, a énoncé le théorème suivant :

« Si l'on considère la série des surfaces déterminée par l'équation

$$u = f(x, y, z) = \alpha,$$

» lorsqu'on fait varier le paramètre α, on peut toujours déterminer
» deux autres séries de surfaces coupant les premières à angle droit et
» suivant leurs lignes de courbure; ou, en d'autres termes, il existe
» deux nouvelles séries, qui, avec la première, forment un système de
» surfaces orthogonales deux à deux. »

Peut-être, M. Chasles n'a-t-il point accordé une attention suffisante à ce théorème qui, dans son travail, n'était qu'un accessoire; car la conclusion à laquelle il a été conduit par un premier aperçu ne me paraît point rigoureuse.

Les tangentes aux lignes de courbure des surfaces $u = \alpha$ se partagent en deux groupes, et par chaque point de l'espace on peut mener une tangente de l'un et de l'autre groupe. Or, en considérant toutes les tangentes d'un même groupe, il existerait, si le théorème était exact, une série de surfaces normales aux droites qui correspondent à leurs divers points. Donc, en appelant X, Y, Z, des quantités proportionnelles aux cosinus des angles que les tangentes aux lignes de courbure de l'un des groupes font avec trois axes rectangulaires, on devrait avoir identiquement, quels que soient x, y, z,

$$(1)\qquad X\left(\frac{dY}{dz}-\frac{dZ}{dy}\right)+Y\left(\frac{dZ}{dx}-\frac{dX}{dz}\right)+Z\left(\frac{dX}{dy}-\frac{dY}{dx}\right)=0.$$

Pour ne point compliquer les calculs, supposons que, dans l'équation

$$u=\alpha,$$

les variables x, y, z soient séparées, c'est-à-dire qu'elle ait la forme

$$\varphi(x)+\varphi_1(y)+\varphi_2(z)=\alpha.$$

On aura

$$\frac{d^2u}{dxdy}=\frac{d^2u}{dydz}=\frac{d^2u}{dzdx}=0;$$

alors on peut prendre

$$(2)\qquad X=\frac{\frac{du}{dx}}{\frac{d^2u}{dx^2}-Q},\quad Y=\frac{\frac{du}{dy}}{\frac{d^2u}{dy^2}-Q},\quad Z=\frac{\frac{du}{dz}}{\frac{d^2u}{dz^2}-Q}\ [*],$$

Q étant l'une des racines de l'équation du second degré

$$(3)\qquad \frac{\left(\frac{du}{dx}\right)^2}{\frac{d^2u}{dx^2}-Q}+\frac{\left(\frac{du}{dy}\right)^2}{\frac{d^2u}{dy^2}-Q}+\frac{\left(\frac{du}{dz}\right)^2}{\frac{d^2u}{dz^2}-Q}=0.$$

Les équations (2) donnent

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\frac{dX}{dy}=X\frac{\frac{dQ}{dy}}{\frac{d^2u}{dx^2}-Q},\quad &&\frac{dX}{dz}=X\frac{\frac{dQ}{dz}}{\frac{d^2u}{dx^2}-Q},\\
&\frac{dY}{dz}=Y\frac{\frac{dQ}{dz}}{\frac{d^2u}{dy^2}-Q},\quad &&\frac{dY}{dx}=Y\frac{\frac{dQ}{dx}}{\frac{d^2u}{dy^2}-Q},\\
&\frac{dZ}{dx}=Z\frac{\frac{dQ}{dx}}{\frac{d^2u}{dz^2}-Q},\quad &&\frac{dZ}{dy}=Z\frac{\frac{dQ}{dy}}{\frac{d^2u}{dz^2}-Q};
\end{aligned}\right.$$

---

[*] Voyez *Calcul différentiel*, par M. l'abbé Moigno, page 365.

ce qui réduit l'équation (1) à

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{YZ}\frac{dQ}{dx}\left(\frac{1}{\frac{d^2u}{dx^2}-Q}-\frac{1}{\frac{d^2u}{dy^2}-Q}\right)+\mathrm{ZX}\frac{dQ}{dy}\left(\frac{1}{\frac{d^2u}{dx^2}-Q}-\frac{1}{\frac{d^2u}{dz^2}-Q}\right)\\ &\qquad\qquad+\mathrm{XY}\frac{dQ}{dz}\left(\frac{1}{\frac{d^2u}{dy^2}-Q}-\frac{1}{\frac{d^2u}{dx^2}-Q}\right)=0.\end{aligned}\right.$$

Mais de l'équation (3) on tire

$$\mathrm{A}^2\frac{dQ}{dx}=\frac{2\frac{du}{dx}\frac{d^2u}{dx^2}}{\frac{d^2u}{dx^2}-Q}-\frac{\left(\frac{du}{dx}\right)^2\frac{d^3u}{dx^3}}{\left(\frac{d^2u}{dx^2}-Q\right)^3},$$

ou

$$\mathrm{A}^2\frac{dQ}{dx}=2\mathrm{X}\frac{d^2u}{dx^2}-\mathrm{X}^2\frac{d^3u}{dx^3};$$

de même

$$\mathrm{A}^2\frac{dQ}{dy}=2\mathrm{Y}\frac{d^2u}{dy^2}-\mathrm{Y}^2\frac{d^3u}{dy^3},$$

$$\mathrm{A}^2\frac{dQ}{dz}=2\mathrm{Z}\frac{d^2u}{dz^2}-\mathrm{Z}^2\frac{d^3u}{dz^3},$$

en faisant, pour abréger,

$$\mathrm{A}^2=\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2+\mathrm{Z}^2.$$

Si l'on substitue les valeurs précédentes des dérivées partielles de Q dans l'équation (5), XYZ sera facteur commun ; en le supprimant et réduisant au même dénominateur, elle devient

$$\begin{aligned}&\left[2\frac{d^2u}{dx^2}\left(\frac{d^2u}{dx^2}-Q\right)-\frac{du}{dx}\frac{d^3u}{dx^3}\right]\left(\frac{d^2u}{dy^2}-\frac{d^2u}{dz^2}\right)\\ +&\left[2\frac{d^2u}{dy^2}\left(\frac{d^2u}{dy^2}-Q\right)-\frac{du}{dy}\frac{d^3u}{dy^3}\right]\left(\frac{d^2u}{dz^2}-\frac{d^2u}{dx^2}\right)\\ +&\left[2\frac{d^2u}{dz^2}\left(\frac{d^2u}{dz^2}-Q\right)-\frac{du}{dz}\frac{d^3u}{dz^3}\right]\left(\frac{d^2u}{dx^2}-\frac{d^2u}{dy^2}\right)=0,\end{aligned}$$

ou

$$(6)\quad\left\{\begin{aligned}&\left[2\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)^2-\frac{du}{dx}\frac{d^3u}{dx^3}\right]\left(\frac{d^2u}{dy^2}-\frac{d^2u}{dz^2}\right)\\ +&\left[2\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)^2-\frac{du}{dy}\frac{d^3u}{dy^3}\right]\left(\frac{d^2u}{dz^2}-\frac{d^2u}{dx^2}\right)\\ +&\left[2\left(\frac{d^2u}{dz^2}\right)^2-\frac{du}{dz}\frac{d^3u}{dz^3}\right]\left(\frac{d^2u}{dx^2}-\frac{d^2u}{dy^2}\right)=0.\end{aligned}\right.$$

Or le premier membre de cette équation n'est pas identiquement nul, ainsi que cela devrait être pour l'exactitude du théorème en question.

Si l'on prend, par exemple, les ellipsoïdes semblables représentés par l'équation

$$\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)=\alpha,$$

on a

$$\frac{du}{dx}=\frac{x}{a^2},\quad \frac{d^2u}{dx^2}=\frac{1}{a^2},\quad \frac{d^3u}{dx^3}=0,$$

et l'équation (6) devient

$$\frac{1}{a^4}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)+\frac{1}{b^4}\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)+\frac{1}{c^4}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)=0,$$

ou

$$(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)=0,$$

qui est impossible, tant que les ellipsoïdes ne sont pas de révolution.

La condition (6) n'est pas non plus satisfaite quand on remplace u par l'une des fonctions

$$e^x+e^y+e^z,\quad \sin x+\sin y+\sin z,\quad \cos x+\cos y+\cos z;$$

mais elle l'est pour

$$u=l(x)+l(y)+l(z),$$

car, alors,

$$\frac{du}{dx}=\frac{1}{x},\quad \frac{d^2u}{dx^2}=-\frac{1}{x^2},\quad \frac{d^3u}{dx^3}=\frac{2}{x^3},$$

d'où

$$2\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)^2-\frac{du}{dx}\frac{d^3u}{dx^3}=0,\ldots.$$

On peut prendre plus généralement

$$u=l(x-a)^\alpha+l(x-b)^\beta+l(x-c)^\gamma.$$

Les séries de surfaces déterminées par les équations

$$l(x)+l(y)+l(z)=\lambda,$$

ou

$$l(x-a)^\alpha+l(x-b)^\beta+l(x-c)^\gamma=\lambda,$$

sont les mêmes que celles-ci :

$$xyz = \lambda, \quad (x-a)^\alpha (y-b)^\beta (z-c)^\gamma = \lambda,$$

dans lesquelles le premier membre est le produit de trois fonctions où les variables sont séparées.

On pourrait, au reste, de la condition (6) déduire celle analogue qui se rapporte au cas de

$$u = \varphi(x)\varphi_1(y)\varphi_2(z);$$

car l'équation

$$\varphi(x)\varphi_1(y)\varphi_2(z) = \lambda$$

donne

$$l\varphi(x) + l\varphi(y) + l\varphi(z) = l\lambda,$$

et l'on rentre dans le premier cas.