JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. BERTRAND

Note relative au Mémoire précédent

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 11 (1846), p. 379-380.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1846_1_11__379_0>

Note relative au Mémoire précédent;

PAR M. J. BERTRAND.

Quand il s'agit du mouvement d'un point sur un plan, le système de coordonnés curvilignes adopté par M. Liouville est tel que les courbes désignées par

$$\alpha = \text{constante}, \quad \beta = \text{constante},$$

sont deux systèmes isothermes conjugués; cela résulte de la remarque faite à la page 348, d'après laquelle ces courbes peuvent partager le plan en carrés infiniment petits; de plus, en consultant une Note insérée par M. Liouville au tome VIII de ce Journal (page 265), on verra sans peine que α et β doivent représenter les températures correspondantes à ces systèmes de courbes isothermes. D'après cela, le problème résolu dans le § III du Mémoire précédent peut s'énoncer de la manière suivante :

« Trouver un système de courbes isothermes AA′, BB′,..., tel que
» l'inverse du carré du flux de la chaleur, en chaque point, soit re-
» présenté par

$$f(\mathrm{V}) + \varphi(\mathrm{V}'),$$

» V et V′ étant les températures correspondantes au système donné et
» à ses trajectoires orthogonales AB, A′B′, etc. »

Concevons quatre courbes appartenant aux deux systèmes conjugués et formant un rectangle de dimensions finies ABA′B′; puis quatre autres courbes infiniment voisines des quatre premières, tellement espacées que ces huit lignes déterminent, par leur intersection, quatre carrés infiniment petits, dont je représenterai les côtés par a, b, a', b'. En désignant par Fa, Fb, Fa', Fb' les flux de chaleur qui correspondent aux quatre points A, B, A′, B′, la condition proposée revient à dire que l'on a

$$\frac{1}{Fa^2} - \frac{1}{Fb^2} = \frac{1}{Fa'^2} - \frac{1}{Fb'^2};$$

mais

$$\frac{1}{Fa} = \frac{1}{Fb}\left(\frac{a}{b}\right), \quad \frac{1}{Fa'} = \frac{1}{Fb'}\left(\frac{a'}{b'}\right);$$

donc

$$\frac{1}{Fa^2}\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) = \frac{1}{Fa'^2}\left(1 - \frac{b'^2}{a'^2}\right);$$

d'où l'on conclut que le premier membre doit être indépendant de la position du point A sur la ligne AA'.

Si maintenant BB' se rapproche indéfiniment de AA', on pourra poser

$$a = ds, \quad b = ds + d^2s,$$

et nous aurons

$$\frac{1}{Fa^2}\frac{d^2s}{ds} = \text{constante}.$$

Mais j'ai montré, tome IX de ce Journal (page 131), que

$$\frac{d^2s}{ds} = \frac{ds}{R},$$

R désignant le rayon de courbure de AA', et, comme ds est en raison inverse du flux Fa, il s'ensuit

$$R = \frac{c}{Fa^3}.$$

Donc le théorème démontré par M. Liouville peut s'énoncer de la manière suivante :

Les courbes isothermes du second degré et homofocales sont les seules pour lesquelles le rayon de courbure soit, en chaque point, en raison inverse du cube du flux de chaleur.

Ce théorème, auquel M. Liouville a été conduit en s'occupant d'une question de dynamique, a un intérêt particulier dans la théorie des courbes isothermes, car la propriété en question est analogue à une propriété nécessaire des surfaces isothermes orthogonales; il était donc tout naturel de se demander dans quels cas elle subsiste pour les courbes isothermes orthogonales.