JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

C.-G.-J. JACOBI

Extrait d'une lettre adressée à M. Liouville

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 11 (1846), p. 341-342.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1846_1_11__341_0>

EXTRAIT D'UNE LETTRE ADRESSÉE A M. LIOUVILLE,

PAR M. C.-G.-J. JACOBI.

« Berlin, 1er août 1846.

» ..... Dans la traduction de mon ancienne Lettre à M. Steiner, que vous venez de publier (*voir* le cahier de juin), il s'est glissé une erreur de conséquence. Au lieu de *chaque courbe à double courbure de l'ellipsoïde,* il est dit dans l'original *chaque ligne de courbure de l'ellipsoïde.* Assurément il y a une infinité d'autres courbes à double courbure de l'ellipsoïde qui jouissent de la même propriété d'avoir cette sorte de foyers, mais on ne peut pas étendre cela à toutes les courbes de l'ellipsoïde.

» La phrase : Cette proposition *est loin de me paraître sans importance,* est remplacée dans l'original par : *ne me paraît pas,* etc. Mais c'est égal.

» Il y a quatorze ans, je me suis posé le problème de chercher l'attraction d'un ellipsoïde homogène, exercée sur un point extérieur quelconque, par une méthode analogue à celle employée par Maclaurin par rapport aux points situés dans les axes principaux. J'y suis parvenu par trois substitutions consécutives. La première est une transformation de coordonnées; par la seconde, le radical

$$\sqrt{1 - m^2 \sin^2 \beta \cos^2 \psi - n^2 \sin^2 \beta \sin^2 \psi},$$

qui entre dans la double intégrale transformée, est rendu rationnel au moyen de la double substitution

$$m \sin \beta \cos \psi = \sin \eta \cos \theta, \quad n \sin \beta \sin \psi = \sin \eta \sin \theta\,;$$

la troisième est encore une transformation de coordonnées. La recherche du sens géométrique de ces trois substitutions m'a conduit à approfondir la théorie des surfaces confocales, par rapport auxquelles je découvris quantité de beaux théorèmes dont je communiquai quelques-uns des principaux à M. Steiner.

» Considérons l'ellipsoïde confocal mené par le point attiré P, et le point p, de l'ellipsoïde proposé, conjugué à P. Soient Q et q deux autres points conjugués quelconques situés respectivement sur l'ellipsoïde extérieur et intérieur. Menons de P un premier cône tangent à l'ellipsoïde intérieur, de p un second cône tangent à l'ellipsoïde extérieur. Ce dernier, tout imaginaire qu'il est, a ses trois axes réels (ainsi que ses deux droites focales). La première substitution ramène les axes de l'ellipsoïde à ceux du premier cône (c'est la substitution employée par Poisson, mais que j'avais antérieurement traitée et même étendue à un nombre quelconque de variables dans le Mémoire *De binis Functionibus homogeneis*, etc.). Par la seconde substitution, les angles que la droite Pq forme avec les axes du premier cône sont ramenés aux angles que la droite pQ forme avec les axes du second. Par la dernière substitution, on retourne de ces axes aux axes de l'ellipsoïde. La seconde substitution répond à un théorème de géométrie remarquable, savoir que :

« Les cosinus des angles que la droite Pq forme avec deux des axes
» du premier cône sont en raison constante avec les cosinus des angles
» que la droite pQ forme avec deux des axes du second cône ; ces deux
» axes sont les tangents situés respectivement dans les sections de plus
» grande et de moindre courbure de chaque ellipsoïde, le troisième
» axe étant la normale à l'ellipsoïde. »

» Tout cela semble difficile à établir par la synthèse.

» Je viens de publier un petit Mémoire où je prouve que mon système d'équations différentielles, que je nomme *abéliennes*, est intégré complétement par des équations algébriques entre les combinaisons des variables (leur somme, la somme des produits des variables prises deux à deux, trois à trois, etc.) dont une seulement est du second, toutes les autres du premier ordre. Par exemple, les équations

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} + \frac{dz}{\sqrt{Z}}, \quad \frac{xdx}{\sqrt{X}} + \frac{ydy}{\sqrt{Y}} + \frac{zdz}{\sqrt{Z}} = 0,$$

où X, Y, Z sont respectivement les mêmes fonctions du sixième ordre de x, y, z, sont intégrées par une équation du second ordre entre les deux quantités $x + y + z$ et $yz + zx + xy$, et une autre équation de la forme

$$xyz = \alpha(yz + zx + xy) + \beta(x + y + z) + \gamma,$$

où α, β, γ sont des constantes.... »