JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

V.-A. LEBESGUE

Remarques sur l'équation $y'' + \frac{m}{x}y' + ny = 0$

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 11 (1846), p. 338-340.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1846_1_11__338_0>

REMARQUES SUR L'ÉQUATION

$$y'' + \frac{m}{x} y' + ny = 0;$$

PAR M. V.-A. LEBESGUE.

1. Si $y = v$ satisfait à l'équation

$$y'' + \frac{m}{x} y' + ny = 0, \tag{1}$$

$y = x^m . v'$ satisfera à l'équation

$$y'' - \frac{m}{x} y' + ny = 0. \tag{2}$$

Plus généralement, si $y = v$ satisfait à l'équation

$$y'' + \mathrm{P}y' + ny = 0,$$

$y = v' . e^{\int \mathrm{P}dx}$ satisfera à l'équation

$$y'' - \mathrm{P}y' + ny = 0.$$

La substitution donne, en effet,

$$y'' - \mathrm{P}y' + ny = e^{\int \mathrm{P}dx}(v'' + \mathrm{P}v' + nv)' = 0.$$

Par ce théorème, l'intégration de l'équation (2) est ramenée à celle de l'équation (1), où m est supposé positif.

2. Si $y = v$ satisfait à l'équation (1), $y = \frac{1}{x} v'$ satisfera à l'équation

$$y'' + \frac{m+2}{x} y' + ny = 0. \tag{3}$$

On trouve, en effet,

$$y'' + \frac{m+2}{x} y' + ny = \frac{1}{x}\left(v'' + \frac{m}{x} v' + nv\right)' = 0.$$

Ce théorème ramène le cas général de m positif à celui de $m < 2$.

3. Si dans l'équation (1) on pose $y = x^{1-m}.u$, on aura

$$u'' + \frac{2-m}{x} u' + nu = 0. \tag{4}$$

On ramène ainsi le cas de m compris entre 1 et 2 à celui de m compris entre 0 et 1.

Le cas de m entier pair est ramené à celui $m = 0$, et celui de m entier impair à celui de $m = 1$.

4. Si v satisfait à l'équation (1), on satisfera aux équations

$$y'' + \left(\frac{2i+m}{x}\right) y' + ny = 0, \tag{5}$$

$$y'' - \left(\frac{2i+m}{x}\right) y' + ny = 0, \tag{6}$$

où l'on suppose i entier positif, par les formules

$$y = \frac{1}{x}\left\{\frac{1}{x}\left[\frac{1}{x}\cdots\left(\frac{1}{x}v'\right)'\right]'\cdots\right\}', \tag{7}$$

$$y = x^{2i+m}\left\{\frac{1}{x}\left[\frac{1}{x}\cdots\left(\frac{1}{x}v'\right)'\right]'\cdots\right\}', \tag{8}$$

la première renfermant i dérivations, et la seconde $i+1$.

C'est la conséquence immédiate des nos **1** et **2**.

5. Si dans les formules (7) et (8) on fait

$$v = c \sin x\sqrt{n} + c_1 \cos x\sqrt{n} \quad \text{pour } n \text{ positif},$$

$$v = c e^{x\sqrt{-n}} + c_1 e^{-x\sqrt{-n}} \quad \text{pour } n \text{ négatif},$$

on aura, sous forme finie, les intégrales complètes des équations (1) et (2) pour le cas de $m = 2i$ entier positif pair.

C'est le cas de $m = 0$ dans les équations (5) et (6). Alors l'équation $v'' + nv = 0$ est satisfaite par les valeurs de v données plus haut.

Les formules (7) et (8) pourront, quand m n'est pas un entier pair, servir à faciliter l'emploi de la formule qui donne y au moyen d'intégrales définies, cette formule étant en défaut quand m n'est pas compris entre 0 et 2.

Dans un Mémoire intitulé : *Nouvelles remarques sur l'équation de Riccati* (tome VI de ce Journal, page 13), M. Liouville s'exprime ainsi : « Pour que l'équation

$$y'' = y\left(A + \frac{B}{x^2}\right),$$

» où la constante A est supposée essentiellement différente de zéro,
» puisse être satisfaite en prenant pour y une fonction de x exprimable par un nombre limité de signes algébriques, exponentiels et logarithmiques, et de signes $\int$ indiquant des intégrales indéfinies relatives à la variable x, il est nécessaire et suffisant que B soit de forme $\beta(\beta+1)$, β étant un entier nul ou positif. Cette condition étant remplie, on pourra exprimer, à l'aide des signes indiqués et même à l'aide des seuls signes algébriques et exponentiels, l'intégrale complète de l'équation

$$y'' = y\left(A + \frac{B}{x^2}\right). \text{ »}$$

Or, si l'on fait $y = x^{-\frac{m}{2}} z$, l'équation

$$y'' + \frac{m}{x} y' + ny = 0$$

se réduit à

$$z'' = z\left(-n + \frac{\frac{m^2 - 2m}{4}}{x^2}\right),$$

et si l'on pose $\frac{m^2 - 2m}{4} = \beta(\beta+1)$, il en résulte

$$(m-1)^2 = (2\beta+1)^2;$$

d'où, pour m positif,

$$m = 2(\beta + 1),$$

et, pour m négatif,

$$-m = 2\beta.$$

On ne peut donc intégrer l'équation

$$y'' + \frac{m}{x} y' + ny = 0,$$

sous forme finie, que pour m pair positif ou négatif.