JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

V.-A. LEBESGUE

Extrait d'une lettre adressée à M. Liouville

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 11 (1846), p. 336-337.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1846_1_11__336_0>

EXTRAIT D'UNE LETTRE ADRESSÉE A M. LIOUVILLE,

Par M. V.-A. LEBESGUE.

« Bordeaux, le 25 juin 1846.

» ..... Un de mes collègues vous remettra sous peu une Note relative à la théorie des nombres, et la partie d'un Mémoire sur les surfaces du second degré, qui traite des parallèles qui ont pour axe un des axes principaux de la surface. C'est le cas le plus simple et le seul jusqu'ici qui m'ait conduit à quelque résultat remarquable. Vous avez vu, monsieur, par ma dernière Note, que j'appelle *parallèle d'une surface* le lieu des points de cette surface pour lesquels la normale fait un angle constant avec une droite fixe nommée *axe du parallèle*. La considération des parallèles facilite surtout la quadrature des surfaces du second degré. On parvient ainsi en quelques lignes à la formule de Legendre pour l'ellipsoïde, et l'on reconnaît, pour l'ellipsoïde et l'hyperboloïde à une nappe, l'existence d'un théorème analogue à celui de Fagnano sur les arcs d'ellipse. Quant aux théorèmes plus généraux de M. Chasles, vos dernières recherches sur les lignes géodésiques des surfaces du second degré me font douter que leur extension dépende de la théorie des parallèles. Je vous ferai remarquer, monsieur, que le théorème de M. Joachimsthal, dont on vous doit une démonstration géométrique [*] peut s'énoncer ainsi :

« Toute ligne de courbure plane est un parallèle dont l'axe est per-
» pendiculaire au plan de la courbe. »

---

[*] *Voir* page 87 du présent volume. Je profiterai de l'occasion pour ajouter la remarque suivante à l'article cité par M. Lebesgue. Il est prouvé, dans cet article, que : « le long d'une ligne de courbure quelconque, la variation infiniment petite qu'éprouve » l'angle compris entre le plan tangent à la surface et le plan osculateur de la courbe, » quand on passe d'un point à un autre point infiniment voisin, est toujours égale à

» Voici une propriété curieuse des directrices :

« Pour l'hyperboloïde à une nappe et pour le paraboloïde hyper-
» bolique, les plans menés par les directrices des sections principales
» et perpendiculairement à leurs plans, sont des parallèles. »

» Il y a un théorème analogue pour l'hyperboloïde à deux nappes.

» J'ajouterai encore que l'aire S d'un segment elliptique

$$2a\beta x^2 = \beta y^2 + \alpha z^2,$$

déterminé par le plan $x = a$, est donnée par la formule

$$S = \frac{8a\sqrt{2a\beta}}{n\sqrt{n}}\left[(1-n)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\Delta} + n\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta.\Delta - (1-n)^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{(1-n\sin^2\theta)^2\Delta}\right],$$

où l'on suppose

$$\alpha > \beta,\quad n = \frac{2a}{2a+\alpha},\quad k^2 = \left(1-\frac{\beta}{\alpha}\right).n,\quad \Delta = \sqrt{1-k^2.\sin^2\theta}.$$

» La fonction elliptique complète de troisième espèce peut être éliminée par une formule de Legendre. »

» l'angle que forment entre eux les plans osculateurs relatifs à ces deux points. » Cela posé, admettons qu'une ligne de courbure soit en même temps une ligne géodésique; l'angle du plan tangent à la surface avec le plan osculateur de la courbe sera constamment droit : sa variation étant nulle, les plans osculateurs successifs feront entre eux des angles nuls; la courbe sera donc plane. Ce dernier théorème est dû à M. Jacobi (tome II de ce Journal, page 149). Il est curieux de le retrouver ici. (J. Liouville.)