JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

AUGUSTIN CAUCHY

Note sur le développement des fonctions en séries ordonnées suivant les puissances ascendantes des variables

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 11 (1846), p. 313-330.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1846_1_11__313_0>

NOTE

Sur le développement des fonctions en séries ordonnées suivant les puissances ascendantes des variables;

PAR M. AUGUSTIN CAUCHY.

Le théorème sur la convergence de la série qu'on obtient en développant une fonction $f(x)$ de la variable réelle ou imaginaire x suivant les puissances entières et ascendantes de cette variable, se trouve énoncé pour la première fois dans le Mémoire que j'ai publié à Turin en 1832, Mémoire dont la première partie a pour objet spécial le nouveau calcul auquel j'ai donné le nom de *calcul des limites*. On lit, en effet, dans ce Mémoire, les lignes que je vais transcrire :

« *La fonction $f(x)$ sera développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de x, si le module de la variable réelle ou imaginaire x conserve une valeur inférieure à celle pour laquelle la fonction $f(x)$ cesse d'être finie et continue.* Ainsi, en particulier, puisque les fonctions

$$\cos x,\quad \sin x,\quad e^x,\quad e^{x^2},\quad \cos(1-x^2),\ldots$$

» ne cessent jamais d'être finies et continues, ces fonctions seront toujours développables en séries convergentes ordonnées suivant les puissances ascendantes de x.

» Au contraire, les fonctions

$$(1+x)^{\frac{1}{2}},\quad \frac{1}{1-x},\quad \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}},$$

» qui, lorsqu'on attribue à x une valeur imaginaire de la forme » $Xe^{p\sqrt{-1}}$, cessent d'être fonctions continues de x au moment où le

» module X devient égal à 1, seront certainement développables en
» séries convergentes ordonnées suivant les puissances ascendantes de
» la variable x, si la valeur réelle ou imaginaire de x offre un module
» inférieur à l'unité; mais elles pourront devenir et deviendront, en
» effet, divergentes, si le module de x surpasse l'unité. Enfin, comme
» les fonctions

$$e^{\frac{1}{x}}, \quad e^{\frac{1}{x^2}}, \quad \cos\frac{1}{x}, \ldots$$

» deviennent discontinues pour une valeur nulle de x, par conséquent,
» lorsque le module de x est le plus petit possible, elles ne seront jamais
» développables en séries convergentes ordonnées suivant les puissances
» ascendantes de x. »

Dans le théorème énoncé, les fonctions sont envisagées sous le rapport de la *continuité*. Donc, lorsqu'on veut appliquer le théorème, il est d'abord nécessaire de savoir en quoi consiste la continuité, pour des fonctions de variables réelles ou imaginaires.

La continuité des fonctions de variables réelles forme précisément l'objet du second paragraphe du chapitre II de mon *Analyse algébrique;* elle s'y trouve définie dans les termes suivants :

« Soit $f(x)$ une fonction de la variable x, et supposons que, pour
» chaque valeur de x intermédiaire entre deux limites données, cette
» fonction admette constamment une valeur unique et finie. Si, en
» partant d'une valeur de x comprise entre ces limites, on attribue à
» la variable x un accroissement infiniment petit α, la fonction elle-
» même recevra pour accroissement la différence

$$f(x+\alpha) - f(x),$$

» qui dépendra en même temps de la nouvelle variable α et de la va-
» leur de x. Cela posé, la fonction $f(x)$ sera, entre les deux limites
» assignées à la variable x, fonction continue de cette variable, si,
» pour chaque valeur de x intermédiaire entre ces limites, la valeur
» numérique de la différence

$$f(x+\alpha) - f(x)$$

» décroît indéfiniment avec α. En d'autres termes, *la fonction $f(x)$ res-*

» *tera continue par rapport à x entre les limites données, si entre ces*
» *limites un accroissement infiniment petit de la variable produit tou-*
» *jours un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même.*

» On dit encore que la fonction $f(x)$ est, dans le voisinage d'une » valeur particulière attribuée à la variable x, fonction continue de » cette variable, toutes les fois qu'elle est continue entre deux limites » de x, même très-rapprochées, qui renferment la valeur dont il s'agit.

» Enfin, lorsqu'une fonction $f(x)$ cesse d'être continue dans le voi- » sinage d'une valeur particulière de la variable x, on dit qu'elle de- » vient alors *discontinue*, et qu'il y a, pour cette valeur particulière, » *solution de continuité.* »

Ainsi, en résumé, *supposons que, dans la fonction $f(x)$, on fasse varier x par degrés insensibles en attribuant à cette variable une série de valeurs infiniment rapprochées les unes des autres. La fonction $f(x)$ restera continue pour toutes ces valeurs de x, si, pour chacune d'elles, elle acquiert constamment une valeur unique et finie, et si d'ailleurs un accroissement infiniment petit attribué à l'une quelconque de ces valeurs de x produit toujours un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même.*

Énoncée en ces termes, la définition des fonctions continues n'est pas seulement applicable au cas où x reste réel. On pourra l'appliquer encore, sans difficulté, au cas même où x devient imaginaire, en observant qu'il est naturel de définir les expressions imaginaires infiniment petites, comme je l'ai fait dans l'analyse algébrique, c'est-à-dire dans les termes suivants :

« Une expression imaginaire variable est appelée *infiniment petite,* » lorsqu'elle converge vers la limite zéro; ce qui suppose que, dans » l'expression donnée, la partie réelle et le coefficient de $\sqrt{-1}$ conver- » gent en même temps vers cette limite. Cela posé, représentons par

$$\alpha + 6\sqrt{-1} = \rho(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$$

» une expression imaginaire variable, α, 6 désignant deux quantités » réelles, auxquelles on peut substituer le module ρ et l'arc réel θ. » Pour que cette expression soit infiniment petite, il sera évidemment » nécessaire et suffisant que son module ρ soit lui-même infiniment » petit. »

Ces principes étant admis, soit r le module d'une variable imaginaire x, dans laquelle x désigne la partie réelle et y le coefficient de $\sqrt{-1}$. Cette variable pourra être présentée, non-seulement sous la forme

$$x = \mathrm{x} + \mathrm{y}\sqrt{-1}, \tag{1}$$

mais encore sous la forme

$$x = r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta), \tag{2}$$

ou, ce qui revient au même, sous la forme

$$x = re^{\theta\sqrt{-1}}, \tag{3}$$

θ étant un arc réel que nous appellerons l'*argument*, et les variables réelles

$$\mathrm{x},\quad \mathrm{y},\quad \theta,\quad r$$

étant liées entre elles par les formules

$$\mathrm{x} = r\cos\theta,\quad \mathrm{y} = r\sin\theta. \tag{4}$$

En vertu de ces mêmes formules, desquelles on tirera

$$r = \sqrt{\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2},$$

le module r sera complétement déterminé, mais l'argument θ admettra une infinité de valeurs exprimées par les divers termes d'une progression arithmétique dont la raison sera la circonférence 2π. On pourra d'ailleurs concevoir que x, y représentent les coordonnées rectangulaires, et θ, r les coordonnées polaires d'un point mobile P assujetti à ne pas sortir d'un plan donné. Alors, à chaque valeur donnée de la variable imaginaire x, correspondra une position déterminée du point mobile P; et il suffira, comme l'on sait, de faire varier, d'une part, le rayon vecteur r entre les limites $r = 0$, $r = \infty$; d'autre part, l'angle polaire p entre les limites $\theta = 0$, $\theta = 2\pi$, ou bien encore entre les limites $\theta = -\pi$, $\theta = +\pi$, pour obtenir successivement toutes les positions possibles du point mobile, par conséquent toutes les valeurs possibles de la variable x. Admettons, pour fixer les idées, que l'argument p varie entre les limites $-\pi$, $+\pi$. Alors, si l'on suppose successivement

$$\theta = \pi - \varepsilon,\quad \text{puis}\quad \theta = -(\pi - \varepsilon),$$

ε désignant une quantité positive infiniment petite, on trouvera, dans la première hypothèse,

$$\mathrm{x} = -r\cos\varepsilon, \quad \mathrm{y} = r\sin\varepsilon,$$
$$x = -re^{-\varepsilon\sqrt{-1}};$$

et, dans la seconde hypothèse,

$$\mathrm{x} = -r\cos\varepsilon, \quad \mathrm{y} = -r\sin\varepsilon,$$
$$x = -re^{\varepsilon\sqrt{-1}}.$$

Par suite, la valeur de x restera la même dans les deux hypothèses, et dans le passage de l'une à l'autre, la variable y, toujours sensiblement nulle, variera infiniment peu, ainsi que la variable imaginaire x, qui restera toujours très-peu différente de $-r$. Cela posé, en vertu de ce qui a été dit plus haut, la fonction $f(x)$ de la variable imaginaire x ne pourra rester fonction continue de x, dans le voisinage de la valeur particulière $x = -r$, qu'autant qu'elle variera elle-même infiniment peu quand on passera de la supposition $\theta = \pi - \varepsilon$ à la supposition $\theta = -(\pi - \varepsilon)$, ε étant aussi rapproché de zéro que l'on voudra; ce qu'on peut exprimer encore en disant que la fonction $f(x)$ ne pourra rester fonction continue de x, dans le voisinage de la valeur particulière $x = -r$, si elle ne reprend pas la même valeur, quand l'argument θ passe de la valeur π à la valeur $-\pi$.

Ces conclusions s'accordent avec les observations que j'ai eu soin de faire, dans un précédent Mémoire sur les fonctions continues. (*Voir* les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, et, en particulier, la séance du 22 juin 1844.) En effet, dans ce Mémoire, après avoir rappelé le théorème sur la convergence des séries ordonnées suivant les puissances ascendantes des variables, j'ajoutais :

« Comme cette dernière proposition peut recevoir un grand nombre » d'applications utiles, il importe de la bien préciser, et d'entrer à ce » sujet dans quelques détails.

» Considérons une variable imaginaire x. Elle sera le produit de » son module par une certaine exponentielle trigonométrique; et, pour » obtenir toutes les valeurs de la variable correspondantes à un mo- » dule donné, il suffira de faire croître l'argument de cette variable,

» c'est-à-dire l'argument de l'exponentielle trigonométrique, depuis » la limite zéro jusqu'à une circonférence entière 2π, ou, ce qui » revient au même, depuis la limite $-\pi$ jusqu'à la limite $+\pi$. Si, » tandis que l'argument varie entre ces limites, et le module entre » deux limites données, une fonction réelle ou imaginaire de x reste » continue par rapport à l'argument et au module, de manière à re- » prendre la même valeur quand l'argument passe de la limite $-\pi$ à » la limite π, cette fonction sera, entre les limites assignées au mo- » dule, ce que nous appelons une fonction continue de la variable. »

Dans une Note que renferme le présent volume (pages 129 et suiv.), M. Ernest Lamarle, après avoir rappelé le théorème qui fait l'objet du présent article, dit que, dans ce théorème, la condition de continuité est *insuffisante, à moins qu'elle n'implique une certaine périodicité de la fonction.* Il remarque, ensuite, que si la fonction

$$f\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right),$$

liée aux deux fonctions réelles

$$\varphi(r, \theta), \quad \psi(r, \theta),$$

par une équation symbolique de la forme

$$f\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right) = \varphi(r, \theta) + \sqrt{-1}\,\psi(r, \theta),$$

est développable en série convergente suivant la formule de Maclaurin, on aura nécessairement

$$\varphi(r, 0) = \varphi(r, 2\pi), \quad \psi(r, 0) = \psi(r, 2\pi);$$

puis il ajoute :

« Voilà donc une condition nouvelle reconnue tout d'abord in- » dispensable. Elle consiste en ce que les fonctions $\varphi(r, \theta)$, $\psi(r, \theta)$ sont » assujetties à reprendre les mêmes valeurs aux deux limites $\theta = 0$, » $\theta = 2\pi$. Réduite à ces termes, elle n'offre rien de surabondant et » qui ne soit essentiellement distinct des caractères propres à la conti- » nuité. »

On voit que la condition ici énoncée par M. Lamarle est précisément celle que j'ai signalée moi-même dans le *Compte rendu* de la séance du 22 juin 1844, non pas comme distincte de la condition de continuité, mais comme renfermée dans cette dernière. Si M. Lamarle, en écrivant sa Note, avait eu sous les yeux ce *Compte rendu,* spécialement le passage cité du Mémoire sur les fonctions continues, et s'il avait rapproché ce passage des principes exposés dans mon *Analyse algébrique,* il se serait certainement borné à dire que, *dans le théorème en question, la condition de continuité est la seule qu'on doive mentionner, et que cette condition implique une certaine périodicité de la fonction.*

Au reste, dire que, *dans le théorème dont il s'agit, la condition de continuité est la seule qu'on doive mentionner,* c'est dire seulement que *la fonction $f(x)$ sera développable en série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de x, si le module de la variable x conserve une valeur inférieure à celle pour laquelle la fonction cesse d'être finie et continue.* Mais je suis loin d'admettre que la discontinuité de la fonction entraîne toujours la divergence du développement, et que l'on puisse dire, avec M. Lamarle (page 137 de ce volume) :

« Toute fonction est développable en série convergente suivant la » formule de Maclaurin, tant que le module de la variable reste » moindre que la plus petite des valeurs pour laquelle la fonction » cesse d'être continue, ou de prendre la même valeur aux deux li- » mites $\theta = 0$, $\theta = 2\pi$. *Hors de là la série devient divergente.* »

J'ai précisément émis l'opinion contraire à celle qu'énonce ici M. Lamarle, dans un précédent Mémoire, où je me suis spécialement occupé *des fonctions dont les développements restent convergents, tandis qu'elles deviennent discontinues.* M. Lamarle lui-même ne pourra révoquer en doute l'existence de fonctions qui présentent ce double caractère. Il me suffira de prendre pour exemple la fonction même qu'il a choisie comme propre à montrer une application du théorème général, savoir,

$$(1 + x)^m,$$

et de considérer spécialement le cas où, le module r de x étant inférieur à l'unité, l'exposant m devient fractionnaire et de la forme $\frac{p}{q}$, p, q étant des nombres entiers.

On ne pourrait, sans introduire une étrange confusion dans le calcul, représenter par la même notation

$$x^{\frac{p}{q}}$$

toutes les valeurs de y propres à vérifier l'équation

$$y^q = x^p,$$

dans le cas où la variable

$$x = \rho e^{\theta\sqrt{-1}}$$

devient imaginaire, et l'on est bien libre assurément d'appliquer, avec M. Lamarle, la notation

$$x^{\frac{p}{q}}$$

à celle des valeurs de y qu'on tire de la formule

$$y = \rho^{\frac{p}{q}}\left(\cos\frac{p}{q}\theta + \sqrt{-1}\sin\frac{p}{q}\theta\right),$$

en y supposant θ compris entre les limites 0, 2π. Admettons pour l'instant cette hypothèse, et, après avoir ainsi fixé, dans tous les cas possibles, la valeur de la fonction

$$x^{\frac{p}{q}},$$

ou, en d'autres termes, le sens qui devra être attaché à la notation $x^{\frac{p}{q}}$, posons, comme l'a fait M. Lamarle,

(5) $$1 + r\cos\theta = \rho\cos\alpha, \quad r\sin\theta = \rho\sin\alpha,$$

en supposant ρ positif. On aura non-seulement

(6) $$\rho = \sqrt{1 + r^2 + 2r\cos\theta},$$

mais encore, en assujettissant l'argument α à demeurer compris entre les limites 0, 2π, et en posant $m = \frac{p}{q}$,

(7) $$(1 + x)^m = \left(1 + re^{\theta\sqrt{-1}}\right)^m = \rho^m(\cos m\alpha + \sqrt{-1}\sin m\alpha).$$

Supposons maintenant que, le module r étant inférieur à l'unité, on attribue successivement à x deux valeurs très-voisines de la valeur particulière

$$x = -r,$$

et que ces deux valeurs soient respectivement

$$(8)\qquad x = -re^{-\varepsilon\sqrt{-1}},\quad x = -re^{\varepsilon\sqrt{-1}},$$

ε étant un nombre infiniment petit. Les valeurs de θ correspondantes à ces deux valeurs de x seront respectivement

$$(9)\qquad \theta = \pi - \varepsilon,\quad \theta = \pi + \varepsilon.$$

D'ailleurs les formules (5) donneront, 1° pour $\theta = \pi - \varepsilon$,

$$(10)\qquad 1 - r\cos\varepsilon = \rho\cos\alpha,\quad r\sin\varepsilon = \rho\sin\alpha;$$

2° pour $\theta = \pi + \varepsilon$,

$$(11)\qquad 1 - r\cos\varepsilon = \rho\cos\alpha,\quad r\sin\varepsilon = -\rho\sin\alpha.$$

On aura donc, dans l'un et l'autre cas,

$$\cos\alpha = \frac{1 - r\cos\varepsilon}{\rho} > 0;$$

mais comme, dans le passage du premier cas au second, $\sin\alpha$ passera du positif au négatif en restant infiniment petit, il est clair que l'argument α, renfermé entre les limites 0, 2π, offrira, dans le premier cas, une valeur très-voisine de zéro; dans le second cas, une valeur très-voisine de 2π. Donc, si le module r de x est inférieur à l'unité, les deux valeurs de la fonction

$$(1 + x)^m,$$

qui correspondront aux deux valeurs infiniment voisines de x fournies par les équations (8), et, par conséquent, aux valeurs infiniment voisines de θ, fournies par les équations (9), se réduiront sensiblement aux deux valeurs qu'acquiert l'expression

$$\rho^m(\cos m\alpha + \sqrt{-1}\sin m\alpha) = \rho^m e^{m\alpha\sqrt{-1}}$$

quand on y pose successivement $\alpha = 0$ et $\alpha = 2\pi$, c'est-à-dire à ρ^m et à $\rho^m e^{2m\pi\sqrt{-1}}$. Donc la différence entre ces deux valeurs de la fonction

$(1+x)^m$ ne pourra s'évanouir que dans le cas où l'exposant m sera entier. Dans tout autre cas, la différence entre ces deux valeurs étant, non pas infiniment petite, mais finie, la fonction $(1+x)^m$ cessera d'être une fonction continue de x et même de θ, quand x acquerra une valeur réelle et négative, et offrira, pour une telle valeur, ce qu'on nomme une solution de continuité.

Donc, si l'on attribue à la notation $x^{\frac{p}{q}}$ le sens que lui a donné M. Lamarle, la fonction

$$(1+x)^{\frac{p}{q}}$$

deviendra discontinue pour un module de x inférieur à l'unité; et la convergence de son développement, dans le cas où l'on aura $r<1$, sera due, contrairement à la proposition énoncée par M. Lamarle, non plus à son caractère de fonction toujours continue, qui aura disparu, comme on vient de le voir, mais à une circonstance particulière, savoir, à l'évanouissement de la somme que j'ai désignée par Δ dans mon Mémoire sur la substitution des fonctions non périodiques aux fonctions périodiques. (*Voir* les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, séance du 10 juin 1844.)

La fonction $(1+x)^m$ reprendra, pour un module de x inférieur à l'unité, le caractère de fonction toujours continue, et, par conséquent, le théorème qui fait l'objet de cet article lui sera immédiatement applicable, si l'on attache à la notation x^m, pour le cas où m cesse d'être entier, le sens que je lui ai donné dans mon *Analyse algébrique*, en supposant que dans la formule

$$x^m = r^m(\cos m\theta + \sqrt{-1}\sin m\theta),$$

θ varie entre les limites $-\frac{\pi}{2}$, $+\frac{\pi}{2}$. On pourra même sans inconvénient généraliser cette convention et faire varier l'argument θ depuis la limite $-\pi$ jusqu'à la limite $+\pi$, pourvu qu'on ne lui permette jamais d'atteindre la limite inférieure à $-\pi$, mais seulement de s'en approcher indéfiniment. Dans l'une et l'autre hypothèse, aux deux valeurs de x, déterminées par les équations (8), répondront, en vertu des formules (10) et (11), des valeurs de α sensiblement nulles, et, par conséquent, des valeurs de $(1+x)^m$ dont la différence sera infiniment petite, aussi bien que la différence entre les deux valeurs assignées à la variable x.

Comme je l'ai remarqué dans mon *Analyse algébrique* (chap. VIII), « lorsque les constantes ou variables comprises dans une fonction » donnée, après avoir été supposées réelles, sont ensuite supposées » imaginaires, la notation à l'aide de laquelle on exprimait la fonction » dont il s'agit ne peut être conservée dans le calcul qu'en vertu de » conventions nouvelles, propres à fixer le sens de cette notation dans » la dernière hypothèse. » D'après ce qu'on vient de voir, la nature des conventions a une influence marquée sur le caractère des fonctions considérées comme continues; de sorte qu'en passant d'un système de conventions à un autre, on peut rendre discontinues des fonctions qui étaient continues, et réciproquement. D'après cette remarque, il n'y a pas lieu de s'étonner que les développements de certaines fonctions restent convergents, dans le cas où ces fonctions deviennent discontinues, puisqu'en modifiant les conventions admises, on peut quelquefois enlever à une fonction dont le développement était convergent le caractère de continuité. Pour rendre plus souvent applicable le théorème sur la convergence des développements, il est évidemment utile d'adopter les conventions qui conservent ce caractère le plus longtemps possible aux fonctions employées dans le calcul.

Cherchons à fixer, d'après ce principe, le sens qu'il serait bon d'attacher aux deux notations

$$\mathrm{l}(x), \quad x^m,$$

la lettre l indiquant un logarithme népérien, et m un exposant quelconque, positif ou négatif, entier ou fractionnaire, réel ou imaginaire. Il est d'abord évident que, si l'on convient d'étendre à des valeurs quelconques, réelles ou imaginaires, de x et de m la formule

$$x^m = e^{m\,\mathrm{l}(x)}, \tag{12}$$

qu'il est facile d'établir quand x et m sont réels, x étant positif, la question se trouvera réduite à la recherche de l'expression imaginaire qu'on devra représenter par $\mathrm{l}(x)$. Or, la variable x étant imaginaire et déterminée par l'équation (3), les divers logarithmes népériens de x seront les diverses valeurs de y, propres à vérifier la formule

$$e^y = x,$$

et ces diverses valeurs seront celles que fournit l'équation

$$y = \mathrm{l}(r) + \theta\sqrt{-1},$$

dans laquelle $\mathrm{l}(r)$ désigne le logarithme népérien et réel du module r, quand on attribue successivement à l'argument θ toutes les valeurs qu'il peut recevoir. Mais les calculs n'offriraient plus rien de précis, si l'on représentait par la seule notation $\mathrm{l}(x)$ ces diverses valeurs. Il importe donc de choisir l'une d'entre elles, pour lui appliquer cette notation. D'ailleurs, la variable

$$x = re^{\theta\sqrt{-1}}$$

pourra successivement acquérir toutes les valeurs possibles, si l'on fait varier le module r entre les limites $r = 0$, $r = \infty$, et l'argument p entre les limites

$$p = \varphi - \pi, \quad p = \varphi + \pi,$$

φ désignant un angle fini quelconque, en excluant même une de ces limites. Donc le sens de la notation $\mathrm{l}(x)$ se trouvera complétement fixé pour chaque valeur de x, si l'on prend

$$(13) \qquad \mathrm{l}(x) = \mathrm{l}(r) + \theta\sqrt{-1},$$

en supposant que l'argument p varie entre les limites $\varphi - \pi$, $\varphi + \pi$, sans pouvoir jamais atteindre une de ces deux limites. D'autre part, comme dans le cas où x est réel et positif, on est convenu de représenter par $\mathrm{l}(x)$ le logarithme réel de x, il faudra que, dans l'équation (13), θ se réduise à zéro quand x sera réduit à r; par conséquent, il faudra que la valeur zéro de l'argument θ soit comprise entre les limites $\varphi - \pi$, $\varphi + \pi$. Cette dernière condition se trouve remplie lorsqu'on suppose $\varphi = 0$ ou $\varphi = \pi$, c'est-à-dire lorsqu'on fait varier θ de 0 à 2π, en excluant la limite supérieure 2π, ou de $-\pi$ à $+\pi$, en excluant la limite inférieure $-\pi$; ou même plus généralement lorsqu'on attribue à l'angle φ une valeur comprise entre les limites 0, π, en excluant l'une des deux limites de θ.

Entre les trois suppositions que nous venons d'indiquer, les deux premières sont les plus simples, et l'on pourrait être tenté de choisir la première, comme l'a fait M. Lamarle. Mais il importe d'observer qu'alors les fonctions

$$\mathrm{l}(x), \quad x^m$$

cesseraient d'être continues dans le voisinage de valeurs réelles et positives de x, ce qui ne serait pas sans inconvénient. Il en résulterait, par exemple, que, pour des valeurs du module r inférieures à l'unité, les deux fonctions

$$\mathrm{l}(1+x), \quad (1+x)^m$$

ne seraient plus des fonctions toujours continues de x et de θ, comme dans le cas où l'on pose $\varphi = 0$. Au contraire, lorsqu'on adopte la seconde supposition, c'est-à-dire lorsqu'on fait varier θ depuis la limite $-\pi$ exclusivement jusqu'à la limite π inclusivement, les deux expressions

$$\mathrm{l}(1+x), \quad (1+x)^m$$

restent fonctions continues de x, pour toute valeur du module r inférieure à l'unité. En effet, posons

$$(14) \qquad 1 + re^{\theta\sqrt{-1}} = \rho e^{\alpha\sqrt{-1}},$$

l'argument α étant assujetti, comme l'argument θ, à varier entre la limite $-\pi$ et la limite π sans jamais atteindre la limite inférieure. On aura, comme ci-dessus,

$$1 + r\cos\theta = \rho\cos\alpha, \quad r\sin\theta = \rho\sin\alpha;$$

par conséquent,

$$\cos\alpha = \frac{1 + r\cos\theta}{\rho} > 0, \quad \sin\alpha = \frac{r}{\rho}\sin\theta,$$

et, tandis que l'argument θ variera entre les limites $-\pi$, $+\pi$, en passant par la valeur zéro, l'argument α, toujours compris entre les limites $-\frac{\pi}{2}$, $+\frac{\pi}{2}$, puisque son cosinus sera positif, variera, avec x, par degrés insensibles, et passera de la valeur zéro à la valeur $-\arcsin r$, puis reviendra de celle-ci à la valeur zéro, puis, ensuite, passera de la valeur zéro à la valeur arc sin r, puis, enfin, reviendra de celle-ci à la valeur zéro, c'est-à-dire à sa valeur primitive. D'ailleurs, α variant avec x, comme on vient de le voir, par degrés insensibles, et le module

$$\rho = \sqrt{1 + r^2 + 2r\cos\theta}$$

jouissant évidemment de la même propriété, il est clair que les fonctions $1(1+x)$, $(1+x)^m$, dont les valeurs seront déterminées par les équations

$$1(1+x) = 1(\rho) + \alpha\sqrt{-1},$$

$$(1+x)^m = e^{m1(1+x)} = \rho^m e^{m\alpha\sqrt{-1}},$$

seront, pour $r < 1$, des fonctions continues de la variable imaginaire x.

Eu égard à ces considérations, il paraît convenable de fixer le sens des deux notations

$$1(x), \quad x^m,$$

à l'aide des formules (12), (13), ou, ce qui revient au même, à l'aide de la formule (13) et de la suivante:

$$x^m = r^m e^{m\theta\sqrt{-1}}, \tag{15}$$

en assujettissant l'argument θ de x à varier depuis la limite $-\pi$ exclusivement jusqu'à la limite π inclusivement [*].

En reproduisant, dans les *Exercices d'Analyse*, le théorème sur la convergence du développement de $f(x)$ en série ordonnée suivant les puissances ascendantes de x, j'ai mentionné, comme condition de con-

---

[*] Depuis la rédaction de cet article, en parcourant le Mémoire que M. Björling a publié sur le développement d'une puissance quelconque réelle ou imaginaire d'un binôme, j'ai trouvé, au bas d'une page, une note où il est dit que cet auteur a présenté à l'Académie d'Upsal une Dissertation sur l'utilité qu'il peut y avoir à conserver dans le calcul les deux notations x^a, $1(x)$, dans le cas même où la partie réelle de x est négative. M. Björling verra que, sur ce point, je suis d'accord avec lui; il reste à savoir si les conventions auxquelles il aura eu recours, pour fixer complétement, dans tous les cas, le sens des notations x^a, $1(x)$, sont exactement celles que j'ai adoptées moi-même; et, pour le savoir, je suis obligé d'attendre qu'il me soit possible de connaître la Dissertation dont il s'agit.

vergence, non-seulement la continuité de $f(x)$, comme je l'avais fait en 1832, mais encore la continuité de $f'(x)$. Toutefois, une remarque de M. Liouville ayant ramené mon attention sur cet objet, m'a engagé à l'examiner de nouveau dans un Mémoire sur quelques propositions fondamentales du calcul des résidus et sur la théorie des intégrales singulières. (*Voir* les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, séance du 16 décembre 1844.) On trouve, en effet, dans ce Mémoire, le passage suivant :

« J'observerai que j'ai déduit constamment les divers théorèmes » précédemment rappelés (ceux qui sont relatifs au résidu intégral » d'une fonction), et les théorèmes analogues, d'un principe fonda- » mental établi dans mes Mémoires de 1814 et de 1822. Comme je l'ai » reconnu dans ces Mémoires, la différence entre les deux valeurs » d'une intégrale double, dans laquelle la fonction sous le signe $\int$ peut » s'intégrer en termes finis par rapport à l'une quelconque des deux » variables que l'on considère, se trouve exprimée par une intégrale » définie singulière. Ce principe unique suffit pour montrer que, » dans le théorème relatif au développement des fonctions en séries, » on pourrait à la rigueur se passer de la considération des fonctions » dérivées. Il en résulte donc, conformément à l'observation judicieuse » que M. Liouville me faisait dernièrement à cet égard, qu'entre les » deux énoncés du théorème, donnés dans mon Mémoire de 1831, et » dans mes *Exercices d'Analyse*, il semblerait convenable de choisir » le premier. Toutefois, lorsqu'il s'agit du développement des fonc- » tions en séries, la considération des fonctions dérivées me paraît ne » devoir pas être entièrement abandonnée, attendu que très-souvent, » comme je l'ai dit ailleurs, cette considération est précisément celle » qui sert à déterminer les modules des séries. »

Évidemment, M. Lamarle n'a point connu ce passage puisqu'il ne le cite point, quoiqu'il reproduise la remarque, qu'on peut omettre la condition de continuité en ce qui concerne la dérivée.

Avant de terminer cet article, je ferai encore une remarque. La démonstration que j'ai donnée du théorème dans le Mémoire qui a pour titre : *Considérations nouvelles sur le théorème des suites et sur les lois de leur convergence* (tome I$^{\text{er}}$ des *Exercices d'Analyse*, pages 269 et suivantes) repose sur l'établissement de quelques équations qui, réduites à des formules de calcul intégral par la réduction de certains accroissements supposés très-petits à la limite zéro, fournissent, quand on se sert des notations ci-dessus admises, les résultats suivants.

La formule (1) du § I^er du Mémoire cité donne

$$(16)\qquad \int_0^{2\pi} e^{\theta\sqrt{-1}} f'\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right) d\theta = 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{D}_r f\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right) d\theta = 0.$$

Les formules (6), (8), (10) du même paragraphe donnent

$$(17)\qquad \mathrm{D}_r \int_0^{2\pi} f\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right) d\theta = \int_0^{2\pi} \mathrm{D}_r f\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right) d\theta,$$

$$(18)\qquad \mathrm{D}_r \int_0^{2\pi} f\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right) d\theta = 0,$$

$$(19)\qquad \int_0^{2\pi} f\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right) d\theta = \text{constante}.$$

Or les formules (16), (17), (18), (19) sont précisément les équations fondamentales desquelles M. Lamarle a déduit aussi la démonstration du théorème. (*Voir* les pages 132 et 133 du présent volume.)

J'observerai, en finissant, que la démonstration du théorème énoncé pourrait encore se déduire de la formule générale établie pour l'intégration des différentielles exactes dans mes *Leçons sur le calcul infinitésimal.* En vertu de cette formule, si l'on pose

$$(20)\quad du = \varphi(x, y, z,\ldots)\,dx + \chi(x, y, z,\ldots)\,dy + \psi(x, y, z,\ldots)\,dz + \ldots,$$

les expressions

$$\varphi(x, y, z,\ldots),\quad \chi(x, y, z,\ldots),\quad \psi(x, y, z,\ldots),\ldots$$

étant des fonctions $x, y, z,\ldots$ continues, du moins entre certaines limites, et choisies de manière que le second membre de la formule (14) satisfasse aux conditions d'intégrabilité, et si d'ailleurs on assujettit la fonction u à s'évanouir pour certaines valeurs

$$x_0,\quad y_0,\quad z_0,\ldots$$

de

$$x, \quad y, \quad z, \ldots,$$

respectivement comprises entre les limites dont il s'agit, on aura, comme il est facile de le prouver,

$$u = \int_{x_0}^{x} \varphi(x, y, z, \ldots)\, dx + \int_{y_0}^{y} \chi(x_0, y, z, \ldots)\, dy$$
$$+ \int_{z_0}^{z} \psi(x_0, y_0, z, \ldots)\, dz + \ldots.$$

Or, cette formule devant subsister quand on échangera entre elles les variables $x, y, z, \ldots$, fournira, par suite, plusieurs valeurs de u, qui, dans l'hypothèse admise, devront être égales entre elles. On aura, par exemple, si les variables $x, y, z, \ldots$ se réduisent à deux,

$$\int_{x_0}^{x} \varphi(x, y)\, dx + \int_{y_0}^{y} \chi(x_0, y)\, dy = \int_{y_0}^{y} \chi(x, y)\, dy + \int_{x_0}^{x} \varphi(x, y_0)\, dx,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\int_{x_0}^{x} [\varphi(x, y) - \varphi(x, y_0)]\, dx = \int_{y_0}^{y} [\chi(x, y) - \chi(x_0, y)]\, dy;$$

puis, en nommant x, y des valeurs particulières de x, y comprises, comme x_0, y_0, entre les limites entre lesquelles les fonctions

$$\varphi(x, y), \quad \chi(x, y)$$

restent continues, on trouvera

$$(21) \qquad \int_{x_0}^{\mathrm{x}} [\varphi(x, y) - \varphi(x, y_0)]\, dx = \int_{y_0}^{\mathrm{y}} [\chi(\mathrm{x}, y) - \chi(x_0, y)]\, dy.$$

Si, maintenant, on remplace x et y par d'autres variables r, θ, liées à une variable imaginaire x par l'équation (2), et la différentielle

$$\varphi(x, y)\, dx + \chi(x, y)\, dy$$

par l'expression

$$f(re^{\theta\sqrt{-1}})\, d(re^{\theta\sqrt{-1}}) = e^{\theta\sqrt{-1}} f(re^{\theta\sqrt{-1}}) \left[dr + r\, d\theta \sqrt{-1}\right],$$

les fonctions

$$\varphi(x, y), \quad \chi(x, y)$$

se trouveront remplacées par les suivantes :

$$e^{\theta\sqrt{-1}} f\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right), \quad re^{\theta\sqrt{-1}}\sqrt{-1}\, f\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right).$$

Supposons d'ailleurs que

$$f(x) = f\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right)$$

reste toujours fonction continue de x pour des valeurs de r comprises entre les limites

$$r = r_0, \quad r = R,$$

et prenons $-\pi$, $+\pi$ pour limites de l'argument θ. On tirera de la formule (21)

$$(22) \qquad \int_{-\pi}^{\pi} e^{\theta\sqrt{-1}} \left[R f\left(Re^{\theta\sqrt{-1}}\right) - r_0 f\left(r_0 e^{\theta\sqrt{-1}}\right)\right] d\theta = 0.$$

Enfin, si l'on pose $r_0 = 0$ dans la formule (16), elle donnera

$$(23) \qquad \int_{-\pi}^{\pi} z f(z)\, dp = 0,$$

la valeur de z étant

$$z = Re^{\theta\sqrt{-1}}.$$

L'équation (23) suppose seulement que la fonction $f(z)$ reste continue entre les limites o et R du module de z. Si, dans cette même équation, on remplace $f(z)$ par $\frac{f(z)-f(x)}{z-x}$, alors, en supposant le module r de x inférieur au module R de z, on trouvera

$$(24) \qquad f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{z}{z-x} f(z)\, d\theta;$$

puis, en développant le rapport $\frac{z}{z-x}$ suivant les puissances ascendantes de x, on obtiendra la formule de Maclaurin, qui subsistera, ainsi que la formule (24), tant que le module de x conservera une valeur inférieure à celle par laquelle la fonction $f(x)$ cessera d'être finie et continue.