JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

MICHAEL ROBERTS

Sur les surfaces dont les rayons de courbure sont égaux, mais dirigés en sens opposés

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 11 (1846), p. 300-312.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1846_1_11__300_0>

Sur les surfaces dont les rayons de courbure sont égaux, mais dirigés en sens opposés;

PAR M. MICHAEL ROBERTS.

C'est un géomètre français, l'illustre Monge, qui le premier a donné l'intégrale de l'équation aux différences partielles appartenant aux surfaces dont les rayons de courbure sont égaux, et de signes contraires. Monge a trouvé que ce genre de surface peut être représenté par le système des équations

$$(1)\qquad \begin{cases} x = u + v, \\ y = \varphi(u) + \psi(v), \\ z = \sqrt{-1}\left[\int\sqrt{1+(\varphi' u)^2}\,du + \int\sqrt{1+(\psi' v)^2}\,dv\right], \end{cases}$$

où $\varphi(u)$, $\psi(v)$ sont des fonctions arbitraires des quantités indépendantes u et v. En adoptant les notations habituelles des coefficients à différentielles partielles, et n'écrivant que les caractéristiques des fonctions arbitraires, nous aurons, en désignant par R la quantité $1 + \varphi'\psi' - \sqrt{(1+\varphi'^2)(1+\psi'^2)}$,

$$p = \frac{\sqrt{-1}}{\psi'-\varphi'}\left(\psi'\sqrt{1+\varphi'^2} - \varphi'\sqrt{1+\psi'^2}\right),$$

$$q = \frac{\sqrt{-1}}{\psi'-\varphi'}\left(\sqrt{1+\psi'^2} - \sqrt{1+\varphi'^2}\right),$$

$$r = \frac{\mathrm{R}\sqrt{-1}}{(\psi'-\varphi')^3}\left(\frac{\psi'^2\varphi''}{\sqrt{1+\varphi'^2}} - \frac{\varphi'^2\psi''}{\sqrt{1+\psi'^2}}\right),$$

$$s = -\frac{\mathrm{R}\sqrt{-1}}{(\psi'-\varphi')^3}\left(\frac{\psi'\varphi''}{\sqrt{1+\varphi'^2}} - \frac{\varphi'\psi''}{\sqrt{1+\psi'^2}}\right),$$

$$t = \frac{\mathrm{R}\sqrt{-1}}{(\psi'-\varphi')^3}\left(\frac{\varphi''}{\sqrt{1+\varphi'^2}} - \frac{\psi''}{\sqrt{1+\psi'^2}}\right),$$

$$1 + p^2 = -\frac{2\mathrm{R}\varphi'\psi'}{(\psi'-\varphi')^2},\quad pq = \frac{\mathrm{R}(\varphi'+\psi')}{(\psi'-\varphi')^2},\quad 1 + q^2 = -\frac{2\mathrm{R}}{(\psi'-\varphi')^2}.$$

Si l'on substitue les valeurs précédentes dans l'équation des lignes de courbure, savoir,

$$\frac{dy^2}{dx^2}[(1+q^2)s-pqt]+\frac{dy}{dx}[(1+q^2)r-(1+p^2)t] \\ -[(1+p^2)s-pqr]=0,$$

on obtiendra, en négligeant les facteurs communs,

$$\frac{dy^2}{dx^2}\left(\frac{\varphi''}{\sqrt{1+\varphi'^2}}+\frac{\psi''}{\sqrt{1+\psi'^2}}\right)-2\frac{dy}{dx}\left(\frac{\psi'\varphi''}{\sqrt{1+\varphi'^2}}+\frac{\varphi'\psi''}{\sqrt{1+\psi'^2}}\right) \\ +\frac{\psi'^2\varphi''}{\sqrt{1+\varphi'^2}}+\frac{\varphi'^2\psi''}{\sqrt{1+\psi'^2}}=0,$$

ou

$$\frac{\varphi''}{\sqrt{1+\varphi'^2}}\left(\frac{dy}{dx}-\psi'\right)^2+\frac{\psi''}{\sqrt{1+\psi'^2}}\left(\frac{dy}{dx}-\varphi'\right)^2=0.$$

Mais on a, par le système des équations (1),

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\varphi'\,du+\psi'\,dv}{du+dv}.$$

Donc

$$\frac{\varphi''}{\sqrt{1+\varphi''}}\,du^2+\frac{\psi''}{\sqrt{1+\psi'^2}}\,dv^2=0.$$

Ainsi les équations des lignes de courbure se trouveront déterminées par le système des équations (1) et par l'équation suivante:

$$(2)\qquad \int\frac{\sqrt{\varphi''}}{\sqrt[4]{1+\varphi'^2}}\,du\pm\sqrt{-1}\int\frac{\sqrt{\psi''}}{\sqrt[4]{1+\psi'^2}}\,dv=c.$$

Si l'on voulait calculer le rayon de courbure d'une section normale de la surface, il faudrait se rappeler l'expression

$$\rho=\frac{\sqrt{1+p^2+q^2}\left[1+p^2+2pq\frac{dy}{dx}+(1+q^2)\frac{dy^2}{dx^2}\right]}{r+2s\frac{dy}{dx}+t\frac{dy^2}{dx^2}}\,[*],$$

---

[*] Voyez *Analyse appliquée à la géométrie de trois dimensions*, par C.-F.-A. Leroy, page 265.

et par la substitution des valeurs de p, q, r, s, t déjà données, il viendrait

$$\rho = -\frac{2R\left(\frac{dy}{dx}-\varphi'\right)\left(\frac{dy}{dx}-\psi'\right)}{\frac{\varphi''}{\sqrt{1+\varphi'^2}}\left(\frac{dy}{dx}-\psi'\right)^2-\frac{\psi''}{\sqrt{1+\psi'^2}}\left(\frac{dy}{dx}-\varphi'\right)^2},$$

ou

$$\rho = \frac{2R\frac{du}{dv}}{\frac{\varphi''}{\sqrt{1+\varphi'^2}}\cdot\frac{du^2}{dv^2}-\frac{\psi''}{\sqrt{1+\psi'^2}}}.$$

Nous nommerons *génératrices* de la surface les courbes telles que les rayons de courbure des sections normales qui passent par leurs tangentes aient une valeur infinie. D'après cette définition, on voit avec facilité que leurs équations seront données par le système (1) et par l'équation

$$(3)\qquad \int\frac{\sqrt{\varphi''}}{\sqrt[4]{1+\varphi'^2}}du \pm \int\frac{\sqrt{\psi''}}{\sqrt[4]{1+\psi'^2}}dv = c.$$

Si deux courbes situées sur la surface passent par le même point, cherchons l'angle qu'elles forment entre elles. Pour cela, supposons que les courbes sont déterminées respectivement par les équations différentielles

$$du = P dv,\quad du = P' dv;$$

et soient α, β, γ, α', β', γ' les angles que les tangentes menées aux courbes par le point de leur intersection forment avec les axes coordonnés. On aura donc

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds} = \frac{1+P}{\sqrt{2RP}},$$

$$\cos\beta = \frac{dy}{ds} = \frac{P\varphi'+\psi'}{\sqrt{2RP}},$$

$$\cos\gamma = \frac{dz}{ds} = \frac{\sqrt{-1}\,(P\sqrt{1+\varphi'^2}+\sqrt{1+\psi'^2})}{\sqrt{2RP}},$$

et, pareillement,

$$\cos \alpha' = \frac{1 + P'}{\sqrt{2RP'}}, \quad \cos \beta' = \frac{P'\varphi' + \psi'}{\sqrt{2RP'}}, \quad \cos \gamma' = \frac{\sqrt{-1}\,(P'\sqrt{1+\varphi'^2} + \sqrt{1+\psi'^2})}{\sqrt{2RP}};$$

et si l'on désigne par λ l'angle cherché, on a

$$\cos\lambda = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma',$$

d'où

$$\cos\lambda = \frac{P + P'}{2\sqrt{PP'}},$$

ou

$$\tang\lambda = \sqrt{-1}\cdot\frac{P - P'}{P + P'}.$$

Il suit de là que les *génératrices* qui passent par un point se coupent à angle droit, et forment avec les lignes de courbure qui passent par le même point un angle égal à 45 degrés, ce qui s'accorde bien avec la théorie qui a été donnée par M. Dupin dans ses *Développements de Géométrie*. En effet, les *génératrices* sont telles, qu'en chacun de leurs points elles ont pour tangente l'asymptote de l'hyperbole *indicatrice*, qui, dans le cas que nous considérons, est équilatère partout [*]. En général, l'équation du système des courbes qui coupent, sous un angle donné (λ), toutes les courbes auxquelles appartient l'équation différentielle

$$du = P\,dv,$$

sera

$$du = (\cos 2\lambda \pm \sqrt{-1}\sin 2\lambda)\,P\,dv.$$

On parvient à l'expression de l'aire de la surface en fonction de u et v en remplaçant, dans la formule

$$S = \iint \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,dx\,dy,$$

---

[*] Il est bon d'observer que les courbes que nous avons nommées *les génératrices* sont appelées par M. Dupin *les lignes asymptotiques*. (Voyez les *Développements de Géométrie*, page 189.)

$\sqrt{1+p^2+q^2}$ par $\frac{R\sqrt{-1}}{\psi'-\varphi'}$, et $dx\,dy$ par $(\psi'-\varphi')\,du\,dv$; on aura donc

$$(4) \qquad S = \sqrt{-1}\iint R\,du\,dv,$$

ou bien, en se rappelant la valeur de R,

$$S = \sqrt{-1}\left(\int du \int dv + \int \varphi' du \int \psi' dv - \int \sqrt{1+\varphi'^2}\, du \int \sqrt{1+\psi'^2}\, dv\right).$$

Le système des équations (1) fait connaître une propriété de la surface qui a été remarquée par Lagrange, savoir, que, dans ce système, la fonction $\frac{pdy-qdx}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$ est une différentielle exacte. En effet, si l'on transforme cette fonction en fonction de u et v, on trouve

$$\frac{pdy-qdx}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \sqrt{1+\varphi'^2}\,du - \sqrt{1+\psi'^2}\,dv,$$

ce qui démontre la propriété énoncée.

Il s'agit de particulariser les fonctions φ et ψ, d'après la condition que la surface est réglée ou engendrée par une droite. Les équations de cette droite seront

$$y = \alpha x + \beta, \quad z = \gamma x + \delta,$$

α étant un paramètre variable, et β, γ, δ représentant des fonctions de ce paramètre. Je vais montrer que le paramètre α peut s'exprimer avec simplicité en fonction des quantités u et v.

Puisque

$$y - \alpha x = f(\alpha),$$

on a

$$\frac{d(y-\alpha x)}{du}\frac{d\alpha}{dv} = \frac{d(y-\alpha x)}{dv}\frac{d\alpha}{du},$$

ce qui donne

$$(\varphi'-\alpha)\frac{d\alpha}{dv} = (\psi'-\alpha)\frac{d\alpha}{du};$$

mais, en considérant sur la droite deux points infiniment voisins, on a

$$\alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{\varphi'\frac{du}{dv}+\psi'}{1+\frac{du}{dv}}:$$

en déduisant la valeur de $\frac{du}{dv}$ de l'équation (3), et en posant

$$P = \frac{\sqrt{\varphi''}}{\sqrt[4]{1+\varphi'^2}}, \quad Q = \frac{\sqrt{\psi''}}{\sqrt[4]{1+\psi'^2}},$$

ce qui donne

$$\frac{du}{dv} = \frac{Q}{P},$$

on a donc

(5) $$\alpha = \frac{Q\varphi' + P\psi'}{P+Q};$$

par suite, il viendra

(6) $$Q\frac{d\alpha}{du} + P\frac{d\alpha}{dv} = 0.$$

Si l'on déduit les valeurs de $\frac{d\alpha}{du}$, $\frac{d\alpha}{dv}$ de l'équation (5), et que l'on substitue dans l'équation (6), on aura

$$Q^2\left[\varphi''(P+Q) + \frac{dP}{du}(\psi' - \varphi')\right] + P^2\left[\psi''(P+Q) - \frac{dQ}{dv}(\psi' - \varphi')\right] = 0,$$

ou

$$(P+Q)(Q^2\varphi'' + P^2\psi'') = (\psi' - \varphi')\left(P^2\frac{dQ}{dv} - Q^2\frac{dP}{du}\right).$$

Mais cette dernière, en se rappelant les valeurs des quantités P, Q, peut s'écrire sous la forme

$$(P+Q)\left(\frac{Q^2\varphi'\varphi''}{\sqrt{1+\varphi'^2}} + \frac{P^2\psi'\psi''}{\sqrt{1+\psi'^2}}\right) = \left(\sqrt{1+\psi'^2} - \sqrt{1+\varphi'^2}\right)\left(P^2\frac{dQ}{dv} - Q^2\frac{dP}{du}\right),$$

ou

$$Q\frac{d\gamma}{du} + P\frac{d\gamma}{dv} = 0,$$

en vertu de l'équation

$$\gamma = \frac{dz}{dx} = \sqrt{-1}\,\frac{Q\sqrt{1+\varphi'^2} + P\sqrt{1+\psi'^2}}{P+Q}.$$

Il s'ensuit donc que les équations (5), (6) expriment que β, γ, δ sont fonctions du paramètre α, et par l'équation (6) on a

(7) $$\alpha = F\left(\int P\,du - \int Q\,dv\right).$$

En vertu des équations (5), (7), nous aurons

$$\frac{Q\varphi' + P\psi'}{P+Q} = F\left(\int P\,du - \int Q\,dv\right),$$

et, en éliminant la fonction F, on déduit

$$\frac{(P+Q)\varphi'' + \frac{dP}{du}(\psi'-\varphi')}{(P+Q)\psi'' - \frac{dQ}{dv}(\psi'-\varphi')} = -\frac{P^2}{Q^2},$$

ou

$$\frac{P+Q+\frac{dP}{d\varphi'}(\psi'-\varphi')}{P+Q-\frac{dQ}{d\psi'}(\psi'-\varphi')} = -\frac{\sqrt{1+\psi'^2}}{\sqrt{1+\varphi'^2}},$$

d'où

$$\frac{dP}{d\varphi'} + (P+Q)\left(\frac{\sqrt{1+\varphi'^2}+\sqrt{1+\psi'^2}}{(\psi'-\varphi')\sqrt{1+\varphi'^2}}\right) = \frac{dQ}{d\psi'}\cdot\frac{\sqrt{1+\psi'^2}}{\sqrt{1+\varphi'^2}}.$$

Cette dernière, étant intégrée par rapport à P et φ', donne

$$(8)\qquad P+Q-(\psi'-\varphi')\frac{dQ}{d\psi'} = \frac{\left[1+\varphi'\psi'-\sqrt{(1+\varphi'^2)(1+\psi'^2)}\right][Q+f(\psi')]}{1+\psi'^2},$$

en mettant la quantité introduite par intégration sous la forme $f(\psi')$. En intégrant ensuite par rapport à Q et ψ', on a aussi

$$(9)\qquad P+Q+(\psi'-\varphi')\frac{dP}{d\varphi'} = \frac{\left[1+\varphi'\psi'-\sqrt{(1+\varphi'^2)(1+\psi'^2)}\right][P+f_1(\varphi')]}{1+\varphi'^2}.$$

En différentiant les équations (8), (9) respectivement par rapport à φ' et ψ', on trouve

$$(10)\qquad \frac{dP}{d\varphi'} + \frac{dQ}{d\psi'} = \frac{Q+f(\psi')}{1+\psi'^2}\left(\frac{\psi'\sqrt{1+\varphi'^2}-\varphi'\sqrt{1+\psi'^2}}{\sqrt{1+\varphi'^2}}\right),$$

$$(11)\qquad \frac{dP}{d\varphi'} + \frac{dQ}{d\psi'} = \frac{P+f_1(\varphi')}{1+\varphi'^2}\left(\frac{\varphi'\sqrt{1+\psi'^2}-\psi'\sqrt{1+\varphi'^2}}{\sqrt{1+\psi'^2}}\right),$$

d'où

$$\frac{Q+f(\psi')}{\sqrt{1+\psi'^2}} = -\frac{P+f_1(\varphi')}{\sqrt{1+\varphi'^2}}.$$

Mais, à cause de l'indépendance de u et v, cette égalité ne peut subsister qu'autant que chaque membre se réduira à une même constante. Représentons-la donc par $C\sqrt{-1}$, et nous aurons ainsi, en différentiant les équations (10), (11) respectivement par rapport à φ' et ψ',

$$\frac{d^2P}{d\varphi'^2} = -\frac{C\sqrt{-1}}{(1+\varphi'^2)^{\frac{3}{2}}},\quad \frac{d^2Q}{d\psi'^2} = \frac{C\sqrt{-1}}{(1+\psi'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

d'où

$$P = A + B\varphi' - C\sqrt{-1}.\sqrt{1+\varphi'^2}, \tag{12}$$

$$Q = A' + B'\psi' + C\sqrt{-1}.\sqrt{1+\psi'^2}. \tag{13}$$

En substituant les valeurs de $\frac{dP}{d\varphi'}$, $\frac{dQ}{d\psi'}$, déduites de ces dernières, dans l'une ou l'autre des équations (10), (11), on obtient

$$B + B' = 0,$$

et pareillement, en vertu des équations (8), (9), on a

$$A + A' = 0.$$

On voit donc que les équations (12), (13) peuvent être écrites sous la forme

$$P = A + B\varphi' - C\sqrt{-1}.\sqrt{1+\varphi'^2},$$

$$Q = C\sqrt{-1}.\sqrt{1+\psi'^2} - A - B\psi',$$

d'où

$$\frac{P}{Q} = \frac{g + h\varphi' - \sqrt{-1}.\sqrt{1+\varphi'^2}}{\sqrt{-1}.\sqrt{1+\psi'^2} - g - h\psi'}, \tag{14}$$

en posant

$$\frac{A}{C} = g,\quad \frac{B}{C} = h.$$

Il est facile de démontrer que la droite qui engendre la surface demeure toujours parallèle à un plan donné. En effet, l'équation de toutes les sections de la surface parallèles au plan dont l'équation est

$$z = gx + hy$$

sera

$$\frac{du}{dv} = \frac{\sqrt{-1}.\sqrt{1+\psi'^2} - g - h\psi'}{g + h\varphi' - \sqrt{-1}.\sqrt{1+\varphi'^2}}.$$

Mais, à cause de la formule (14), cette équation est identique avec celle des *génératrices* (3).

Nous regarderons le plan *directeur* comme étant le plan des x, y, ce qui donne

$$g = 0, \quad h = 0;$$

on trouve donc

$$\frac{\sqrt{\varphi''}\cdot\sqrt[4]{1+\psi'^2}}{\sqrt{\psi''}\cdot\sqrt[4]{1+\varphi'^2}} = -\frac{\sqrt{1+\varphi'^2}}{\sqrt{1+\psi'^2}},$$

ou

$$\frac{\varphi''}{(1+\varphi'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\psi''}{(1+\psi'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Il faudra donc que les quantités $\frac{\varphi''}{(1+\varphi'^2)^{\frac{3}{2}}}$, $\frac{\psi''}{(1+\psi'^2)^{\frac{3}{2}}}$ aient la même valeur constante. Posons-la égale à $c\sqrt{-1}$, ce qui donne

$$\varphi = \frac{\sqrt{-1}}{c}\sqrt{1+c^2u^2}, \quad \psi = \frac{\sqrt{-1}}{c}\sqrt{1+c^2v^2}.$$

Nous n'ajouterons pas les constantes introduites par ces dernières intégrations, parce qu'on peut toujours les anéantir en déplaçant les axes parallèlement à eux-mêmes. En vertu des valeurs que nous avons trouvées pour φ et ψ, le système des équations (1) deviendra (en posant $c = 1$, ce qui ne diminuera pas la généralité du résultat)

$$(15) \qquad \left\{\begin{aligned} x &= u + v,\\ y &= \sqrt{-1}\,(\sqrt{1+u^2} + \sqrt{1+v^2}),\\ z &= \sqrt{-1}\,[\log(u+\sqrt{1+u^2}) + \log(v+\sqrt{1+v^2})].\end{aligned}\right.$$

Pour arriver à l'équation de la surface en x, y, z, en éliminant les quantités u et v entre les trois dernières équations (15), nous poserons

$$u = \sqrt{-1}\sin\lambda, \quad v = \sqrt{-1}\sin\mu;$$

nous aurons donc

$$(16) \qquad \left\{\begin{aligned} x &= \sqrt{-1}\,(\sin\lambda + \sin\mu),\\ y &= \sqrt{-1}\,(\cos\lambda + \cos\mu),\\ z &= -(\lambda+\mu),\end{aligned}\right.$$

d'où l'on tire enfin

$$\frac{z}{2} = -\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang}\frac{x}{y}\right).$$

Cette dernière équation appartient à un héliçoïde à plan directeur. Cette propriété de l'héliçoïde a été démontrée pour la première fois par M. E. Catalan dans le tome VII de ce Journal, page 211.

Je vais appliquer la formule (2) à la détermination des lignes de courbure de l'héliçoïde. En vertu des valeurs de φ et ψ déjà trouvées, l'équation (2) devient

$$\frac{du}{\sqrt{1+u^2}} \pm \sqrt{-1}.\frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} = 0;$$

en intégrant et employant les quantités λ, μ, on aura donc

$$\lambda \pm \sqrt{-1}\,\mu = A \pm \sqrt{-1}\,B,$$

ou

$$(17) \qquad \lambda + \mu - (A + B) = \pm\sqrt{-1}\left[A - B - (\lambda - \mu)\right].$$

Posons

$$x = r\sin\omega, \quad y = r\cos\omega,$$

d'où, par les équations (16),

$$(18) \qquad r = 2\sqrt{-1}\cos\frac{\lambda-\mu}{2}, \quad \omega = \frac{\lambda+\mu}{2}.$$

Si nous combinons ces dernières avec l'équation (17), en posant

$$A + B = 2\alpha, \quad A - B = \pi,$$

pour faire disparaître les imaginaires, nous trouverons

$$\pm r = \varepsilon^{(\omega-\alpha)} - \varepsilon^{-(\omega-\alpha)}$$

pour l'équation des lignes de courbure. Cette équation a été donnée aussi par M. Catalan, dans le XXIX^e cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, page 143.

Il s'agit de déterminer l'aire de l'héliçoïde. Pour cela, la formule (4) donne, en faisant usage des quantités λ, μ,

$$S = \sqrt{-1}\iint\left[1 - \cos(\lambda - \mu)\right] d\lambda\, d\mu.$$

Si l'on voulait évaluer la portion de l'aire engendrée par une longueur constante de la génératrice terminée à l'axe des z, il faudra poser

$$\lambda + \mu = \xi, \quad \lambda - \mu = \eta,$$

ce qui changera la dernière intégrale dans la suivante :

$$S = \frac{\sqrt{-1}}{2}\int_0^\alpha \int_0^\beta (1 - \cos\eta)\, d\xi\, d\eta,$$

ce qui donnera

$$(19) \qquad S = \frac{\alpha\sqrt{-1}}{2}(\beta - \sin\beta).$$

Si l'on désigne par a la longueur constante de la génératrice, et par θ l'angle entre ses positions extrêmes, on aura, par les équations (18),

$$a = 2\sqrt{-1}\cos\frac{\beta}{2}, \quad \theta = \frac{\alpha}{2},$$

d'où

$$\sqrt{-1}.\beta = \log\left(\frac{a\sqrt{4+a^2} - 2 - a^2}{2}\right), \qquad \sqrt{-1}\sin\beta = \frac{a\sqrt{4+a^2}}{2};$$

et par ces valeurs, l'équation (19) se trouvera transformée en

$$S = \theta\left[\log\left(\frac{a\sqrt{4+a^2} - 2 - a^2}{2}\right) - \frac{a\sqrt{4+a^2}}{2}\right].$$

Si le système des équations (1) représente une surface de révolution, cherchons les formes des fonctions φ et ψ. Pour cela, prenons pour l'axe de révolution l'axe des z, et, attendu que les sections de la surface parallèles au plan des x, y sont les lignes de courbure, l'équation

$$dz = 0$$

équivaut à l'équation (2), en adoptant l'un des signes ambigus ; d'où l'on déduit

$$\frac{1+\psi'^2}{1+\varphi'^2} = -\frac{\psi''\sqrt{1+\varphi'^2}}{\varphi''\sqrt{1+\psi'^2}},$$

ou

$$\frac{\varphi''}{(1+\varphi'^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\psi''}{(1+\psi'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Et, par une analyse semblable à celle que nous avons déjà employée, on trouvera que, pour une surface de révolution, le système des équations (1) deviendra

$$(20) \qquad \begin{cases} x = u + v, \\ y = \sqrt{1-u^2} - \sqrt{1-v^2}, \\ z = -\sqrt{-1}\left[\operatorname{arc}(\cos u) + \operatorname{arc}(\cos v)\right]. \end{cases}$$

Pour éliminer les quantités u et v entre ces dernières, nous poserons

$$u = \cos\lambda, \quad v = \cos\mu,$$

d'où nous aurons

$$(21) \qquad \begin{cases} x = \cos\lambda + \cos\mu, \\ y = \sin\lambda - \sin\mu, \\ z = -\sqrt{-1}\,(\lambda + \mu), \end{cases}$$

d'où l'on tire

$$(22) \qquad \frac{z}{2} = -\log\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x^2+y^2-4}}{2}\right).$$

Cette surface est produite par une chaînette tournant autour de sa *directrice* [*].

Pour trouver l'équation des *génératrices* de la surface, nous renverrons à l'équation (3), qui, en ayant égard aux équations (20), devient

$$\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \pm \frac{dv}{\sqrt{1-v^2}} = 0,$$

d'où, en introduisant les quantités λ, μ et intégrant ensuite, nous conclurons

$$\lambda \pm \sqrt{-1}\,\mu = A \pm \sqrt{-1}\,B,$$

ou

$$\lambda - \mu - (A - B) = \pm\sqrt{-1}\left[A + B - (\lambda + \mu)\right].$$

---

[*] Cet exemple a été donné par M. de Morgan dans son ouvrage intitulé *Differential and integral calculus with elementary illustrationes*.

Posons donc

$$x = r\cos\omega, \quad y = r\sin\omega;$$

on a, par les équations (21),

$$(23) \qquad \sqrt{r^2 - 4} = 2\sqrt{-1}\,\sin\frac{\lambda+\mu}{2}, \quad \omega = \frac{\lambda-\mu}{2},$$

et, en prenant

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} = 0, \quad \mathrm{A} - \mathrm{B} = 2\alpha,$$

on déduit, pour l'équation cherchée,

$$\pm\sqrt{r^2 - 4} = \varepsilon^{(\omega-\alpha)} - \varepsilon^{-(\omega-\alpha)},$$

ou

$$r = \varepsilon^{(\omega-\alpha)} + \varepsilon^{-(\omega-\alpha)}.$$

Pour terminer ces applications, nous allons chercher l'expression de l'aire de la surface représentée par l'équation (22). Pour une zone de la surface terminée par le plan des x, y et un plan parallèle, la formule (4) donne, en employant les quantités λ, μ,

$$\mathrm{S} = 4\sqrt{-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{-\lambda}^{\alpha-\lambda}[1 + \cos(\lambda+\mu)]\,d\lambda\,d\mu,$$

d'où

$$(24) \qquad \mathrm{S} = 2\pi\sqrt{-1}\,(\alpha + \sin\alpha).$$

Mais, à cause des formules (23), on a

$$r = 2\cos\frac{\alpha}{2}, \quad \sqrt{r^2-4} = 2\sqrt{-1}\,\sin\frac{\alpha}{2},$$

d'où

$$\sqrt{-1}.\alpha = 2\log\left(\frac{r+\sqrt{r^2-4}}{2}\right), \quad \sqrt{-1}\,\sin\alpha = \frac{r\sqrt{r^2-4}}{2},$$

et, par ces valeurs, la formule (24) deviendra

$$\mathrm{S} = 2\pi\left[2\log\left(\frac{r+\sqrt{r^2-4}}{2}\right) + \frac{r\sqrt{r^2-4}}{2}\right],$$

ce qui coïncide avec le résultat des formules ordinaires.