JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Lettres sur diverses questions d'analyse et de physique mathématique concernant l'ellipsoïde, adressées à M. P.-H. Blanchet, deuxième lettre

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 11 (1846), p. 261-290.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1846_1_11__261_0>

LETTRES

SUR DIVERSES QUESTIONS

D'ANALYSE ET DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

CONCERNANT L'ELLIPSOÏDE,

ADRESSÉES A M. P.-H. BLANCHET,

Par J. LIOUVILLE.

DEUXIÈME LETTRE.

Monsieur,

Je dois commencer par remplir une lacune (plus apparente pourtant que réelle) dans ma première Lettre, à l'endroit où de l'équation (I) je conclus l'équation (III). En rappelant la démonstration du théorème de Green d'après lequel la fonction

$$u = \int\int \frac{\lambda' d\omega'}{\Delta} - \frac{\text{SMN}}{\text{S}'},$$

qu'on savait d'abord être nulle pour $\rho = \rho'$ et $\rho = \infty$, l'est également pour toutes les valeurs de ρ comprises entre ρ' et ∞, j'ai soin de dire que dans l'espace extérieur à l'ellipsoïde (ρ'), u et les dérivées partielles de u satisfont constamment à la condition d'être fonctions continues de x, y, z ou ρ, μ, ν; mais je n'ajoute aucune preuve de ce fait : or, on pourrait craindre qu'il n'eût pas lieu, si la fonction R s'évanouissait pour des valeurs de $\rho > \rho'$; les doutes tiendraient à la présence du facteur R^2 placé en dénominateur sous le signe intégral dans l'expression de S, savoir,

$$\text{S} = (2n+1)\text{R} \int_\rho^\infty \frac{d\rho}{\text{R}^2 \sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}}.$$

Si donc l'équation $\text{R} = 0$ avait une ou plusieurs racines réelles ρ entre les limites c et ∞, et si ρ_0 désignait la plus grande de ces racines, on pourrait croire que notre analyse ne s'applique avec sûreté qu'aux valeurs de $\rho' > \rho_0$. Au fond la difficulté n'est pas sérieuse. Cependant, pour dissiper tout nuage, je vais prouver que l'équation $R = 0$ ne peut offrir aucune racine $> c$.

Mais avant de le faire, j'observe que, même dans l'hypothèse opposée, nos formules subsistant en prenant $\rho' > \rho_0$, on arriverait encore à l'équation

$$\int\int l \mathrm{MNM_1N_1} \, d\omega = 0,$$

que nous avons obtenue, et sur laquelle, du reste, l'étendue plus ou moins grande des valeurs de ρ n'a aucune influence, puisque ρ n'entre ni dans le produit $l d\omega$, ni dans les fonctions M, N, $\mathrm{M_1}$, $\mathrm{N_1}$, ni dans les limites de l'intégrale qui se rapporte à μ et ν seulement. Il suit de cette équation que les racines B sont réelles; nous n'aurons donc point à nous occuper de valeurs imaginaires de B.

Considérons l'équation

$$\frac{d^2 v}{dt^2} = pv,$$

t étant une variable qui croît à partir de zéro, et p une fonction de t, positive et finie quand t l'est elle-même. L'intégrale de cette équation s'exprimera par les séries convergentes connues,

$$v = \mathrm{A}\left(1 + \int_0^t dt \int_0^t p dt + \ldots\right) + \mathrm{A}'\left(t + \int_0^t dt \int_0^t t p dt + \ldots\right);$$

A et A′ sont les valeurs initiales de v et de sa dérivée, et si l'une d'elles est nulle, il est clair que le signe de l'autre déterminera généralement le signe des quantités v, $\frac{dv}{dt}$, dont les valeurs absolues seront d'ailleurs des fonctions croissantes de t. Nous ne parlons pas du cas où l'on aurait à la fois $\mathrm{A} = 0$, $\mathrm{A}' = 0$; la fonction v serait alors identiquement nulle. Mais quand une seule des quantités A, A′ est nulle, il est impossible que l'on ait soit $v = 0$, soit $\frac{dv}{dt} = 0$, pour $t > 0$.

Cela étant, je prends la fonction M qui est composée en μ comme R l'est en ρ, sauf le changement qu'on a pu faire de $\sqrt{\rho^2 - c^2}$ en $\sqrt{c^2 - \mu^2}$;

M vérifiera l'équation différentielle

$$(\mu^2 - b^2)(\mu^2 - c^2)\frac{d^2 M}{d\mu^2} + [2\mu^3 - (b^2 + c^2)\mu]\frac{dM}{d\mu} = [n(n+1)\mu^2 - B]M.$$

La variable μ restant comprise entre b et c, je pose

$$t = \int_b^\mu \frac{d\mu}{\sqrt{(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)}},$$

et cette équation devient

$$\frac{d^2 M}{dt^2} = [B - n(n+1)\mu^2] M.$$

Pour $t = 0$, c'est-à-dire pour $\mu = b$, on a

$$M = 0$$

si $\sqrt{\mu^2 - b^2}$ est facteur de M, et

$$\frac{dM}{dt} = \frac{dM}{d\mu}\sqrt{(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)} = 0$$

si ce facteur n'existe pas. En admettant pour toutes les valeurs de μ l'inégalité

$$B > n(n+1)\mu^2, \quad \text{ou} \quad B - n(n+1)\mu^2 > 0,$$

on tomberait donc dans les conditions du lemme précédent, et il faudrait en conclure que, pour $t > 0$, on ne peut avoir ni $M = 0$, ni $\frac{dM}{dt} = 0$. Or il est clair que l'une de ces équations a nécessairement lieu pour la valeur de t qui répond à $\mu = c$, savoir, la première si $\sqrt{c^2 - \mu^2}$ est facteur de M, et la seconde s'il ne l'est pas. Il faut donc que l'on ait

$$B < n(n+1)\mu^2,$$

au moins pour une partie des valeurs de μ; et de là résulte, à fortiori,

$$B < n(n+1)c^2 < n(n+1)\rho^2 \text{ [*]}.$$

---

[*] En se servant de la fonction N, on trouverait de même $B > 0$. Voilà donc deux limites pour les valeurs des racines B. Ces limites $n(n+1)c^2$ et 0 peuvent être atteintes dans les cas extrêmes de $b = c$ et de $b = 0$.

Ainsi, dans l'équation

$$\frac{d^2 R}{d\varepsilon^2} = [n(n+1)\rho^2 - B] R,$$

le coefficient de R est essentiellement positif. On a

$$\varepsilon = \int \frac{d\rho}{\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}},$$

et l'on peut prendre c pour limite inférieure de l'intégrale. Alors $\rho = c$ donnera $\varepsilon = 0$. Donc R s'évanouira pour $\varepsilon = 0$ si $\sqrt{\rho^2 - c^2}$ est facteur de R, et, si R n'a pas ce facteur, l'équation

$$\frac{dR}{d\varepsilon} = \frac{dR}{d\rho}\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}$$

nous montre que l'on aura $\frac{dR}{d\varepsilon} = 0$ pour $\varepsilon = 0$. Nous voilà encore dans les conditions du lemme ci-dessus; et l'impossibilité de l'équation $R = 0$ pour $\rho > c$, impossibilité que nous avions surtout en vue, se trouve démontrée. On peut ajouter que R étant à très-peu près égale à ρ^n, et partant positive, pour les valeurs de ρ très-grandes, doit être, d'après notre analyse, une fonction de ρ sans cesse croissante et toujours positive depuis $\rho = c$ jusqu'à $\rho = \infty$. La dérivée $\frac{dR}{d\varepsilon}$ jouit évidemment de la même propriété. Toutefois, une de ces deux fonctions R, $\frac{dR}{d\varepsilon}$, est nulle pour $\rho = c$.

C'est la condition d'une valeur nulle pour $\rho = \infty$, qui fait qu'on doit prendre S et non pas R dans la formule (III) à laquelle on arrive par des intégrations effectuées dans l'espace infini extérieur à (ρ'). C'est une condition de continuité nécessaire dans nos calculs pour la valeur particulière $\rho = c$, qui fait qu'on doit avoir R et non pas S dans la formule (II) obtenue en intégrant dans tout l'espace intérieur à (ρ'). Les produits RMN, SMN jouissent, au reste, l'un et l'autre de la propriété, tout à fait essentielle ici, d'avoir en chaque point (x, y, z) de l'espace une valeur unique qui se retrouve toujours la même lorsque, après des variations quelconques, x, y, z redeviennent les mêmes.

Les remarques précédentes sur la démonstration que je vous ai donnée des formules (A), (B), (C) découlent de la nature même des choses, et l'on doit les retrouver explicitement ou implicitement dans chacune des démonstrations qu'on pourra imaginer pour les formules dont nous parlons. Il en est ainsi, en effet, pour toutes celles que j'ai obtenues. Ces démonstrations pourtant peuvent être présentées sous des formes très-diverses. En voici une qui me paraît digne de quelque attention; elle a l'avantage de ne pas supposer qu'on ait démontré, à priori, l'existence d'une fonction λ' satisfaisant à l'équation

$$\int\int \frac{\lambda' d\omega'}{\Delta} = \text{MN}, \quad \text{pour} \quad \rho = \rho'.$$

Dans cette démonstration nouvelle, on considère les polynômes RMN, R'M'N', relatifs à deux points (x, y, z), (x', y', z') dont le premier est quelconque, mais dont le second, situé à la distance Δ du premier, doit prendre successivement toutes les positions possibles seulement dans l'intérieur d'un certain ellipsoïde déterminé par une valeur particulière de ρ', et dont il s'agira toujours ici quand nous parlerons de l'ellipsoïde (ρ'). Il y aura deux manières d'effectuer sur l'intégrale triple

$$(a) \quad \int\int\int \left(\frac{d.\text{R}'\text{M}'\text{N}'}{dx'} \frac{d\frac{1}{\Delta}}{dx'} + \frac{d.\text{R}'\text{M}'\text{N}'}{dy'} \frac{d\frac{1}{\Delta}}{dy'} + \frac{d.\text{R}'\text{M}'\text{N}'}{dz'} \frac{d\frac{1}{\Delta}}{dz'} \right) dx'dy'dz',$$

étendue à tout cet espace intérieur, une intégration par parties. On a, par exemple,

$$dy'dz' \int \frac{d.\text{R}'\text{M}'\text{N}'}{dx'} \frac{d\frac{1}{\Delta}}{dx'} dx' = \frac{dy'dz'}{\Delta} \frac{d.\text{R}'\text{M}'\text{N}'}{dx'} - dy'dz' \int \frac{dx'}{\Delta} \frac{d^2.\text{R}'\text{M}'\text{N}'}{dx'^2}.$$

La valeur de

$$\int\int\int \frac{d.\text{R}'\text{M}'\text{N}'}{dx'} \frac{d\frac{1}{\Delta}}{dx'} dx'dy'dz'$$

sera donc composée de deux termes séparés. L'un d'eux est l'intégrale triple, prise négativement,

$$-\int\int\int \frac{dx'dy'dz'}{\Delta} \frac{d^2.\text{R}'\text{M}'\text{N}'}{dx'^2};$$

pour former l'autre, il faut observer que, dans l'intégrale définie relative à x', les limites se rapportent à la surface de l'ellipsoïde (ρ');

en exprimant $dy'dz'$ au moyen de l'élément $d\omega'$ de cette surface, et de l'angle α' que la normale à $d\omega'$, menée extérieurement, fait avec l'axe des x, on trouve facilement (je n'insisterai pas sur une méthode si connue) l'expression finale suivante:

$$\int\int \frac{\cos\alpha'\, d\omega'}{\Delta} \frac{d.\mathrm{R'M'N'}}{dx'}.$$

La valeur complète de l'intégrale (a) est donc

$$\int\int \frac{d\omega'}{\Delta}\left(\frac{d.\mathrm{R'M'N'}}{dx'}\cos\alpha' + \frac{d.\mathrm{R'M'N'}}{dy'}\cos\beta' + \frac{d.\mathrm{R'M'N'}}{dz'}\cos\gamma'\right)$$
$$-\int\int\int \frac{dx'dy'dz'}{\Delta}\left(\frac{d^2.\mathrm{R'M'N'}}{dx'^2} + \frac{d^2.\mathrm{R'M'N'}}{dy'^2} + \frac{d^2.\mathrm{R'M'N'}}{dz'^2}\right).$$

Mais cette valeur peut être simplifiée beaucoup. D'abord la seconde ligne disparaît d'elle-même, puisque l'on a identiquement

$$\frac{d^2.\mathrm{R'M'N'}}{dx'^2} + \frac{d^2.\mathrm{R'M'N'}}{dy'^2} + \frac{d^2.\mathrm{R'M'N'}}{dz'^2} = 0.$$

Quant à la première, j'observe que, dans la quantité entre parenthèses qui multiplie $d\omega'$, on doit, après avoir effectué les différentiations indiquées, mettre pour x', y', z' les valeurs qui conviennent à cet élément $d\omega'$. D'un point de cet élément faisons partir une normale ds' extérieure à l'ellipsoïde (ρ'); le long de ds', ρ' seule variera, et nous avons vu que

$$ds' = \frac{d\rho'}{h'} = \frac{d\rho'}{l'\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}};$$

la variation correspondante de $\mathrm{R'M'N'}$ sera, en conséquence,

$$ds'\frac{d.\mathrm{R'M'N'}}{ds'} = ds'\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}.l'\frac{d\mathrm{R'}}{d\rho'}\mathrm{M'N'}.$$

Mais ds' fait avec les axes des coordonnées x, y, z, les angles α', β', γ'. En passant d'une des extrémités de ds' à l'autre, les coordonnées x', y', z' augmenteront donc de

$$ds'\cos\alpha', \quad ds'\cos\beta', \quad ds'\cos\gamma';$$

la variation de $\mathrm{R'M'N'}$ peut donc encore s'exprimer par

$$ds'\left(\frac{d.\mathrm{R'M'N'}}{dx'}\cos\alpha' + \frac{d.\mathrm{R'M'N'}}{dy'}\cos\beta' + \frac{d.\mathrm{R'M'N'}}{dz'}\cos\gamma'\right).$$

De cette double expression d'une même quantité, nous concluons qu'on peut, sous le signe $\int$, au lieu de

$$\frac{d.\mathrm{R'M'N'}}{dx'}\cos\alpha' + \frac{d.\mathrm{R'M'N'}}{dy'}\cos\beta' + \frac{d.\mathrm{R'M'N'}}{dz'}\cos\gamma',$$

écrire

$$\sqrt{\rho'^2 - b^2}\,\sqrt{\rho'^2 - c^2}.l'\,\frac{d\mathrm{R'}}{d\rho'}\,\mathrm{M'N'}.$$

En mettant en dehors les facteurs constants, la valeur définitive de l'intégrale (a) se trouve donc être

$$(b)\qquad \sqrt{\rho'^2 - b^2}\,\sqrt{\rho'^2 - c^2}\,\frac{d\mathrm{R'}}{d\rho'}\int\!\!\int\frac{l'\mathrm{M'N'}d\omega'}{\Delta}.$$

Mais l'intégration par parties aurait pu être dirigée d'une autre manière, pour ainsi dire inverse, en prenant pour point de départ la formule

$$\int\frac{d.\mathrm{R'M'N'}}{dx'}\,\frac{d\frac{1}{\Delta}}{dx'}dx' = -\frac{d}{dx}\int\frac{d.\mathrm{R'M'N'}}{dx'}\,\frac{dx'}{\Delta} = \mathrm{R'M'N'}\,\frac{d\frac{1}{\Delta}}{dx'} - \frac{d^2}{dx^2}\int\mathrm{R'M'N'}\,\frac{dx'}{\Delta}.$$

De là on aurait conclu pour l'intégrale (a) cette valeur

$$\int\!\!\int\mathrm{R'M'N'}\left(\frac{d\frac{1}{\Delta}}{dx'}\cos\alpha' + \frac{d\frac{1}{\Delta}}{dy'}\cos\beta' + \frac{d\frac{1}{\Delta}}{dz'}\cos\gamma'\right)d\omega'$$
$$-\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}\right)\int\!\!\int\!\!\int\mathrm{R'M'N'}\,\frac{dx'dy'dz'}{\Delta}.$$

A l'aide du procédé même dont on vient à l'instant de faire usage, la première ligne peut s'exprimer ainsi,

$$\int\!\!\int\mathrm{R'M'N'}\,\frac{d\frac{1}{\Delta}}{ds'}\,d\omega'.$$

Quant à la seconde, elle est nulle si le point (x, y, z) est extérieur à l'ellipsoïde (ρ'), c'est-à-dire si ρ surpasse ρ'. Mais elle est différente de zéro et égale à $4\pi\mathrm{RMN}$ si l'on a $\rho < \rho'$. Voilà donc une nouvelle valeur de l'intégrale (a); c'est

$$R'\int\int M'N'\frac{d\frac{1}{\Delta}}{ds'}d\omega', \quad \text{pour} \quad \rho > \rho',$$

et

$$R'\int\int M'N'\frac{d\frac{1}{\Delta}}{ds'}d\omega' + 4\pi RMN, \quad \text{pour} \quad \rho < \rho'.$$

Comparant avec la valeur (b), il s'ensuit pour les deux cas respectifs de $\rho > \rho'$ et de $\rho < \rho'$, les deux formules

$$\sqrt{\rho'^2 - b^2}\,\sqrt{\rho'^2 - c^2}.\frac{dR'}{d\rho'}\int\int\frac{l'M'N'd\omega'}{\Delta} = R'\int\int M'N'\frac{d\frac{1}{\Delta}}{ds'}d\omega',$$

et

$$\sqrt{\rho'^2 - b^2}\,\sqrt{\rho'^2 - c^2}.\frac{dR'}{d\rho'}\int\int\frac{l'M'N'd\omega'}{\Delta} = R'\int\int M'N'\frac{d\frac{1}{\Delta}}{ds'}d\omega' + 4\pi RMN.$$

En conservant au point (x, y, z) la même position, mais prenant (x', y', z') au dehors de l'ellipsoïde (ρ'), et considérant, au lieu de l'intégrale (a), l'intégrale analogue

$$\int\int\int\left(\frac{d.S'M'N'}{dx'}\frac{d\frac{1}{\Delta}}{dx'} + \frac{d.S'M'N'}{dy'}\frac{d\frac{1}{\Delta}}{dy'} + \frac{d.S'M'N'}{dz'}\frac{d\frac{1}{\Delta}}{dz'}\right)dx'dy'dz',$$

dans laquelle la sommation s'étend à tout l'espace infini extérieur à (ρ'), on trouve de même

$$\sqrt{\rho'^2 - b^2}\,\sqrt{\rho'^2 - c^2}.\frac{dS'}{d\rho'}\int\int\frac{l'M'N'd\omega'}{\Delta} = S'\int\int M'N'\frac{d\frac{1}{\Delta}}{ds'}d\omega' - 4\pi SMN,$$

pour $\rho > \rho'$, et

$$\sqrt{\rho'^2 - b^2}\,\sqrt{\rho'^2 - c^2}.\frac{dS'}{d\rho'}\int\int\frac{l'M'N'd\omega'}{\Delta} = S'\int\int M'N'\frac{d\frac{1}{\Delta}}{ds'}d\omega',$$

pour $\rho < \rho'$.

Les deux formules relatives au cas de $\rho > \rho'$, savoir,

$$\sqrt{\rho'^2 - b^2}\,\sqrt{\rho'^2 - c^2}\cdot\frac{dR'}{d\rho'}\int\!\!\int\frac{l'M'N'd\omega'}{\Delta} = R'\int\!\!\int M'N'\frac{d\frac{1}{\Delta}}{ds'}d\omega',$$

et

$$\sqrt{\rho'^2 - b^2}\,\sqrt{\rho'^2 - c^2}\cdot\frac{dS'}{d\rho'}\int\!\!\int\frac{l'M'N'd\omega'}{\Delta} = S'\int\!\!\int M'N'\frac{d\frac{1}{\Delta}}{ds'}d\omega' - 4\pi SMN,$$

étant multipliées, la première par S′, la seconde par R′, et retranchées, donnent

$$\sqrt{\rho'^2 - b^2}\,\sqrt{\rho'^2 - c^2}\left(S'\frac{dR'}{d\rho'} - R'\frac{dS'}{d\rho'}\right)\int\!\!\int\frac{l'M'N'd\omega'}{\Delta} = 4\pi R'SMN,$$

laquelle, en se rappelant que

$$S'\frac{dR'}{d\rho'} - R'\frac{dS'}{d\rho'} = \frac{2n+1}{\sqrt{(\rho'^2 - b^2)(\rho'^2 - c^2)}},$$

devient enfin la formule

$$\text{(C)}\qquad \int\!\!\int\frac{l'M'N'd\omega'}{\Delta} = \frac{4\pi R'SMN}{2n+1},\quad \text{pour}\quad \rho > \rho',$$

dont on a de la sorte une seconde démonstration. En combinant les deux équations qui supposent $\rho < \rho'$, on arriverait de même à la formule (B).

Mais notre analyse conduit en même temps aux formules (D), (E) que j'ai indiquées à la fin de ma première Lettre. Pour obtenir, par exemple, la formule (D), rappelez-vous que l'on a, pour $\rho > \rho'$,

$$\sqrt{\rho'^2 - b^2}\,\sqrt{\rho'^2 - c^2}\cdot\frac{dR'}{d\rho'}\int\!\!\int\frac{l'M'N'd\omega'}{\Delta} = R'\int\!\!\int M'N'\frac{d\frac{1}{\Delta}}{ds'}d\omega'.$$

Or

$$\frac{d\frac{1}{\Delta}}{ds'} = -\frac{1}{\Delta^2}\frac{d\Delta}{ds'}:$$

$\frac{d\Delta}{ds'}$ exprime évidemment au signe près le cosinus de l'angle υ' compris entre la normale à $d\omega'$, menée extérieurement à l'ellipsoïde (ρ'), et la droite qui va de $d\omega'$ au point (x, y, z); on a donc

$$\frac{d\frac{1}{\Delta}}{ds'} = \frac{\cos\upsilon'}{\Delta^2}.$$

De là résulte

$$R' \int\int \frac{M'N'\cos\upsilon'\,d\omega'}{\Delta^2} = \sqrt{\rho'^2 - b^2}\,\sqrt{\rho'^2 - c^2}.\frac{dR'}{d\rho'}\int\int \frac{l'M'N'd\omega'}{\Delta}.$$

Il suffit maintenant de remplacer dans le second membre l'intégrale qui s'y trouve par sa valeur que fournit l'équation (C), puis de diviser par R'. Le résultat sera précisément la formule (D).

Quelque facile que soit la méthode que je viens d'employer pour démontrer les formules (D), (E), il y en a une plus facile et plus rapide encore. Je dis, en effet, que la formule (D) résulte de la formule

$$\text{(C)} \qquad \int\int \frac{l'M'N'd\omega'}{\Delta} = \frac{4\pi R'SMN}{2n+1}, \quad \text{pour} \quad \rho > \rho',$$

par une simple différentiation relative au paramètre ρ'. Il semble d'abord qu'une telle différentiation doive être compliquée au moins pour le premier membre. Mais rappelez-vous que $l'd\omega'$ ne contient pas ρ', mais seulement μ' et ν', quantités qui varient entre des limites fixes, et auxquelles se rapporte l'intégration; M' et N' sont aussi indépendants de ρ', il suffit donc de différentier $\frac{1}{\Delta}$; et comme

$$\frac{d\frac{1}{\Delta}}{d\rho'} = \frac{1}{h'}\frac{d\frac{1}{\Delta}}{ds'} = \frac{\cos\upsilon'}{\Delta^2.l'\sqrt{(\rho'^2-b^2)(\rho'^2-c^2)}},$$

vous avez

$$\int\int \frac{M'N'\cos\upsilon'd\omega'}{\Delta^2.\sqrt{(\rho'^2-b^2)(\rho'^2-c^2)}} = \frac{4\pi SMN}{2n+1}\frac{dR'}{d\rho'},$$

d'où résulte

$$\int\int \frac{M'N'\cos\upsilon'\,d\omega'}{\Delta^2} = \frac{4\pi\sqrt{(\rho'^2-b^2)(\rho'^2-c^2)}}{2n+1}\frac{dR'}{d\rho'}SMN, \quad \text{pour} \quad \rho > \rho',$$

c'est-à-dire la formule (D). En différentiant la formule (B), on arriverait de même à la formule (E).

Il n'est donc pas indispensable, pour démontrer les formules (D), (E), de combiner deux équations de la forme

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}=0, \qquad \frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2v}{dy^2}+\frac{d^2v}{dz^2}=0,$$

et l'on peut suivre une route plus courte que celle dont je vous parlais dans ma première Lettre. Les combinaisons de cette espèce n'en ont pas moins beaucoup d'utilité. Permettez-moi de vous montrer ici comment on en déduit la formule

$$\int\int l\mathrm{MNM}_1\mathrm{N}_1 d\omega = 0.$$

On multiplie par $dx\,dy\,dz$, et l'on intègre l'équation

$$v\frac{d^2u}{dx^2}-u\frac{d^2v}{dx^2}+v\frac{d^2u}{dy^2}-u\frac{d^2v}{dy^2}+v\frac{d^2u}{dz^2}-u\frac{d^2v}{dz^2}=0.$$

Étendons l'intégration à tous les points compris dans l'intérieur d'une surface fermée quelconque, en admettant que, dans cet espace, les fonctions u, v et leurs dérivées n'éprouvent aucune discontinuité. Les deux premiers termes s'intègrent d'abord par rapport à x, les deux suivants par rapport à y, les deux derniers enfin par rapport à z. Introduisons l'élément $d\omega$ de la surface par laquelle les intégrations sont limitées, et désignons par ds la longueur d'une normale infiniment petite, de sorte qu'en passant de l'élément à l'extrémité de la normale, u et v éprouvent les variations

$$\frac{du}{ds}ds, \qquad \frac{dv}{ds}ds;$$

nous trouverons, en définitive,

$$\int\int v\frac{du}{ds}d\omega=\int\int u\frac{dv}{ds}d\omega.$$

Je ne m'arrête pas aux détails du calcul; ils sont très-familiers aux géomètres, et d'ailleurs nous venons déjà d'effectuer une transformation du même genre.

Je prends maintenant pour surface fermée l'ellipsoïde (ρ), et, en conséquence, je remplace ds par sa valeur

$$\frac{d\rho}{h}, \quad \text{ou} \quad \frac{d\rho}{l\sqrt{(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)}};$$

les dérivées où entrait ds seront alors rapportées à ρ seule, et, en supprimant le diviseur commun

$$\sqrt{\rho^2-b^2}\sqrt{\rho^2-c^2},$$

on aura

$$(c) \qquad \int\int lv\frac{du}{d\rho}d\omega = \int\int lu\frac{dv}{d\rho}d\omega.$$

Soient donc

$$u = \mathrm{RMN}, \quad v = \mathrm{R}_1\mathrm{M}_1\mathrm{N}_1,$$

les fonctions R, R_1 répondant soit à deux valeurs de n différentes, soit à une même valeur de n, mais à deux valeurs de B distinctes. Ces expressions de u et v satisfont évidemment aux conditions imposées plus haut. En les adoptant, l'équation (c) devient

$$\mathrm{R}_1\frac{d\mathrm{R}}{d\rho}\int\int l\mathrm{MNM}_1\mathrm{N}_1 d\omega = \mathrm{R}\frac{d\mathrm{R}_1}{d\rho}\int\int l\mathrm{MNM}_1\mathrm{N}_1 d\omega,$$

d'où

$$\left(\mathrm{R}_1\frac{d\mathrm{R}}{d\rho} - \mathrm{R}\frac{d\mathrm{R}_1}{d\rho}\right)\int\int l\mathrm{MNM}_1\mathrm{N}_1 d\omega = 0.$$

En laissant ρ quelconque, on ne peut pas avoir

$$\mathrm{R}_1\frac{d\mathrm{R}}{d\rho} - \mathrm{R}\frac{d\mathrm{R}_1}{d\rho} = 0;$$

il en résulterait, en effet,

$$\mathrm{R}_1 = \mathrm{CR},$$

C étant une constante. Or le rapport de chaque polynôme R à la puissance ρ^n est l'unité pour $\rho = \infty$. L'équation que nous venons d'écrire est donc absurde si n n'est pas le même pour R et R_1 ; n étant le même de part et d'autre, elle est impossible encore parce qu'elle entraînerait l'identité de R et de R_1, contrairement à notre hypothèse. On a donc nécessairement

$$\int\int l\mathrm{MNM}_1\mathrm{N}_1 d\omega = 0;$$

c'est la formule que nous nous proposions de démontrer. Si l'on prend en particulier $M_1 = 1$, $N_1 = 1$, on en conclut généralement

$$\iint l\mathrm{MN}\,d\omega = 0;$$

le cas de $M = 1$, $N = 1$, fait seul exception.

Dans l'équation

$$\iint l\mathrm{MN}\mathrm{M}_1\mathrm{N}_1\,d\omega = 0,$$

comme dans les équations (A), (B), (C), et en général dans toute la marche de notre analyse, vous devez reconnaître une analogie frappante avec les fonctions Y_n de la *Mécanique céleste*, ou plutôt avec les différents termes dont les fonctions Y_n sont composées. Les produits MN jouissent des mêmes propriétés que les termes dont nous parlons, et vous allez voir qu'ils s'y réduisent identiquement lorsqu'il s'agit d'ellipsoïdes de révolution allongés ou aplatis, c'est-à-dire lorsqu'on fait $b = c$ ou $b = 0$.

Cette réduction s'offre d'elle-même; on ne rencontre aucune difficulté en l'effectuant. Toutefois, comme elle est très-curieuse, je vous demande la permission de m'y arrêter un peu. Mais, avant tout, je vous rappellerai que chaque fonction M, N, peut être sans inconvénient multipliée par une constante arbitraire; l'introduction d'une telle constante n'empêchera pas les équations différentielles linéaires dont M et N dépendent d'être satisfaites, et ne changera rien, ni à la formule

$$\iint l\mathrm{MN}\mathrm{M}_1\mathrm{N}_1\,d\omega = 0,$$

ni aux formules (A), (B), (C), qui sont homogènes en M et N. Ainsi peu nous importera d'introduire ou de supprimer dans l'expression de M ou de N un facteur constant.

En laissant d'abord b et c quelconques, substituons aux variables μ et ν les angles φ et ψ de M. Jacobi, d'après les formules

$$\mu = \sqrt{c^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}, \quad \nu = b\cos\psi.$$

L'équation

$$(\mu^2 - b^2)(\mu^2 - c^2)\frac{d^2\mathrm{M}}{d\mu^2} + [2\mu^3 - (b^2+c^2)\mu]\frac{d\mathrm{M}}{d\mu} = [n(n+1)\mu^2 - \mathrm{B}]\,\mathrm{M},$$

que M vérifie, et qui peut s'écrire

$$\sqrt{(\mu^2-b^2)(c^2-\mu^2)}\,\frac{d.\sqrt{(\mu^2-b^2)(c^2-\mu^2)}\,\frac{dM}{d\mu}}{d\mu}+[n(n+1)\mu^2-B]M=0,$$

deviendra

$$(c^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi)\frac{d^2M}{d\varphi^2}-(c^2-b^2)\sin\varphi\cos\varphi\frac{dM}{d\varphi}$$
$$+[n(n+1)(c^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi)-B]M=0;$$

il faut y satisfaire, en général, par une fonction entière de $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, $\sqrt{c^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}$, et, dans le cas particulier de $b=c$ ou de $b=0$, par une fonction entière de $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$ seulement.

De même, l'équation en N, qui est d'abord

$$\sqrt{(b^2-\nu^2)(c^2-\nu^2)}\,\frac{d.\sqrt{(b^2-\nu^2)(c^2-\nu^2)}\,\frac{dN}{d\nu}}{d\nu}=[n(n+1)\nu^2-B]N,$$

devient

$$(c^2-b^2\cos^2\psi)\frac{d^2N}{d\psi^2}+b^2\sin\psi\cos\psi\frac{dN}{d\psi}=[n(n+1)b^2\cos^2\psi-B]N;$$

et il s'agit d'y satisfaire par une fonction entière de $\sin\psi$, $\cos\psi$, $\sqrt{c^2-b^2\cos^2\psi}$, dans le cas général, et par une fonction entière de $\sin\psi$, $\cos\psi$ seulement, lorsqu'on prend $b=c$ ou $b=0$.

En faisant $b=c$, nous avons pour M et N les équations suivantes:

$$\frac{d^2M}{d\varphi^2}+\frac{[n(n+1)c^2-B]}{c^2}M=0,$$

et

$$(1-\cos^2\psi)\frac{d^2N}{d\psi^2}+\sin\psi\cos\psi\frac{dN}{d\psi}=\left[n(n+1)\cos^2\psi-\frac{B}{c^2}\right]N.$$

La première ne peut être vérifiée par une fonction entière de $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, qu'en prenant pour valeur de $\frac{n(n+1)c^2-B}{c^2}$ le carré d'un nombre entier i; dans toute autre hypothèse la fonction M ne redeviendrait pas la même en augmentant φ de 2π, ce qui doit avoir lieu quand elle est rationnelle en $\sin\varphi$, $\cos\varphi$. Ainsi

$$B = [n(n+1) - i^2]c^2.$$

L'équation en N, si l'on pose $\cos\psi = q$, prend ensuite la forme

$$\frac{d.(1-q^2)\frac{dN}{dq}}{dq} + \left[n(n+1) - \frac{i^2}{1-q^2}\right] N = 0.$$

C'est précisément l'équation que l'on trouve en discutant les fonctions Y_n et cherchant la loi de composition de leurs différents termes. En consultant une thèse de M. Olinde Rodrigues, imprimée dans la *Correspondance sur l'École Polytechnique* (tome III, page 375), vous verrez que l'on doit prendre i au plus égal à n pour avoir des valeurs de N fonctions entières de q, $\sqrt{1-q^2}$; les valeurs de i sont donc $0, 1, 2, \ldots, n$, et pour ces valeurs on trouve, en effet, une expression de N convenable,

$$N = (1-q^2)^{\frac{i}{2}} \frac{d^{i+n}.(1-q^2)^n}{dq^{i+n}}.$$

Quant à la valeur de M, elle est double pour chaque entier i différent de zéro; on peut faire

$$M = \cos i\varphi, \quad \text{et} \quad M = \sin i\varphi;$$

mais pour $i = 0$, on n'a qu'une seule valeur $M = 1$.

Les produits MN, lorsque $b = c$, sont ainsi les mêmes que pour la sphère, et en effet ils ne changeraient pas en posant $c = 0$. Ils s'expriment par les formules

$$(1-q^2)^{\frac{i}{2}} \frac{d^{i+n}.(1-q^2)^n}{dq^{i+n}} \cos i\varphi, \quad (1-q^2)^{\frac{i}{2}} \frac{d^{i+n}.(1-q^2)^n}{dq^{i+n}} \sin i\varphi.$$

Leur nombre est $2n+1$, et ce sont eux qui, multipliés par des constantes arbitraires, forment les $2n+1$ termes de la fonction générale Y_n.

Il nous reste à examiner les fonctions R. Dans le cas de $b = c$, on a, nous l'avons dit plus haut,

$$B = [n(n+1) - i^2]c^2:$$

l'équation dont R dépend est donc alors

$$(\rho^2 - c^2)^2 \frac{d^2 R}{d\rho^2} + (2\rho^3 - 2c^2\rho)\frac{dR}{d\rho} = [n(n+1)(\rho^2 - c^2) + i^2 c^2] R.$$

En la mettant sous la forme

$$\frac{d.(c^2 - \rho^2)\frac{dR}{d\rho}}{d\rho} + \left[n(n+1) - \frac{i^2 c^2}{c^2 - \rho^2}\right] R = 0,$$

et la comparant à l'équation en N, dont on a donné l'intégrale, on trouve

$$R = \frac{(\rho^2 - c^2)^{\frac{i}{2}}}{2n(2n-1)\ldots(n-i+1)} \frac{d^{i+n}(\rho^2 - c^2)^n}{d\rho^{i+n}};$$

le diviseur numérique a été introduit pour rendre le rapport de R à ρ^n égal à l'unité lorsque $\rho = \infty$. Pour chaque entier n, le nombre des valeurs de R est $n+1$; mais les valeurs de R pour lesquelles i diffère de zéro entrent dans deux des produits RMN; pour ces deux produits, N reste aussi le même, mais M est $\cos i\varphi$ pour l'un, $\sin i\varphi$ pour l'autre; de là $2n+1$ produits distincts RMN.

En appliquant les formules (A), (B), (C) aux deux combinaisons R, S, M, N qui ne diffèrent que par la valeur de M, ou qui répondent au même couple (n, i), vous vous assurerez facilement que ces formules ont lieu non-seulement pour chaque produit MN isolé, mais encore pour la somme des deux produits conjugués MN multipliés chacun par une constante arbitraire. Ainsi, par exemple, l'équation

$$\iint \frac{l'\zeta' d\omega'}{\Delta} = m\zeta,$$

dont je vous ai parlé dans ma première Lettre, sera vérifiée par

$$\zeta = (G\cos i\varphi + H\sin i\varphi)\, N,$$

quelles que soient les constantes G, H.

Notons enfin les formules

$$x = \rho\cos\psi, \quad y = \sqrt{\rho^2 - c^2}\sin\psi\cos\varphi, \quad z = \sqrt{\rho^2 - c^2}\sin\psi\sin\varphi,$$
$$l d\omega = \sin\psi\, d\varphi\, d\psi,$$

qui sont beaucoup plus simples que celles relatives au cas de b et c quelconques.

Maintenant passons de l'ellipsoïde de révolution pour lequel $b = c$, à la sphère où l'on a de plus $c = 0$; les valeurs de x, y, z exprimées par les angles φ, ψ, et par le demi-axe ρ qui deviendra un rayon de sphère, se réduiront aux formules connues des coordonnées polaires

$$x = \rho \cos\psi, \quad y = \rho \sin\psi \cos\varphi, \quad z = \rho \sin\psi \sin\varphi;$$

l'équation en R prendra la forme

$$\frac{d \cdot \rho^2 \frac{dR}{d\rho}}{d\rho} = n(n+1)R,$$

et donnera

$$R = \rho^n, \quad S = \frac{1}{\rho^{n+1}},$$

quelle que soit la valeur de i. En remplaçant $l'd\omega'$ par sa valeur $\sin\psi'\, d\varphi'\, d\psi'$, les formules (A), (B), (C) nous donneront donc

$$\int\int \frac{M'N' \sin\psi'\, d\varphi'\, d\psi'}{\Delta} = \frac{4\pi MN}{(2n+1)\rho'}, \quad \text{pour} \quad \rho = \rho',$$

$$\int\int \frac{M'N' \sin\psi'\, d\varphi'\, d\psi'}{\Delta} = \frac{4\pi \rho^n MN}{(2n+1)\rho'^{n+1}}, \quad \text{pour} \quad \rho < \rho',$$

$$\int\int \frac{M'N' \sin\psi'\, d\varphi'\, d\psi'}{\Delta} = \frac{4\pi \rho'^n MN}{(2n+1)\rho^{n+1}}, \quad \text{pour} \quad \rho > \rho'.$$

D'après leur forme même, on peut dans ces dernières équations remplacer MN et M'N' par les fonctions générales Y_n, Y'_n qui se composent linéairement avec ces produits. Nous avons ainsi

$$\int\int \frac{Y'_n \sin\psi'\, d\varphi'\, d\psi'}{\Delta} = \frac{4\pi Y_n}{(2n+1)\rho'}, \quad \text{pour} \quad \rho = \rho',$$

$$\int\int \frac{Y'_n \sin\psi'\, d\varphi'\, d\psi'}{\Delta} = \frac{4\pi \rho^n Y_n}{(2n+1)\rho'^{n+1}}, \quad \text{pour} \quad \rho < \rho',$$

$$\int\int \frac{Y'_n \sin\psi'\, d\varphi'\, d\psi'}{\Delta} = \frac{4\pi \rho'^n Y_n}{(2n+1)\rho^{n+1}}, \quad \text{pour} \quad \rho > \rho',$$

et nous retombons, par une route nouvelle et plus générale, sur les résultats que les géomètres avaient obtenus relativement aux fonctions Y_n. Nous voyons aussi comment il arrive que, dans le cas de la sphère, on puisse grouper $2n+1$ fonctions simples MN et en former la fonction complexe Y_n qui jouit encore des propriétés principales de ces fonctions simples. Cela tient à ce que R, devenant indépendant de i, se conserve le même pour les différents produits MN qui répondent à chaque entier déterminé n. Pour l'ellipsoïde quelconque, la formule

$$\int\int \frac{l'\zeta' d\omega'}{\Delta} = m\zeta,$$

où nous avons

$$m = \frac{4\pi \mathrm{RS}}{2n+1},$$

présente des valeurs de m généralement différentes entre elles; ces valeurs deviennent en partie égales deux à deux pour l'ellipsoïde de révolution; enfin pour la sphère, on peut les assembler par groupes de $2n+1$ valeurs égales rapportés aux entiers successifs $0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$. Ceci méritait d'être remarqué.

Après les longs détails dans lesquels je suis entré relativement au cas de $b=c$ ou de l'ellipsoïde allongé, je dois me garder d'insister sur celui de $b=0$ ou de l'ellipsoïde aplati. Je me bornerai à vous dire que l'on alors $B = i^2 c^2$, i désignant encore successivement les entiers $0, 1, 2, \ldots, n$, et que l'équation en R à laquelle on est conduit se ramène à la forme de celle discutée tout à l'heure, en posant $\rho = \sqrt{c^2 + k^2}$ et prenant k pour variable au lieu de ρ.

Revenons au cas général d'un ellipsoïde à trois axes inégaux; et l'analogie des produits MN avec les fonctions Y_n va se présenter à nous sous un nouvel aspect.

Considéré comme fonction de μ et ν, ou, si l'on veut, de μ, ν, $\sqrt{\mu^2 - b^2}$, $\sqrt{c^2 - \mu^2}$, $\sqrt{b^2 - \nu^2}$, $\sqrt{c^2 - \nu^2}$, sans s'inquiéter de ρ qu'on laissera constante, le produit MN ne diffère pas essentiellement du produit RMN; la présence d'un facteur constant R est, en effet, nous l'avons vu, indifférente. Mais RMN s'exprime par un polynôme du degré n en x, y, z. Donc sur chaque ellipsoïde déterminé (ρ), le produit MN s'exprimera aussi par un polynôme en x, y, z de degré n.

Rappelez-vous à présent la sphère auxiliaire de rayon 1, concentrique à l'ellipsoïde, et dont les points (x, y, z) *correspondent* à (x, y, z). Vous savez qu'on a

$$x = \rho \mathrm{x}, \quad y = \sqrt{\rho^2 - b^2}.\mathrm{y}, \quad z = \sqrt{\rho^2 - c^2}.\mathrm{z}.$$

Donc chaque produit MN pourra être transformé en une fonction de degré n en x, y, z.

Introduisons enfin des coordonnées polaires θ, ϖ auxquelles nous rapporterons les points de la sphère, et faisons

$$\mathrm{x} = \cos\theta, \quad \mathrm{y} = \sin\theta\cos\varpi, \quad \mathrm{z} = \sin\theta\sin\varpi;$$

MN deviendra une fonction entière de $\cos\theta$, $\sin\theta\cos\varpi$, $\sin\theta\sin\varpi$, et je dis que cette fonction, considérée par rapport aux variables θ et ϖ, rentre dans les fonctions Y_n de Laplace.

D'abord en μ et ν, et en posant

$$\eta = \int \frac{d\mu}{\sqrt{(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)}}, \quad \varkappa = \int \frac{d\nu}{\sqrt{(b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)}},$$

on a les équations

$$\frac{d^2 M}{d\eta^2} = [B - n(n+1)\mu^2]\,M, \quad \frac{d^2 N}{d\varkappa^2} = [n(n+1)\nu^2 - B]\,N.$$

Faisons $MN = \Phi$, et nous en conclurons aisément

$$\frac{d^2\Phi}{d\eta^2} + \frac{d^2\Phi}{d\varkappa^2} + n(n+1)(\mu^2 - \nu^2)\Phi = 0.$$

Introduisons θ et ϖ au lieu de μ et ν. En comparant les valeurs de x, y, z en μ, ν à celles de x, y, z en θ, ϖ, il vient

$$\frac{\mu\nu}{bc} = \cos\theta, \quad \frac{\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}}{b\sqrt{c^2 - b^2}} = \sin\theta\cos\varpi, \quad \frac{\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}{c\sqrt{c^2 - b^2}} = \sin\theta\sin\varpi,$$

équations dont la troisième n'est qu'une conséquence des deux autres.

L'élimination de μ et ν donnera, tout calcul fait,

$$\sin\theta\frac{d.\sin\theta\dfrac{d\Phi}{d\theta}}{d\theta} + \frac{d^2\Phi}{d\varpi^2} + n(n+1)\sin^2\theta.\Phi = 0.$$

Mais cette équation est celle des fonctions Y_n. On sait que la fonction entière en $\cos\theta$, $\sin\theta\cos\varpi$, $\sin\theta\sin\varpi$, la plus générale qui puisse y satisfaire, est $\Phi = Y_n$, Y_n présentant $2n+1$ constantes arbitraires. Donc le produit MN exprimé en θ et ϖ est, par rapport à ces variables, un cas particulier de Y_n. Réciproquement Y_n exprimée en μ, ν, $\sqrt{\mu^2 - b^2}$, etc., n'est autre chose qu'une somme des divers produits MN relatifs au nombre n, multipliés chacun par une constante arbitraire. En effet, cette somme doit être égale à une fonction de forme Y_n, et comme elle renferme $2n+1$ constantes arbitraires, elle offre la valeur générale même de Y_n.

On parcourt la surface de l'ellipsoïde (ρ) et le cercle entier des valeurs de μ, ν, $\sqrt{\mu^2 - b^2}$, etc., dans les questions qui nous occupent, en parcourant la surface entière de la sphère concentrique de rayon 1, c'est-à-dire en faisant varier θ dans l'étendue d'une demi-circonférence et ϖ dans l'étendue d'une circonférence entière. Cela posé, le développement d'une fonction de μ, ν, $\sqrt{\mu^2 - b^2}$, etc., que l'on regardera comme successivement relative à tous les points de la surface de l'ellipsoïde, ne différera nullement du développement sphérique en série de la forme ΣY_n. On pourra représenter ce développement par ΣAMN; mais si l'on veut pouvoir y appliquer immédiatement les résultats démontrés pour la série ΣY_n, il faudra considérer comme ne formant qu'un seul terme, analogue ou pour mieux dire égal à Y_n, l'ensemble des termes AMN qui répondent au même entier n, mais à des valeurs de B différentes.

Pour exprimer une fonction *rationnelle et entière* quelconque de $\cos\theta$, $\sin\theta\cos\varpi$, $\sin\theta\sin\varpi$, ou, si l'on veut, de x, y, z, il suffit, comme on sait, d'un nombre limité de fonctions Y. Il suffira donc aussi, dans ce cas, d'un nombre limité de produits MN. Cela arrivera, par conséquent, pour toute fonction de μ et ν composée d'un ou de plusieurs termes exprimables chacun par une fonction entière et symétrique de μ^2, ν^2, ou par le produit d'une telle fonction et de facteurs de la forme $\mu\nu$, $\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}$, $\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}$. En effet, ces facteurs sont des fonctions entières de x, y, z; par suite, il en est de même pour $\mu^2\nu^2$, $\mu^2+\nu^2$, puis pour une fonction entière, symétrique en μ^2, ν^2, et enfin pour la fonction proposée. Le cas particulier que nous venons d'indiquer, et où l'on peut exprimer une fonction donnée par un nombre limité de termes AMN, méritait d'être mentionné. Il peut être traité à part directement et serait très-digne de nous arrêter si l'objet même de cette Lettre ne nous interdisait de tels détails. Mais, en général, l'expression d'une fonction exige l'emploi de tous les produits MN en nombre infini; et de là un genre de développement qui, du reste, n'est au fond que le développement ΣY_n de Laplace, les groupes de produits MN étant équivalents aux groupes Y_n, et devenant même identiques avec eux pour $b = c$ et pour $b = 0$.

Les fonctions Y_n, relatives à la sphère, s'exprimant en μ, ν, $\sqrt{\mu^2 - b^2}$, etc., par une somme de produits AMN, on peut se demander ce que sont pour la sphère ces quantités μ, ν. Or les coordonnées x, y, z d'un point de la sphère sont données par les formules

$$x = \frac{\mu\nu}{bc}, \quad y = \frac{\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}}{b\sqrt{c^2 - b^2}}, \quad z = \frac{\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}{c\sqrt{c^2 - b^2}}.$$

De là on tire

$$\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} - \frac{z^2}{c^2 - \mu^2} = 0,$$

et

$$\frac{x^2}{\nu^2} - \frac{y^2}{b^2 - \nu^2} - \frac{z^2}{c^2 - \nu^2} = 0.$$

En regardant μ et ν comme des constantes, et x, y, z comme des coordonnées courantes, ces équations représentent deux cônes qui ont leur sommet commun au centre de la sphère et qui se coupent entre eux orthogonalement. Ces cônes jouent ici, par rapport à la sphère, le même rôle que les hyperboloïdes à une et à deux nappes jouent par rapport à l'ellipsoïde (ρ); M. Lamé, dans ses recherches, les a pris pour point de départ, et a ainsi obtenu d'abord pour la sphère même les fonctions M et N qui se sont ensuite appliquées sans aucun changement à l'ellipsoïde.

Les surfaces hyperboliques homofocales coupent l'ellipsoïde (ρ) suivant ses deux systèmes de lignes de courbure, respectivement représentés par les équations

$$\mu = \text{constante}, \qquad \nu = \text{constante}.$$

Ces mêmes équations appliquées à la sphère y déterminent les lignes *correspondantes* aux lignes de courbure; on voit que les lignes correspondantes dont nous parlons sont des coniques sphériques orthogonales entre elles. Un point est déterminé sur la sphère par la rencontre de deux coniques sphériques, comme il l'est sur l'ellipsoïde par l'intersection de deux lignes de courbure.

Dans le développement d'une fonction Q sous la forme

$$Q = \Sigma \mathrm{AMN},$$

on peut déterminer A en multipliant les deux membres par $l\mathrm{MN}\,d\omega$, puis intégrant, conformément à la méthode ordinaire. Il vient ainsi

$$\mathrm{A} = \frac{\int\int l\,\mathrm{QMN}\,d\omega}{\int\int l\,\mathrm{M}^2\mathrm{N}^2\,d\omega}.$$

En adoptant cette valeur de A et regardant, nous le répétons, comme ne formant qu'un seul terme l'ensemble des produits AMN qui répondent à chaque entier n, la fonction Q se trouvera représentée par ΣAMN comme elle l'est par une série $\Sigma \mathrm{Y}_n$. Si pour chaque système de valeurs de μ, ν, $\sqrt{\mu^2 - b^2}$, etc., la fonction Q a une valeur unique et déterminée, fonction continue de μ, ν, il en sera de même de la série.

Quand une fonction Q de cette espèce satisfait à l'équation

$$\int\int \mathrm{QMN}\,d\omega = 0$$

pour tous les produits MN répondant à des couples quelconques (n, B), on en conclut évidemment

$$\int\int \mathrm{Q}\,d\omega\,\Sigma \mathrm{AMN} = \int\int \mathrm{Q}^2\,d\omega = 0, \quad \text{d'où} \quad \mathrm{Q} = 0.$$

Il en serait de même si l'on avait

$$\int\int l\mathrm{QMN}\,d\omega = 0.$$

ou plus généralement

$$\int\int \mathrm{PQMN}\,d\omega = 0,$$

P étant une fonction qui ne change jamais de signe.

Il est évident aussi que l'équation

$$\Sigma \mathrm{AMN} = \Sigma \mathrm{A'MN}$$

entraîne celle-ci

$$A = A',$$

que l'on en déduit en multipliant les deux membres par $l\mathrm{MN}\,d\omega$, puis intégrant.

Mais c'est m'arrêter bien longtemps sur des propriétés que vous devinez d'avance, puisque la série $\Sigma\mathrm{AMN}$ les partage avec les séries connues de sinus et cosinus. Revenons à nos formules (A), (B), (C) et combinons-les avec notre nouveau développement pour résoudre le problème de M. Gauss relativement à la distribution sur un ellipsoïde d'une matière attractive ou répulsive d'après la loi de Newton, de telle sorte que le potentiel ait en chaque point de la surface une valeur donnée.

Soient Q cette valeur, fonction déterminée de μ, ν, $\sqrt{\mu^2 - b^2}$, etc., ρ' le paramètre de l'ellipsoïde, et $\lambda' d\omega'$ la masse répartie sur l'élément $d\omega'$; Δ étant la distance de $d\omega'$ à l'élément quelconque $d\omega$ qui répond au point (μ, ν), il faut qu'on ait

$$\int\!\!\int \frac{\lambda' d\omega'}{\Delta} = \mathrm{Q} = \Sigma\mathrm{AMN}.$$

Comme λ' est une fonction des coordonnées μ', ν' qui répondent à l'élément $d\omega'$, je pose

$$\frac{\lambda'}{l'} = \Sigma\mathrm{A'M'N'},$$

et par la formule (A) j'en conclus

$$\int\!\!\int \frac{\lambda' d\omega'}{\Delta} = \sum\left(\mathrm{A'}\cdot\frac{4\pi\,\mathrm{R'S'MN}}{2n+1}\right).$$

Je mets R′S′ au lieu de RS parce que ρ' est le paramètre de notre ellipsoïde. Ainsi

$$\sum\left(\mathrm{A'}\cdot\frac{4\pi\,\mathrm{R'S'MN}}{2n+1}\right) = \Sigma\mathrm{AMN},$$

d'où

$$\mathrm{A'} = \frac{(2n+1)\mathrm{A}}{4\pi\,\mathrm{R'S'}}, \quad \lambda' = \frac{l'}{4\pi}\sum\frac{(2n+1)\,\mathrm{AM'N'}}{\mathrm{R'S'}}.$$

Cette valeur de λ' s'accorde bien avec celle que j'ai donnée sans démonstration dans le tome X du *Journal de Mathématiques*. Mais on fera mieux comprendre le vrai caractère général de la solution en se servant de la formule

$$\int\int \frac{l'\zeta' d\omega'}{\Delta} = m\zeta,$$

où ζ représente le produit MN, et m la quantité

$$\frac{4\pi R'S'}{2n+1},$$

qui est constante sur toute la surface (ρ').

Soient, en effet,

$$Q = \Sigma A\zeta, \quad \lambda' = l'\Sigma A'\zeta';$$

il viendra

$$\int\int \frac{\lambda' d\omega'}{\Delta} = \Sigma A' m\zeta = \Sigma A\zeta,$$

d'où

$$A' = \frac{A}{m},$$

résultat bien simple et qui s'applique de lui-même à toute surface pour laquelle les fonctions ζ sont connues.

Puisqu'on a

$$\lambda' = \frac{l'}{4\pi}\sum \frac{(2n+1)AM'N'}{R'S'},$$

et

$$A = \frac{\int\int lQMN\,d\omega}{\int\int lM^2N^2\,d\omega},$$

le premier terme du développement de λ', qui répond à

$$n = 0, \quad R' = 1, \quad M' = 1, \quad N' = 1, \quad S' = \int_{\rho'}^{\infty} \frac{d\rho'}{\sqrt{(\rho'^2 - b^2)(\rho'^2 - c^2)}},$$

sera

$$\frac{l'}{4\pi}\frac{\int\int lQ\,d\omega}{S'.\int\int l\,d\omega},$$

S' représentant spécialement l'intégrale définie que je viens d'écrire. C'est de ce terme seul que dépend, comme vous le verrez sans peine, l'intégrale

$$\iint \lambda' d\omega',$$

qui exprime la masse totale distribuée sur l'ellipsoïde. On a

$$\iint \lambda' d\omega' = \frac{\iint l Q\, d\omega}{4\pi S'}.$$

En ajoutant à Q une constante arbitraire C, c'est-à-dire en supposant la fonction λ' telle que

$$\iint \frac{\lambda' d\omega'}{\Delta} = Q + C,$$

la même intégrale deviendrait

$$\frac{C}{S'} + \frac{\iint l Q\, d\omega}{4\pi S'},$$

et l'on pourrait alors disposer de C de manière que la masse de la distribution eût une valeur donnée. A peine ai-je besoin d'ajouter que le premier terme du développement de λ' serait augmenté de $\frac{l' C}{4\pi S'}$; les autres n'éprouveraient aucun changement [*].

Soit maintenant Δ la distance de l'élément $d\omega'$ à un point quelconque (ρ, μ, ν) de l'espace. Après avoir pris λ' de telle sorte que

$$\iint \frac{\lambda' d\omega'}{\Delta} = Q, \quad \text{pour} \quad \rho = \rho',$$

posons

$$u = \iint \frac{\lambda' d\omega'}{\Delta};$$

on aura

$$u = Q \quad \text{pour} \quad \rho = \rho', \qquad u = 0 \quad \text{pour} \quad \rho = \infty,$$

et généralement

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} = 0.$$

---

[*] On voit facilement aussi que la position du centre de gravité de la masse distribuée dépend des trois termes du développement de λ' qui répondent à $n = 1$; la considération de ceux qui répondent à $n = 2$ détermine ensuite les axes principaux et les moments d'inertie.

La formule

$$u = \int\int \frac{\lambda' d\omega'}{\Delta}$$

représente donc la loi de l'équilibre des températures, 1° dans l'intérieur de l'ellipsoïde (ρ'), la température pour les points de la surface étant définie par la fonction Q; 2° dans l'espace infini extérieur à (ρ'), avec la même fonction à la surface, et de plus la condition d'une température nulle pour $\rho = \infty$.

L'intégrale

$$u = \int\int \frac{\lambda' d\omega'}{\Delta}$$

représente en outre le potentiel de la distribution dont nous nous sommes occupés tout à l'heure, et peut servir à calculer l'action exercée sur le point (ρ, μ, ν). Il est donc intéressant de la développer en série.

Pour cela, développons d'abord $\frac{1}{\Delta}$. Or, si l'on pose

$$\frac{1}{\Delta} = \Sigma\, C' M' N',$$

on trouve de suite

$$C' \int\int l' M'^2 N'^2 d\omega' = \int\int \frac{l' M' N' d\omega'}{\Delta}.$$

On peut supprimer les accents dans l'intégrale placée au premier membre. En appliquant ensuite les formules (B) et (C), on obtient

$$C' \int\int l M^2 N^2 d\omega = \frac{4\pi R S' MN}{2n+1}, \quad \text{pour} \quad \rho < \rho',$$

et

$$C' \int\int l M^2 N^2 d\omega = \frac{4\pi R' SMN}{2n+1}, \quad \text{pour} \quad \rho > \rho'.$$

De là

$$(\alpha) \qquad \frac{1}{\Delta} = 4\pi \sum \frac{RS' MN M' N'}{(2n+1)\int\int l M^2 N^2 d\omega}, \quad \text{pour} \quad \rho < \rho',$$

et

$$(\beta) \qquad \frac{1}{\Delta} = 4\pi \sum \frac{R' SMN M' N'}{(2n+1)\int\int l M^2 N^2 d\omega}, \quad \text{pour} \quad \rho > \rho'.$$

Ces deux formules (α), (β) sont bien remarquables, et l'on en déduit beaucoup de résultats curieux. On ne peut douter de la convergence des séries et de leur égalité avec le premier membre tant que ρ et ρ' ont des valeurs différentes; car la fonction $\frac{1}{\Delta}$ est alors essentiellement finie et continue. Il n'en serait plus de même si l'on posait $\rho = \rho'$.

En substituant la valeur de Δ dans celle de u, on a

$$u = 4\pi \sum \frac{\mathrm{RS'MN}}{(2n+1)\int\int l\mathrm{M}^2\mathrm{N}^2 d\omega} \int\int \lambda' \mathrm{M'N'} d\omega', \quad \text{pour} \quad \rho < \rho'.$$

Mais nous avons trouvé ci-dessus

$$\lambda' = l'\Sigma \mathrm{A'M'N'}, \quad \mathrm{A'} = \frac{(2n+1)\mathrm{A}}{4\pi \mathrm{R'S'}}, \quad \mathrm{A} = \frac{\int\int l\mathrm{QMN}\, d\omega}{\int\int l\mathrm{M}^2\mathrm{N}^2 d\omega}.$$

Substituant et ayant égard à la formule

$$\int\int l'\mathrm{M'N'M'_1\, N'_1}\, d\omega' = 0,$$

on obtient donc

$$u = \sum \frac{\mathrm{RMN}\int\int l\mathrm{QMN}\, d\omega}{\mathrm{R'}\int\int l\mathrm{M}^2\mathrm{N}^2 d\omega}, \quad \text{pour} \quad \rho < \rho'.$$

Cette formule revient à celle que M. Lamé a donnée pour l'équilibre des températures dans l'intérieur de l'ellipsoïde (ρ'). Seulement elle est écrite sous une forme plus concise. En général, l'introduction de la quantité $ld\omega$ simplifie et éclaircit beaucoup les formules; M. Lamé, qui n'en a pas fait usage, devait tomber par cela même dans des calculs plus compliqués que les nôtres. On peut remarquer que les produits RMN donnent des polynômes de degré n. La valeur de u se compose donc d'une somme de polynômes de degrés $0, 1, 2, \ldots, n \ldots$ successivement, dont chacun satisfait séparément à l'équation

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = 0,$$

et il est aisé de voir en outre que chacun de ces polynômes se réduit, à la surface (ρ'), au terme Y_n, correspondant, du développement $\Sigma \mathrm{Y}_n$ de la fonction Q. De cette manière on constate l'identité de la formule actuelle avec celle qui résulterait de la méthode beaucoup plus simple que j'ai donnée pour le problème de l'équilibre des températures dans l'ellipsoïde, au tome X du *Journal de Mathématiques*.

En supposant $\rho > \rho'$, des calculs semblables à ceux qui précèdent fournissent

$$u = \sum \frac{\mathrm{SMN} \int\int l\mathrm{QMN}\, d\omega}{\mathrm{S}' \int\int l\mathrm{M}^2\mathrm{N}^2\, d\omega}, \quad \text{pour} \quad \rho > \rho'.$$

Enfin le cas intermédiaire de $\rho = \rho'$ est compris à volonté dans cette formule et dans la précédente qui s'accordent à donner alors

$$u = \sum \frac{\mathrm{MN} \int\int l\mathrm{QMN}\, d\omega}{\int\int l\mathrm{M}^2\mathrm{N}^2\, d\omega} = \mathrm{Q}.$$

Vous voyez, monsieur, comment les formules (A), (B), (C) fournissent, pour l'ellipsoïde, la solution du problème de M. Gauss et des problèmes qui s'y rattachent dans la théorie de l'attraction ou dans celle de la chaleur. Il y aurait plus d'une remarque importante à faire sur divers points relatifs aux questions qui viennent de nous occuper. Et quoique les démonstrations que vous avez déjà des formules (A), (B), (C) soient très-satisfaisantes, ce n'est pas sans regrets que je renonce à présenter encore ici un procédé nouveau pour y arriver. Ce procédé suppose connu le développement des fonctions en séries $\Sigma\mathrm{AMN}$, ce que les précédents ne demandaient pas; mais il offre des avantages particuliers [*].

J'ai eu soin de vous faire observer que, dans un cas très-étendu et parfaitement défini, ces séries $\Sigma\mathrm{AMN}$ n'ont qu'un nombre limité de termes. On peut tirer de là quelques conséquences dont il est bon de dire un mot, tout en donnant un moyen nouveau et indépendant des formules (α), (β) de développer la valeur du potentiel, en un point (ρ, μ, ν) de l'espace, pour une couche infiniment mince comprise entre l'ellipsoïde (ρ') et une autre surface à volonté, ou mieux pour une masse attractive ou répulsive distribuée sur l'ellipsoïde. Soit lk la densité de la distribution. En conservant les notations ci-dessus, le potentiel cherché sera exprimé par

$$\int\int \frac{l'k'\, d\omega'}{\Delta};$$

[*] A la rigueur même, on peut, en s'aidant de lemmes préliminaires convenables, suppléer à l'usage des séries infinies.

et, en posant

$$k = \Sigma \mathrm{AMN},$$

il deviendra

$$\Sigma \mathrm{A} \int\int \frac{l'\mathrm{M}'\mathrm{N}'\,d\omega'}{\Delta}.$$

c'est-à-dire, en vertu des formules (B) et (C),

$$4\pi \Sigma \frac{\mathrm{ARS}'\mathrm{MN}}{2n+1}, \quad \text{pour} \quad \rho < \rho',$$

et

$$4\pi \Sigma \frac{\mathrm{AR}'\mathrm{SMN}}{2n+1}, \quad \text{pour} \quad \rho > \rho'.$$

Donc si k s'exprime par un nombre limité de produits MN, il en sera de même du potentiel. Or cela arrivera évidemment si k est une fonction rationnelle et entière des coordonnées x, y, z de la surface, ou du moins peut le devenir en ayant égard à l'équation de l'ellipsoïde. Cela suppose la densité de la distribution proportionnelle à la fois à cette fonction et à la quantité l, c'est-à-dire à la perpendiculaire abaissée du centre de l'ellipsoïde sur le plan tangent mené au point dont on s'occupe.

Ces réductions d'intégrales doubles s'étendent, dans les cas analogues, aux intégrales de la forme

$$\int\int \frac{k' \cos \upsilon'\, d\omega'}{\Delta^2}.$$

Au surplus, la méthode précédente serait bien mal appréciée si l'on n'y voyait qu'un moyen plus ou moins simple, plus ou moins élégant, comme on en a déjà, de ramener dans certains cas des intégrales doubles à des quadratures ou même à des quantités finies. Elle offre surtout l'immense avantage de conserver, au milieu de tous ces changements, dans le résultat final, une trace de chacun des produits MN qui a figuré dans ce que je nommerai les données primitives. Cette propriété, qui subsiste même quand la série se prolonge à l'infini, constitue le vrai caractère de nos formules, et facilite singulièrement la solution des problèmes; c'est de là aussi, vous vous le rappelez, que l'analyse de Laplace pour l'attraction des sphéroïdes très-peu différents de la sphère tire toute sa supériorité sur celle de d'Alembert. Je devrais peut-être appliquer encore ces formules au problème de l'attraction des ellipsoïdes de densité variable d'un point à l'autre ; mais ce qu'elles ajoutent aux résultats des travaux de nos grands géomètres sur ce sujet s'offrira facilement à votre pénétration. D'ailleurs, en accumulant ainsi les questions l'une sur l'autre, je crains d'être à la fois long et obscur. Excusez les négligences qui ont dû m'échapper dans une rédaction faite à la hâte ; et en général lisez cette Lettre avec indulgence. Je n'ai ici personne qui puisse m'aider de ses conseils, et j'écris en grande partie de mémoire, ou du moins sur des notes fort incomplètes et déjà anciennes. C'est dans les quatre derniers mois de l'année 1842 que j'ai commencé et terminé toutes ces recherches dont je n'ai essayé de vous présenter, du reste, qu'un faible extrait, car elles composeraient facilement un volume de quelque étendue en les généralisant comme elles peuvent l'être et en réunissant les applications de nature diverse dont elles sont susceptibles. Je venais de lire le Mémoire de M. Gauss : *Théorèmes généraux sur les forces attractives*, etc. ; et grâce à ce puissant secours, qui a levé pour moi les premières difficultés, mon travail a pu marcher rapidement ; mais depuis cette époque je n'y ai rien ajouté d'essentiel, ou pour mieux dire je ne m'en suis plus occupé. Heureusement l'analyse que j'ai suivie étant fort simple, j'ai pu en retrouver presque tous les détails avec facilité. Les formules (A), (B), (C), par leur liaison intime avec le radical Δ, dominent, vous le voyez, cette théorie. Il était nécessaire de les rapprocher des formules connues. Mais puissiez-vous, monsieur, trouver que, dans la comparaison des fonctions Y_n et MN, je n'ai pas obscurci par d'inutiles développements ce que j'avais à cœur de rendre bien clair !

Veuillez agréer, monsieur, l'expression de mes sentiments d'estime et d'amitié.

J. LIOUVILLE.

Toul, 30 juin 1846.