JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ERNEST LAMARLE

Note sur l'emploi d'un symbole susceptible d'être introduit dans les éléments du calcul différentiel

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 11 (1846), p. 254-260.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1846_1_11__254_0>

NOTE

Sur l'emploi d'un symbole susceptible d'être introduit dans les éléments du calcul différentiel;

Par M. Ernest LAMARLE,

Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur à l'Université de Gand.

Lorsqu'on écrit

$$f(x+h) - f(x) = hf'(x+\theta h), \tag{1}$$

on se borne, en général, à faire observer que θ désigne une quantité comprise entre 0 et 1. On sait cependant que les premières notions de l'analyse algébrique permettent de fixer d'une manière extrêmement simple et tout à fait précise le sens de l'équation (1). Ajoutons qu'en l'écrivant sous la forme que nous venons d'indiquer, on est forcé d'en restreindre l'application aux cas où la fonction et sa dérivée demeurent continues dans l'intervalle que l'on considère.

Cette remarque suffira sans doute pour justifier la préférence que nous accordons à la formule suivante :

$$f(x+h) - f(x) = h\mathfrak{M}_x^{x+h} f'(x), \tag{2}$$

où la caractéristique $\mathfrak{M}$ se trouve définie par l'équation de condition

$$\mathfrak{M}^{x+h} f'(x) = \lim\left[\frac{f'\left(x+\frac{h}{n}\right)+f'\left(x+2\frac{h}{n}\right)+f'\left(x+3\frac{h}{n}\right)+\ldots+f'(x+h)}{n=\infty}\right],$$

et qui peut s'énoncer en ces termes : « Dans tout intervalle *où la fonc-* » *tion demeure continue,* son accroissement a pour mesure l'accroisse- » ment de la variable, multiplié par la *valeur moyenne* de la fonction » dérivée. »

En admettant cette notation essentiellement élémentaire et parfaitement indépendante de toute notion de calcul intégral, on remarquera qu'elle offre plusieurs avantages :

1°. Elle donne un sens précis à l'équation (2), et la laisse subsister sous la condition unique que la fonction ne cesse pas d'être continue entre les limites fixées par les indices [*];

2°. Elle est utile, soit par les ressources qu'elles fournit pour certaines applications du calcul différentiel, soit comme transition au calcul intégral dont elle sert à éclaircir les principes fondamentaux.

Montrons par quelques exemples l'usage qu'on peut faire du nouveau symbole.

I. — *Reste de la série de Taylor.*

Soit $f(x)$ une fonction quelconque supposée continue, ainsi que ses $(n-1)$ premières dérivées, pour toute valeur de x comprise entre a et $a+h$. Si, faisant

$$x + h = z, \tag{3}$$

nous posons

$$\mathrm{R} = f(z) - f(x) - \frac{z-x}{1} f'(x) - \ldots - \frac{(z-x)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n-1)}(x), \tag{4}$$

il viendra, en prenant les dérivées des deux membres par rapport à x, et effaçant les termes qui s'entre-détruisent,

$$\mathrm{R}' = -\frac{(z-x)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{n}(x).$$

Or on a

$$\mathrm{R}_z - \mathrm{R}_a = (z-a)\,\mathfrak{M}_a^z \mathrm{R}'.$$

Il vient donc, en remplaçant R′ par sa valeur et observant que, pour $x = z$, R s'évanouit,

$$\mathrm{R}_a = \frac{z-a}{1.2\ldots(n-1)} \mathfrak{M}_a^z (z-x)^{n-1} f^{n}(x). \tag{5}$$

---

[*] Voir notre *Essai sur les principes fondamentaux de l'Analyse transcendante*, page 53.

De là résulte, en vertu des équations (3) et (4),

$$(6)\quad \begin{cases} f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1} f'(a) + \ldots \\ + \frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{n-1}(a) + \frac{h}{1.2\ldots(n-1)} \mathfrak{M}_a^{a+h} (a+h-x)^{n-1} f^n(x), \end{cases}$$

c'est-à-dire la formule de Taylor, reproduite sous forme d'identité, et ne laissant rien d'indécis dans l'expression du reste.

En général, on se contente d'une précision moindre, et, au lieu d'établir l'équation (5), ce qui n'offre, ainsi qu'on vient de le voir, aucune difficulté, on se borne à démontrer que l'on peut écrire

$$(7)\qquad R_a = \frac{h^n}{1.2\ldots n} f^n(a+\theta h),$$

ou bien encore

$$(8)\qquad R_a = \frac{(1-\theta)^{n-1} h^n}{1.2\ldots(n-1)} f^n(a+\theta h),$$

la valeur de θ variant d'une formule à l'autre, mais restant toujours comprise entre 0 et 1.

Les expressions (7) et (8) peuvent se déduire aisément de l'identité (6), lorsqu'on suppose que la condition de continuité s'étend jusqu'à la dérivée de l'ordre n. Il est visible, en effet, que, dans cette hypothèse, la moyenne des valeurs, représentées généralement par $(a+h-x)^{n-1} f^n(x)$, répond à une valeur de x comprise entre a et $a+h$. Il vient donc d'abord, en désignant par $a+\theta h$ cette valeur intermédiaire,

$$R_a = \frac{(1-\theta)^{n-1} h^n}{1.2\ldots(n-1)} f^n(a+\theta h).$$

D'un autre côté, si l'on ajoute un terme au développement fourni par l'identité (6), elle devient

$$(9)\quad \begin{cases} f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1} f'(a) + \ldots \\ + \frac{h^n}{1.2\ldots n} f^n(a) + \frac{h}{1.2\ldots n} \mathfrak{M}_a^{a+h} (a+h-x)^n f^{n+1}(x). \end{cases}$$

La comparaison des équations (6) et (9) donne immédiatement

$$(10)\quad \mathfrak{M}_a^{a+h}(a+h-x)^{n-1}f^n(x)=\frac{h^{n-1}}{n}f^n(a)+\frac{1}{n}\,\mathfrak{M}_a^{a+h}(a+h-x)^n f^{n+1}(x).$$

Soit d'ailleurs, comme cas particulier,

$$f^n(x) = \text{constante} = 1,$$

d'où

$$f^{n+1}(x) = 0.$$

On déduit de l'équation (10)

$$\mathfrak{M}_a^{a+h}(a+h-x)^{n-1} = \frac{h^{n-1}}{n}.$$

Cela posé, soient M et m la plus grande et la plus petite des valeurs affectées par $f^n(x)$ dans l'intervalle compris entre a et $a+h$; on a évidemment

$$\mathrm{R}_a < \frac{\mathrm{M}h}{1.2\ldots(n-1)}\,\mathfrak{M}_a^{a+h}(a+h-x)^{n-1} < \frac{\mathrm{M}h^n}{1.2\ldots n},$$

$$\mathrm{R}_a > \frac{mh}{1.2\ldots(n-1)}\,\mathfrak{M}_a^{a+h}(a+h-x)^{n-1} > \frac{mh^n}{1.2\ldots n},$$

et par conséquent

$$\mathrm{R}_a = \frac{h^n}{1.2\ldots n}\,f^n(a+\theta h).$$

Observons que l'expression (5) remplit une condition essentielle à laquelle les deux autres ne satisfont point : c'est de permettre que la valeur du reste puisse être calculée avec tel degré d'approximation qu'on désire.

II. — *Dérivation sous le signe* $\mathfrak{M}$.

Lemme. $\varphi(y)$ étant une fonction de y et de n, supposée telle que pour toute valeur de y comprise entre y_1 et y_2, elle converge vers 0, à mesure que n croît indéfiniment, $\varphi'(y)$ est une fonction de même nature. Donc aussi $\varphi''(y)$, et ainsi de suite pour toutes les dérivées successives.

Démonstration. On a généralement

$$\varphi(y)-\varphi(y_1) = (y-y_1)[\varphi'(y)+\xi];$$

mais, par hypothèse, il suffit de prendre n supérieur à une certaine limite, pour que chacune des quantités $\varphi(y)$, $\varphi(y_1)$ diffère aussi peu qu'on voudra de zéro. Il suit de là que le binôme $\varphi'(y)+\xi$ décroît indéfiniment à mesure que n augmente, et puisque les deux termes $\varphi'(y)$ et ξ sont irréductibles, il faut que chacun d'eux jouisse respectivement de cette propriété. Donc, etc.

Soit maintenant $F(x,y)$, ou même $\mathfrak{M}F(x,y)$, une fonction quelconque supposée continue pour toutes valeurs de x et de y respectivement comprises entre x_1 et x_2, y_1 et y_2. On a, par hypothèse,

$$\mathfrak{M}_{x_1}^{x_2} F(x,y) = f(y). \tag{11}$$

De là résulte

$$f(y) = \frac{F\left(x+\frac{h}{n},\, y\right) + F\left(x+2\frac{h}{n},\, y\right) + \ldots + F(x+h,\, y)}{n} + \varphi(y), \tag{12}$$

h étant fait égal à $x_2 - x_1$ et $\varphi(y)$ représentant une fonction qui satisfait aux conditions du lemme précédent.

L'équation (12) donne, en prenant la dérivée de l'ordre p par rapport à y,

$$f^p(y) = \frac{F_y^p\left(x+\frac{h}{n},\, y\right) + F_y^p\left(x+2\frac{h}{n},\, y\right) + \ldots + F_y^p(x+h,\, y)}{n} + \varphi^p(y).$$

Or, pour toute valeur de y comprise entre y_1 et y_2, $\varphi^p(y)$ converge vers zéro à mesure que n croît indéfiniment. Il vient donc, en général,

$$f^p(y) = \lim \left[\frac{F_y^p\left(x+\frac{h}{n},\, y\right) + F_y^p\left(x+2\frac{h}{n},\, y\right) + \ldots + F_y^p(x+h,\, y)}{n = \infty}\right] = \mathfrak{M}_{x_1}^{x_2} F_y^p(x,y),$$

et, eu égard à l'équation (11),

$$\frac{d^p . \mathfrak{M}_{x_1}^{x_2} F(x,y)}{dy^p} = \mathfrak{M}_{x_1}^{x_2} F_y^p(x,y).$$

III. — *Démonstration élémentaire du théorème fondamental ayant pour énoncé :*

« Toute fonction est développable, suivant la série de Taylor, tant
» que le module de la variable h reste moindre que la plus petite des

» valeurs pour lesquelles la fonction cesse d'être continue ou de » prendre mêmes valeurs aux deux limites $\theta = 0$, $\theta = 2\pi$. »

Soit

$$f\left(x + re^{\theta\sqrt{-1}}\right) = \mathrm{P} + \mathrm{Q}\sqrt{-1}.$$

Considérons le produit $e^{-n\theta\sqrt{-1}} f\left(x + re^{\theta\sqrt{-1}}\right)$, dans lequel n est entier. La dérivée de ce produit, prise par rapport à l'argument θ, est

$$\sqrt{-1}\left[re^{-(n-1)\theta\sqrt{-1}} f'\left(x + re^{\theta\sqrt{-1}}\right) - ne^{-n\theta\sqrt{-1}} f\left(x + re^{\theta\sqrt{-1}}\right)\right].$$

De là résulte, pour le cas où chacune des fonctions réelles P et Q prend mêmes valeurs respectives aux deux limites $\theta = 0$, $\theta = 2\pi$, et ne cesse pas de varier continûment entre ces limites,

$$(13)\quad r\mathfrak{M}_0^{2\pi} e^{-(n-1)\theta\sqrt{-1}} f'\left(x + re^{\theta\sqrt{-1}}\right) = n\mathfrak{M}_0^{2\pi} e^{-n\theta\sqrt{-1}} f\left(x + re^{\theta\sqrt{-1}}\right).$$

On a d'ailleurs

$$(14)\quad \mathfrak{M}_0^{2\pi} e^{-(n-1)\theta\sqrt{-1}} f'\left(x + re^{\theta\sqrt{-1}}\right) = \frac{d.\mathfrak{M}_0^{2\pi} e^{-n\theta\sqrt{-1}} f\left(x + re^{\theta\sqrt{-1}}\right)}{dr}.$$

Si donc on pose

$$\mathfrak{M}_0^{2\pi} e^{-n\theta\sqrt{-1}} f\left(x + re^{\theta\sqrt{-1}}\right) = \varphi(r),$$

il vient, eu égard aux équations (13) et (14),

$$r\varphi'(r) = n\varphi(r).$$

Ce résultat exprime que la différence $n \log r - \log\varphi(r)$ a zéro pour dérivée, c'est-à-dire qu'elle est constante. On a donc [*]

$$\varphi(r) = \mathrm{C}r^n;$$

---

[*] En procédant par une suite de dérivations effectuées sur l'équation

$$r\varphi'(r) = n\varphi(r),$$

on trouve aisément

$$r^2\varphi''(r) = n(n-1)\varphi(r), \qquad r^3\varphi'''(r) = n(n-1)(n-2)\varphi(r), \ldots,$$
$$r^n\varphi^{(n)}(r) = n(n-1)\ldots 2.1.\varphi(r), \qquad \varphi^{n+1}(r) = 0.$$

De là résulte, comme conséquence immédiate des deux dernières équations:

$$1^\circ.\quad \varphi^n(r) = \text{constante}; \qquad 2^\circ.\quad \varphi(r) = \mathrm{C}r^n.$$

d'où, substituant,

$$(15) \qquad Cr^n = \mathfrak{M}_0^{2\pi} e^{-n\theta\sqrt{-1}} f\left(x + re^{\theta\sqrt{-1}}\right).$$

Supposons que le module r puisse varier depuis zéro jusqu'à R, sans que les fonctions P et Q cessent de remplir la condition des limites et d'être continues. En ce cas, la constante C conserve, pour tout cet intervalle, une seule et même valeur. Il vient donc, en prenant la dérivée de l'ordre n par rapport à r,

$$1.2\ldots n\mathrm{C} = \mathfrak{M}_0^{2\pi} f^n\left(x + re^{\theta\sqrt{-1}}\right),$$

puis, faisant $r = 0$,

$$\mathrm{C} = \frac{f^n(x)}{1.2\ldots n}.$$

Cette valeur, transportée dans l'équation (15), donne, en remplaçant r par R,

$$(16) \qquad \frac{f^n(x)}{1.2\ldots n} = \frac{1}{\mathrm{R}^n} \mathfrak{M}_0^{2\pi} e^{-n\theta\sqrt{-1}} f\left(x + \mathrm{R}e^{\theta\sqrt{-1}}\right).$$

Cela posé, considérons la série

$$f(x) + h\frac{f'(x)}{1} + h^2\frac{f''(x)}{1.2} + \ldots + h^n\frac{f^n(x)}{1.2\ldots n} + \ldots.$$

En vertu de l'équation (16), cette série est nécessairement convergente pour toute valeur de h moindre que R. On a donc, en supposant $h < \mathrm{R}$, et remarquant que toute valeur de x qui satisfait à l'équation (16) se lie à d'autres valeurs qui y satisfont également [*],

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1}f'(x) + \frac{h^2}{1.2}f''(x) + \ldots$$

C. Q. F. D.

[*] Voir les *Bulletins de l'Académie royale de Belgique*, tome XIII, n° 7.