JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Lettres sur diverses questions d'analyse et de physique mathématique concernant l'ellipsoïde, adressées à M. P.-H. Blanchet, première lettre

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 11 (1846), p. 217-236.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1846_1_11__217_0>

LETTRES

SUR DIVERSES QUESTIONS

D'ANALYSE ET DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

CONCERNANT L'ELLIPSOÏDE,

ADRESSÉES A M. P.-H. BLANCHET,

Par J. LIOUVILLE.

PREMIÈRE LETTRE.

Monsieur,

Vous avez bien voulu me prier d'entrer dans quelques développements au sujet de certaines formules que j'ai données sans démonstration à la page 227 du tome X du *Journal de Mathématiques*. Je cède volontiers à votre désir et vous sais gré d'avoir porté un moment votre attention sur ces formules auxquelles j'attache, je l'avoue, beaucoup de prix, à cause du rôle qu'elles doivent jouer dans la plupart des grandes questions physico-mathématiques concernant l'ellipsoïde. Mais permettez-moi quelques détails préliminaires relatifs aux *coordonnées elliptiques*, dont les géomètres, dans ces derniers temps, ont fait si souvent usage.

Dans ce système de coordonnées on regarde chaque point m de l'espace comme déterminé par l'intersection de trois surfaces du second degré, homofocales et, par conséquent, se coupant à angle droit; les équations de ces trois surfaces étant

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - c^2} = 1,$$
$$\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} - \frac{z^2}{c^2 - \mu^2} = 1,$$
$$\frac{x^2}{\nu^2} - \frac{y^2}{b^2 - \nu^2} - \frac{z^2}{c^2 - \nu^2} = 1,$$

ρ, μ, ν sont les coordonnées elliptiques du point m qui a pour coordonnées ordinaires x, y, z. On suppose $b < c$, $\rho > c$, μ compris entre b et c, $\nu^2 > b^2$.

D'après les formules précédentes, ρ^2, μ^2, ν^2 sont les racines de l'équation

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - c^2} = 1,$$

qui est du troisième degré en ρ^2, et qui peut s'écrire

$$\rho^6 - \rho^4(x^2 + y^2 + z^2 + b^2 + c^2) \\ + \rho^2[(b^2 + c^2)x^2 + c^2y^2 + b^2z^2 + b^2c^2] - b^2c^2x^2 = 0.$$

On a donc

$$\begin{aligned} &\rho^2 + \mu^2 + \nu^2 = x^2 + y^2 + z^2 + b^2 + c^2, \\ &\rho^2\mu^2 + \rho^2\nu^2 + \mu^2\nu^2 = (b^2 + c^2)x^2 + c^2y^2 + b^2z^2 + b^2c^2, \\ &\rho^2\mu^2\nu^2 = b^2c^2x^2; \end{aligned}$$

et de là on tire

$$\begin{aligned} bcx &= \rho\mu\nu, \\ b\sqrt{c^2 - b^2}.y &= \sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}, \\ c\sqrt{c^2 - b^2}.z &= \sqrt{\rho^2 - c^2}\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}, \end{aligned}$$

les seconds membres devant être toutefois affectés de signes convenables. Pour parcourir, en effet, l'ellipsoïde qui répond à chaque valeur déterminée de ρ, il faut faire varier ν entre les limites $-b$, $+b$, admettant ainsi pour ν des valeurs négatives; et de même il faut prendre les radicaux $\sqrt{b^2 - \nu^2}$, $\sqrt{\mu^2 - b^2}$, $\sqrt{c^2 - \mu^2}$, qui peuvent s'évanouir, tantôt avec le signe $+$, tantôt avec le signe $-$, ces radicaux changeant de signe en s'évanouissant. C'est sans doute pour éviter ces discussions de signes que M. Jacobi introduit deux angles dont les sinus et cosinus prennent naturellement leurs signes ordinaires sans qu'on ait besoin de recourir à aucune convention nouvelle. En effet, d'après les limites imposées aux valeurs de μ et ν, on peut faire

$$\nu = b\cos\psi, \quad \mu = \sqrt{c^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi},$$

d'où

$$\sqrt{b^2-\nu^2} = b\sin\psi,$$

$$\sqrt{\mu^2-b^2} = \sqrt{c^2-b^2}.\cos\varphi, \quad \sqrt{c^2-\mu^2} = \sqrt{c^2-b^2}.\sin\varphi;$$

on a ainsi les expressions de x, y, z en ρ, φ, ψ :

$$x = \frac{\rho\cos\psi}{c}\sqrt{c^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi},$$

$$y = \sqrt{\rho^2-b^2}.\sin\psi\cos\varphi,$$

$$z = \sqrt{\rho^2-c^2}.\frac{\sin\varphi\sqrt{c^2-b^2\cos^2\psi}}{c}:$$

les radicaux qui restent sont essentiellement positifs, et les signes des seconds membres dépendent des sinus et cosinus des angles φ et ψ, angles qu'on doit faire varier de $\psi = 0$ à $\psi = \pi$, et de $\varphi = 0$ à $\varphi = 2\pi$. Mais je m'en tiendrai aux formules en ρ, μ, ν que je crois généralement plus commodes.

En désignant par $d\omega$ l'élément de la surface de l'ellipsoïde (ρ), je veux dire de l'ellipsoïde dont l'équation est

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2-b^2} + \frac{z^2}{\rho^2-c^2} = 1,$$

on trouve aisément

$$d\omega = d\mu d\nu\cdot\frac{(\mu^2-\nu^2)\sqrt{\rho^2-\mu^2}\sqrt{\rho^2-\nu^2}}{\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{c^2-\mu^2}\sqrt{b^2-\nu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}}.$$

On a besoin aussi de considérer la distance ds du point (ρ, μ, ν) de l'ellipsoïde (ρ) à l'ellipsoïde infiniment voisin $(\rho + d\rho)$; elle s'exprime par

$$ds = \frac{d\rho}{h},$$

la valeur de h étant donnée par la formule

$$h = \sqrt{\left(\frac{d\rho}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{dz}\right)^2} = \frac{\sqrt{\rho^2-b^2}\sqrt{\rho^2-c^2}}{\sqrt{\rho^2-\mu^2}\sqrt{\rho^2-\nu^2}}.$$

Cette quantité h a une liaison intime avec la perpendiculaire P, abaissée du centre sur le plan tangent à l'ellipsoïde (ρ), au point (ρ, μ, ν);

car

$$P = \frac{\rho\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2}}{\sqrt{\rho^2 - \mu^2}\sqrt{\rho^2 - \nu^2}} = h\rho.$$

Le produit $Pd\omega$ exprime le triple du volume de la pyramide qui a son sommet au centre O de l'ellipsoïde, et $d\omega$ pour base. Du point O comme centre, et avec un rayon égal à l'unité, décrivons une sphère, et appelons, avec M. Ivory, points *correspondants* de la sphère et de l'ellipsoïde (surface ou volume) les points $(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$ et (x, y, z), dont les coordonnées sont liées par les formules

$$x = \rho\mathrm{x}, \quad y = \sqrt{\rho^2 - b^2}\,.\,\mathrm{y}, \quad z = \sqrt{\rho^2 - c^2}\,.\,\mathrm{z};$$

à l'élément $d\omega$ de la surface de l'ellipsoïde *correspondra* un élément $d\sigma$ de la surface de la sphère, et au volume $\frac{1}{3}Pd\omega$ de pyramide ellipsoïdale correspondra un volume $\frac{1}{3}d\sigma$ de pyramide ayant aussi le point O pour centre, mais pour base $d\sigma$. Or il est visible que deux volumes correspondants de la sphère et de l'ellipsoïde sont entre eux dans le rapport de 1 à $\rho\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2}$; on a donc

$$\tfrac{1}{3}Pd\omega = \tfrac{1}{3}d\sigma\,.\,\rho\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2},$$

et, en faisant

$$l = \frac{P}{\rho\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2}} = \frac{h}{\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2}} = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 - \mu^2}\sqrt{\rho^2 - \nu^2}},$$

on en conclut

$$ld\omega = d\sigma.$$

Le produit $ld\omega$, qui s'exprime ainsi par un élément $d\sigma$ d'une surface sphérique de rayon égal à l'unité, figurera souvent dans nos formules. Il est bon d'observer que son expression en coordonnées elliptiques, savoir

$$ld\omega = \frac{(\mu^2 - \nu^2)\,d\mu d\nu}{\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}},$$

ne dépend pas de ρ.

Maintenant, je dois vous parler de certaines fonctions auxquelles M. Lamé a été conduit par la considération des coordonnées elliptiques, et dont l'étude approfondie ne peut manquer, à mon avis, de fournir aux géomètres une foule de résultats importants.

M. Lamé a fait voir qu'il existe des fonctions R, entières en ρ, $\sqrt{\rho^2 - b^2}$, $\sqrt{\rho^2 - c^2}$, pour lesquelles (n étant un nombre entier, positif ou nul) on a

$$(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)\frac{d^2\mathrm{R}}{d\rho^2} + [2\rho^3 - (b^2 + c^2)\rho]\frac{d\mathrm{R}}{d\rho} = [n(n+1)\rho^2 - \mathrm{B}]\,\mathrm{R},$$

ou bien, si l'on veut,

$$\frac{d^2\mathrm{R}}{d\varepsilon^2} = [n(n+1)\rho^2 - \mathrm{B}]\,\mathrm{R},$$

en posant

$$\varepsilon = \int \frac{d\rho}{\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}}.$$

Le paramètre B n'est pas quelconque; il doit être choisi parmi les racines de certaines équations déterminées. M. Lamé a prouvé que ces racines sont toutes réelles; il s'est servi pour cela d'intégrales définies : ajoutons qu'en employant convenablement le théorème ou plutôt la méthode de M. Sturm, on aurait pu démontrer d'une manière plus simple encore que les racines de chaque équation en B sont réelles et inégales entre elles. A l'entier déterminé n répondent $2n+1$ racines B et $2n+1$ fonctions R. Chacune de ces fonctions comporte en facteur une constante arbitraire. Les unes sont des polynômes en ρ de degré n, les autres sont le produit de $\sqrt{\rho^2 - b^2}$ ou $\sqrt{\rho^2 - c^2}$ par un polynôme de degré $n - 1$, ou enfin le produit de $\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2}$ par un polynôme de degré $n - 2$. Les polynômes en ρ dont il s'agit sont de l'une des deux formes $f(\rho^2)$, $\rho f(\rho^2)$, c'est-à-dire ne contiennent que des puissances paires de ρ, ou que des puissances impaires, suivant qu'ils sont eux-mêmes de degré pair, ou de degré impair. Dans tous les cas, le rapport de R à ρ^n tend vers une limite constante et finie lorsque ρ augmente à l'infini; la limite dont nous parlons pourra être, si l'on veut, rendue égale à l'unité, de telle sorte que pour ρ très-grand, on ait, à très-peu près, $\mathrm{R} = \rho^n$, et, en admettant cette condition nouvelle, les fonctions R seront complétement déterminées.

Nous désignerons par M et N ce que devient R lorsqu'on y change ρ en μ et en ν, avec l'attention toutefois d'écrire $\sqrt{c^2 - \mu^2}$ au lieu de $\sqrt{\mu^2 - c^2}$, et $\sqrt{c^2 - \nu^2}$, $\sqrt{b^2 - \nu^2}$ au lieu de $\sqrt{\nu^2 - c^2}$, $\sqrt{\nu^2 - b^2}$, afin d'éviter les imaginaires.

M. Lamé a démontré quelques propriétés des fonctions M et N, et nous pourrions, à ce qu'il a donné, ajouter beaucoup de résultats nouveaux. Mais cela nous écarterait trop de notre objet. J'y reviens en vous parlant d'une quatrième fonction S, qu'il faut absolument joindre aux trois précédentes R, M, N pour obtenir une théorie complète. La fonction S satisfait à la même équation différentielle que R. Je la définis en posant

$$S = (2n+1) R \int_\rho^\infty \frac{d\rho}{R^2 \sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}},$$

ce qui suppose

$$S \frac{dR}{d\rho} - R \frac{dS}{d\rho} = \frac{2n+1}{\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}},$$

ou bien

$$S \frac{dR}{d\varepsilon} - R \frac{dS}{d\varepsilon} = 2n+1.$$

De là résulte

$$\frac{1}{S}\frac{d^2S}{d\varepsilon^2} = \frac{1}{R}\frac{d^2R}{d\varepsilon^2};$$

ainsi S et R satisfont bien à la même équation différentielle

$$\frac{d^2U}{d\varepsilon^2} = [n(n+1)\rho^2 - B] U,$$

dont elles sont deux intégrales particulières, fournissant par leur réunion l'intégrale complète. On a $S = 0$ pour $\rho = \infty$, et, pour des valeurs de ρ très-grandes, on a, à très-peu près, $S = \frac{1}{\rho^{n+1}}$.

Il est aisé de former les fonctions R, M, N, S, relatives aux valeurs successives 0, 1, 2,..., de n. Pour $n = 0$, il n'y a qu'une seule racine $B = 0$, par suite une seule fonction $R = 1$, à laquelle répondent $M = 1$, $N = 1$, et

$$S = \int_\rho^\infty \frac{d\rho}{\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}}.$$

Pour $n = 1$, on a trois valeurs de B, et trois valeurs correspondantes de R, savoir

$$B = b^2 + c^2, \quad R = \rho,$$
$$B = c^2, \quad R = \sqrt{\rho^2 - b^2};$$
$$B = b^2, \quad R = \sqrt{\rho^2 - c^2};$$

et ainsi des autres.

Les fonctions R, M, N, relatives à un couple (n, B) quelconque, fournissent des solutions particulières de l'équation

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = 0.$$

M. Lamé a prouvé, en effet, que cette équation est satisfaite en posant

$$u = \mathrm{RMN}.$$

Le second membre est fonction de ρ, μ, ν, mais on peut l'exprimer en x, y, z; et il se transforme alors en un polynôme de degré n par rapport à ces coordonnées. Cela paraîtra d'abord évident si R est de la forme $f(\rho^2)$; car on aura alors

$$\mathrm{RMN} = f(\rho^2) f(\mu^2) f(\nu^2),$$

et le second membre étant une fonction entière symétrique et du degré $\frac{1}{2}n$, par rapport aux quantités ρ^2, μ^2, ν^2, racines de l'équation

$$\rho^6 - \rho^4(x^2 + y^2 + z^2 + b^2 + c^2) + \rho^2[(b^2 + c^2)x^2 + c^2y^2 + b^2z^2 + b^2c^2] - b^2c^2x^2 = 0,$$

s'exprimera par les formules connues au moyen des coefficients de cette équation, ce qui conduira à un polynôme du même degré en x^2, y^2, z^2, ou du degré n en x, y, z. Et si R, outre un facteur de la forme $f(\rho^2)$, contient quelque facteur comme ρ, $\sqrt{\rho^2 - b^2}$, ou $\sqrt{\rho^2 - c^2}$, la dernière conclusion subsistera puisque, d'après les valeurs mêmes de x, y, z en ρ, μ, ν, les produits

$$\rho\mu\nu, \quad \sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}, \quad \sqrt{\rho^2 - c^2}\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2},$$

s'expriment respectivement par les produits de ces coordonnées x, y, z, et d'une constante. On voit aussi que chaque polynôme RMN est une fonction entière de x^2, y^2, z^2, ou le produit d'une telle fonction par un des facteurs suivants

$$x,\ y,\ z,\ xy,\ xz,\ yz,\ xyz.$$

L'étude des polynômes RMN considérés en eux-mêmes, indépendamment des coordonnées ρ, μ, ν, offre un grand intérêt. Mais je ne puis m'en occuper ici.

Pour démontrer que

$$u = \mathrm{RMN}$$

donne

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = 0,$$

M. Lamé se sert uniquement des équations différentielles dont R, M, N dépendent, et puisque S satisfait à la même équation que R, il s'ensuit qu'en posant

$$u = \mathrm{SMN},$$

on trouverait encore pour u l'équation aux différences partielles indiquée.

Ces préliminaires établis, j'entre en matière. Soit Δ la distance de deux points (ρ, μ, ν), (ρ, μ', ν'), ou m, m', pour lesquels ρ est le même, et qui sont, par conséquent, situés sur un même ellipsoïde dont l'équation est

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - c^2} = 1.$$

Soient, de plus, $d\omega'$ l'élément de la surface ellipsoïdale en m', et l' le quotient obtenu en divisant par le produit des trois demi-axes la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent en m' (vous allez rencontrer ici le produit $l'd\omega'$ ou $ld\omega$ dont il a été question ci-dessus). Considérons comme appartenant au point m ou (ρ, μ, ν) les fonctions R, M, N, S que nous avons définies tout à l'heure et qui dépendent, R et S de ρ seulement, M de μ seulement, et N de ν. Au point m' ou (ρ, μ', ν'), R et S demeurent les mêmes puisque ρ ne change pas; mais M et N prendront de nouvelles valeurs M′, N′, fonctions respectivement de μ' et de ν'. Maintenant je dis qu'on aura

$$\text{(A)} \qquad \iint \frac{l'\mathrm{M}'\mathrm{N}'\,d\omega'}{\Delta} = \frac{4\pi\mathrm{RSMN}}{2n+1}.$$

Telle est la formule, à mon avis fondamentale, dont vous me demandez surtout la démonstration et qui se complète par ces deux autres où Δ désigne la distance de deux points quelconques, m, m' ou (ρ, μ, ν), (ρ', μ', ν') pour lesquels les paramètres ρ, ρ' ne sont plus égaux:

$$\text{(B)} \qquad \int\int \frac{l'\mathrm{M}'\mathrm{N}'d\omega'}{\Delta} = \frac{4\pi\mathrm{RS}'\mathrm{MN}}{2n+1}, \quad \text{pour} \quad \rho < \rho',$$

et

$$\text{(C)} \qquad \int\int \frac{l'\mathrm{M}'\mathrm{N}'d\omega'}{\Delta} = \frac{4\pi\mathrm{R}'\mathrm{SMN}}{2n+1}, \quad \text{pour} \quad \rho > \rho'.$$

Dans ces trois formules, l'intégration doit être étendue à la surface entière de l'ellipsoïde qui passe par le point m' et dont un élément quelconque est exprimé par $d\omega'$. L'intégrale

$$\int\int \frac{l'\mathrm{M}'\mathrm{N}'d\omega'}{\Delta}$$

exprime toujours le *potentiel*, relativement au point m, d'une matière distribuée sur la surface de l'ellipsoïde qui passe en m', la densité de la distribution pour chaque point m' étant mesurée par la fonction $l'\mathrm{M}'\mathrm{N}'$ des coordonnées (μ', ν') de ce point qui occupe successivement toutes les positions possibles sur l'ellipsoïde. Mais la formule (A) se rapporte au cas d'un point m situé sur la surface même dont on prend le potentiel, la formule (B) au cas d'un point intérieur, et la formule (C) au cas d'un point extérieur.

Ce n'est pas sans raison que je vous parle ici de *potentiels*. D'abord si les formules (A), (B), (C) sont d'un très-grand secours dans une foule de questions physico-mathématiques, cela tient en grande partie à ce que leurs premiers membres expriment des potentiels. Et puis la considération de ces quantités et de leurs propriétés sera la base de la démonstration que je vais vous donner ici des formules (A), (B), (C), démonstration que je choisis comme une des plus simples et des plus claires parmi celles que j'ai obtenues.

D'après un théorème connu, qui s'étend à des surfaces quelconques, mais que nous allons ici appliquer spécialement à l'ellipsoïde représenté par l'équation

$$\frac{x^2}{\rho'^2} + \frac{y^2}{\rho'^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho'^2 - c^2} = 1,$$

on pourra toujours trouver une fonction λ ou λ' relative à chaque point déterminé sur cet ellipsoïde par les coordonnées μ, ν, ou μ', ν', et qui soit telle que l'on ait généralement

$$\text{(I)} \qquad \int\int \frac{\lambda' d\omega'}{\Delta} = \mathrm{MN},$$

Δ étant la distance de deux points quelconques (μ, ν), (μ', ν'), ou, si l'on veut, (ρ', μ, ν), (ρ', μ', ν'), pris sur la surface.

Cherchons la valeur de λ. Pour cela, donnons d'abord à Δ une signification plus étendue, en désignant par cette lettre la distance d'un point quelconque (ρ', μ', ν') de la surface à un point quelconque (ρ, μ, ν), de l'*intérieur*, et posons

$$u = \int\int \frac{\lambda' d\omega'}{\Delta} - \frac{\mathrm{RMN}}{\mathrm{R}'}.$$

A la surface, ou pour $\rho = \rho'$, on aura $u = 0$. Pour un point quelconque (ρ, μ, ν) de l'intérieur, on trouve

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = 0;$$

cela résulte de ce que $\frac{1}{\Delta}$ et RMN satisfont séparément à cette équation aux différences partielles. D'ailleurs, ni la fonction u, ni même ses dérivées d'ordre quelconque ne deviennent infinies ou discontinues dans l'espace que nous considérons. Il suit donc d'un théorème de Green, que dans tout cet espace on a $u = 0$, c'est-à-dire que

$$\text{(II)} \qquad \int\int \frac{\lambda' d\omega'}{\Delta} = \frac{\mathrm{RMN}}{\mathrm{R}'}, \quad \text{pour} \quad \rho < \rho'.$$

Peut-être est-il bon de rappeler en peu de mots la démonstration du théorème sur lequel je viens de m'appuyer en dernier lieu. Pour cela, multiplions par $udxdydz$, et intégrons, dans tout l'espace intérieur de l'ellipsoïde, l'équation

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = 0.$$

A l'aide d'une intégration par parties, on a

$$\int u \frac{d^2u}{dx^2} dx = u\frac{du}{dx} - \int \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx;$$

mais en passant de l'intégrale indéfinie à l'intégrale définie, le terme $u\frac{du}{dx}$ disparaît, puisque les limites sont relatives à la surface pour laquelle on a constamment $u = 0$. En ayant égard à cette remarque, on trouve sans difficulté

$$\int\int\int \left[\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \left(\frac{du}{dz}\right)^2\right] dxdydz = 0,$$

d'où

$$\frac{du}{dx} = 0, \quad \frac{du}{dy} = 0, \quad \frac{du}{dz} = 0,$$

et partant

$$u = \text{constante}.$$

La valeur de u, étant nulle à la surface, l'est donc aussi pour tous les points intérieurs.

En désignant par Δ la distance d'un point quelconque (ρ', μ', ν') de la surface à un point quelconque (ρ, μ, ν) de l'*extérieur*, et en observant que la fonction

$$u = \int\int \frac{\lambda' d\omega'}{\Delta} - \frac{\text{SMN}}{\text{S}'}$$

est encore nulle à la surface, et satisfait au dehors à l'équation

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = 0,$$

à quoi il faut ajouter que u et les dérivées partielles de u sont fonctions continues de x, y, z, ou ρ, μ, ν, et s'évanouissent pour $\rho = \infty$, on conclura semblablement que

$$\text{(III)} \qquad \int\int \frac{\lambda' d\omega'}{\Delta} = \frac{\text{SMN}}{\text{S}'} \quad \text{pour} \quad \rho > \rho'.$$

Cette fois, en intégrant l'équation

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = 0,$$

multipliée par $udxdydz$, on devra étendre l'intégration à tout l'espace infini situé hors de l'ellipsoïde. Pour plus de clarté, on n'intégrera d'abord que dans l'espace compris entre l'ellipsoïde (ρ') et un ellipsoïde quelconque (ρ). Les termes qui, dans l'intégration par parties, sont relatifs à la surface (ρ'), disparaîtront comme tout à l'heure, et quant à ceux qui se rapportent à la surface (ρ), on verra sans peine, par la manière dont S diminue quand ρ augmente, que l'intégrale double qui les concerne s'évanouit aussi pour $\rho = \infty$.

De l'équation

$$\int\int\int\left[\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\left(\frac{du}{dy}\right)^2+\left(\frac{du}{dz}\right)^2\right]dxdydz = 0,$$

j'ai conclu

$$\frac{du}{dx} = 0, \quad \frac{du}{dy} = 0, \quad \frac{du}{dz} = 0, \quad u = \text{constante} = 0,$$

et j'en avais le droit, puisque la valeur de u est réelle, et s'évanouit à la surface (ρ'). Mais, quand même la fonction u serait imaginaire et de la forme $u_1 + u_2\sqrt{-1}$, on arriverait à la même conclusion générale $u = 0$; car, dès que u satisfait à l'équation indéfinie

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2} = 0,$$

et à la condition de s'évanouir à la surface (ρ'), u_1 et u_2 devront jouir de la même propriété, en sorte que les raisonnements ci-dessus s'appliqueront aux deux parties séparées dont u se compose.

La valeur de u serait imaginaire si la racine B dont elle dépend l'était elle-même; et vous voyez que, pour appliquer notre analyse, il n'est pas absolument nécessaire d'avoir prouvé d'avance la réalité des racines B.

La formule (I) une fois admise entraîne, comme vous le voyez, les formules (II) et (III), en sorte que le potentiel

$$\int\int\frac{\lambda' d\omega'}{\Delta},$$

qui d'abord n'était connu que pour les points de la surface, l'est maintenant pour tous les points intérieurs ou extérieurs. Nous pouvons en déduire les composantes normales à la surface des actions exercées sur deux points infiniment voisins, l'un extérieur et l'autre intérieur, par la matière qui produit ce potentiel; puis égaler, en vertu d'un théorème connu, la différence de ces deux composantes à $4\pi\lambda$, λ étant ce que devient λ' pour l'élément $d\omega$ auquel les deux points sont contigus.

La composante de l'action exercée sur un point dans la direction d'un élément ds est exprimée, comme on sait, par $\frac{dV}{ds}$, V étant le potentiel. Prenons pour ds une très-petite droite normale à l'ellipsoïde (ρ) et exprimant la distance de cet ellipsoïde à l'ellipsoïde infiniment voisin qui répond au paramètre $\rho + d\rho$; nous aurons

$$ds = \frac{d\rho}{h}, \quad \frac{dV}{ds} = h\frac{dV}{d\rho}.$$

Mais pour un point intérieur on a

$$V = \frac{RMN}{R'}.$$

La composante normale demandée est donc alors

$$\frac{hMN}{R'} \cdot \frac{dR}{d\rho},$$

et quand on se place à une distance infiniment petite de l'ellipsoïde (ρ'), c'est-à-dire quand on pose $\rho = \rho'$, ou bien $\rho' = \rho$, ce qui nous sera plus commode, elle devient

$$\frac{hMN}{R} \cdot \frac{dR}{d\rho}.$$

On trouve semblablement, pour le point extérieur infiniment voisin, la composante normale

$$\frac{hMN}{S} \cdot \frac{dS}{d\rho},$$

et, en prenant la différence, conformément au théorème invoqué, on obtient

$$4\pi\lambda = \frac{hMN}{RS}\left(S\frac{dR}{d\rho} - R\frac{dS}{d\rho}\right).$$

Mais on a

$$S\frac{dR}{d\rho} - R\frac{dS}{d\rho} = \frac{2n+1}{\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2}},$$

et

$$\frac{h}{\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2}} = l.$$

On a donc enfin

$$\lambda = \frac{(2n+1)\,l\mathrm{MN}}{4\pi\mathrm{RS}}, \quad \text{d'où} \quad \lambda' = \frac{(2n+1)\,l'\mathrm{M'N'}}{4\pi\mathrm{R'S'}},$$

en rétablissant le paramètre ρ' et changeant aussi μ, ν en μ', ν' pour avoir la valeur relative à $d\omega'$.

Substituant cette valeur de λ' dans l'équation (I), on trouve

$$\int\!\!\int \frac{l'\mathrm{M'N'}d\omega'}{\Delta} = \frac{4\pi\mathrm{R'S'MN}}{2n+1};$$

c'est la formule (A), avec cette seule différence que dans la formule (A) le paramètre ρ' est remplacé par son égal ρ, et, conséquemment, le produit R′S′ par le produit RS.

En substituant la valeur de λ' dans les formules (II) et (III), on obtiendra de même les formules (B) et (C), pour lesquelles ρ et ρ' ne sont plus égaux.

A la valeur $n = 0$ répond, comme nous l'avons vu, une seule fonction $\mathrm{R} = 1$. La formule (A) donne, dans ce cas,

$$\int\!\!\int \frac{l'\,d\omega'}{\Delta} = 4\pi \int_\rho^\infty \frac{d\rho}{\sqrt{(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)}}.$$

Généralement, si l'on fait

$$\zeta = \mathrm{MN}, \quad m = \frac{4\pi\,\mathrm{RS}}{2n+1},$$

cette formule (A) devient

$$\int\!\!\int \frac{l'\zeta' d\omega'}{\Delta} = m\zeta;$$

m est une constante pour toute la surface (ρ), et ζ seule varie quand on passe d'un point de cette surface à un autre. La forme sous laquelle je viens d'écrire l'équation (A) est d'autant plus remarquable, qu'elle se conserve pour des surfaces quelconques, avec des valeurs convenables de m et de ζ. Vous voyez que les produits MN font partie de ces fonctions ζ dont j'ai dit un mot dans la Note intitulée : *Sur une propriété générale d'une classe de fonctions*. Il s'ensuit qu'en prenant deux de ces produits MN, $\mathrm{M_1N_1}$, pour deux valeurs m, m_1 différentes, on a

$$\int\!\!\int l\mathrm{MN\,M_1\,N_1}d\omega = 0,$$

ce qui était déjà démontré par le travail de M. Lamé ; et de cette dernière équation on conclut, comme vous savez, que les valeurs de m et B sont essentiellement réelles.

Permettez-moi de vous montrer ici, par un exemple, l'utilité des formules (A), (B), (C). Pour cela reprenons le cas de $n = 0$, où l'on a

$$R = 1, \quad M = 1, \quad N = 1,$$

et

$$S = \int_\rho^\infty \frac{d\rho}{\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}}.$$

Ces valeurs introduites dans les formules (B) et (C) donnent

$$\iint \frac{l' d\omega'}{\Delta} = 4\pi \int_{\rho'}^\infty \frac{d\rho'}{\sqrt{(\rho'^2 - b^2)(\rho'^2 - c^2)}}, \quad \text{pour} \quad \rho < \rho'.$$

et

$$\iint \frac{l' d\omega'}{\Delta} = 4\pi \int_\rho^\infty \frac{d\rho}{\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho - c^2)}}, \quad \text{pour} \quad \rho > \rho'.$$

Ainsi, pour tous les points intérieurs à l'ellipsoïde (ρ'), le potentiel

$$V = \iint \frac{l' d\omega'}{\Delta}$$

conserve une valeur constante; l' est donc la densité de la distribution électrique d'équilibre sur cet ellipsoïde; nous savons d'ailleurs que l' est proportionnelle à la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent à la surface, ou bien à la distance, comptée normalement en chaque point, de notre ellipsoïde à un autre ellipsoïde infiniment voisin, concentrique, semblable et semblablement placé, et nous retrouvons ainsi un théorème bien connu.

A l'extérieur, la valeur du potentiel V de la couche électrique en chaque point (ρ, μ, ν) est fonction de ρ seulement; donc $\rho =$ *constante* est l'équation générale des surfaces de niveau, lesquelles se trouvent ainsi être des surfaces elliptiques homofocales, parmi lesquelles notre ellipsoïde lui-même se trouve compris. Quant à la valeur de l'attraction exercée au point (ρ, μ, ν), elle est fournie par la formule

$$\frac{dV}{ds} = h\frac{dV}{d\rho} = \sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2} . l \frac{dV}{d\rho}:$$

elle est donc exprimée, abstraction faite du signe, par

$$4\pi l = \frac{4\pi}{\sqrt{\rho^2-\mu^2}\sqrt{\rho^2-\nu^2}}.$$

Enfin la masse agissante est

$$\iint l' d\omega' = \iint d\sigma' = 4\pi.$$

Si la masse agissante était prise plus grande ou plus petite, sans que la loi de la distribution fût altérée, le potentiel et l'intensité de l'attraction varieraient dans le même rapport que cette masse. De là on peut conclure immédiatement la valeur de l'attraction d'une couche homogène comprise entre deux ellipsoïdes concentriques, semblables et semblablement placés. On divisera la valeur ci-dessus par 4π, et on la multipliera par la densité de la couche, puis par son volume, lesquel est au triple du volume total de l'ellipsoïde, comme l'épaisseur de la couche à l'extrémité du demi-axe ρ est à ce demi-axe. Vous comprenez sans peine comment l'on obtient ensuite l'attraction d'une série de couches de ce genre, qui peuvent même être hétérogènes entre elles. Mais tout cela est trop connu aujourd'hui, pour que je croie devoir m'y arrêter. J'aime mieux montrer comment les formules (B) et (C) fournissent immédiatement les trois composantes de l'action exercée par l'ellipsoïde (ρ'), supposé plein et homogène, sur un point quelconque, intérieur ou extérieur.

Or, pour avoir, par exemple, la composante parallèle à l'axe des x, on observera que cette composante dépend de l'intégrale

$$\iiint \frac{d\frac{1}{\Delta}}{dx'} dx'dy'dz',$$

où Δ désigne la distance d'un point quelconque (x', y', z') de la masse au point (x, y, z), de sorte que

$$\Delta = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}.$$

En effectuant une intégration, cette formule devient

$$\iint \frac{\cos\alpha' \, d\omega'}{\Delta},$$

$d\omega'$ étant l'élément superficiel de l'ellipsoïde, et α' l'angle que la normale à $d\omega'$ fait avec l'axe des x. On a d'ailleurs

$$\cos\alpha' = \frac{P'x'}{\rho'^2} = l'\mu'\nu'.\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}.$$

La composante cherchée devient donc

$$\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}\int\int\frac{l'\mu'\nu' d\omega'}{\Delta}.$$

et Δ est à présent la distance de l'élément $d\omega'$ au point (x, y, z) ou (ρ, μ, ν). Mais à $n = 1$, et $B = b^2 + c^2$, répond la fonction $R = \rho$, et, par suite, les fonctions

$$M = \mu, \quad N = \nu, \quad S = 3\rho\int_\rho^\infty \frac{d\rho}{\rho^2\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}}.$$

En appliquant à ces fonctions les formules (2) et (3), on a donc

$$\int\int\frac{l'\mu'\nu' d\omega'}{\Delta} = 4\pi\rho\mu\nu.\rho'\int_{\rho'}^\infty \frac{d\rho'}{\rho'^2\sqrt{(\rho'^2 - b^2)(\rho'^2 - c^2)}},$$

pour $\rho < \rho'$, et

$$\int\int\frac{l'\mu'\nu' d\omega'}{\Delta} = 4\pi\rho'\mu\nu.\rho\int_\rho^\infty \frac{d\rho}{\rho^2\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}},$$

pour $\rho > \rho'$. L'intégrale double, qui entrait dans nos formules, se trouve ainsi réduite à une intégrale simple, et le problème de l'attraction d'un ellipsoïde homogène est résolu. Il serait, au surplus, aisé de faire voir que les formules auxquelles nous sommes arrivés se ramènent à celles dont on fait ordinairement usage.

Excusez-moi si je me livre ici à une courte digression au sujet de la formule

$$\int\int\frac{\cos\alpha' d\omega'}{\Delta}.$$

C'est par une formule de cette espèce que s'exprime, en général, la composante parallèle à une droite fixe de l'attraction exercée par un corps homogène dont la densité est prise pour unité et qui est terminé par une surface quelconque; $d\omega'$ est alors l'élément de la surface dont il s'agit, α' l'angle que la perpendiculaire à $d\omega'$ fait avec la droite fixe, et Δ la distance de l'élément $d\omega'$ au point attiré m. On peut conclure comme ci-dessus la proposition énoncée en effectuant une intégration dans la formule générale qui donne la composante de l'attraction d'un corps estimée suivant un axe fixe. Mais on y arrive aussi et même on obtient un résultat plus général par la méthode suivante, dont les géomètres ont du reste plusieurs fois fait usage dans les questions de ce genre.

Prenons dans l'espace un point O quelconque, et menons du point O des rayons vecteurs au point attiré m, puis généralement à tous les points de la surface du corps attirant. En agrandissant tous ces rayons vecteurs d'une quantité infiniment petite proportionnelle à leurs grandeurs primitives, de telle sorte que 1 devienne $1+\tau$, on formera un nouveau système semblable au premier. Le potentiel V, qui est une quantité de seconde dimension, augmentera dans le rapport de $1+2\tau$ à l'unité; sa variation sera donc $2\tau V$. Mais on peut la calculer d'une autre manière. En effet, le rayon vecteur r du point attiré m ayant été augmenté de τr, V a dû varier par cette seule raison de $\frac{dV}{dr}\tau r$; d'un autre côté, V s'est augmenté du potentiel de la couche comprise entre l'ancienne surface, limite du corps attirant, et la surface du corps semblable que nous avons introduit. Soit P' la perpendiculaire abaissée du point O sur le plan tangent mené par $d\omega'$; dans la figure semblable cette perpendiculaire devient $(1+\tau)P'$; l'épaisseur de la couche dont nous venons de parler est donc $\tau P'$, d'où résulte ce potentiel

$$\tau\iint\frac{P'\,d\omega'}{\Delta}.$$

En résumé, les deux quantités

$$2\tau V \quad \text{et} \quad \frac{dV}{dr}\tau r+\tau\iint\frac{P'd\omega'}{\Delta},$$

exprimant toutes deux la variation de V, sont égales entre elles, et l'on a

$$2V=r\frac{dV}{dr}+\iint\frac{P'\,d\omega'}{\Delta}.$$

En nommant r' le rayon vecteur mené du point O à l'élément $d\omega'$, et α' l'angle que r' fait avec la normale à $d\omega'$, c'est-à-dire avec la perpendiculaire P', on a

$$P'=r'\cos\alpha'.$$

D'un autre côté, en représentant par F la force attractive exercée sur m dans le sens mO, composante de l'attraction totale, on sait que $F = -\frac{dV}{dr}$. Notre formule devient donc

$$F = \frac{1}{r}\int\int \frac{r' \cos\alpha' \, d\omega'}{\Delta} - \frac{2V}{r}.$$

Transportons actuellement le point O à l'infini sur le prolongement de la droite actuelle mO, prise comme droite fixe quelconque; les rayons r et r' deviendront infinis ensemble, et leur dernier rapport sera évidemment égal à l'unité; quant au dernier terme du second membre, il s'évanouira. La composante F, suivant la droite fixe indiquée, sera donc exprimée par

$$\int\int \frac{\cos\alpha' \, d\omega'}{\Delta},$$

ce qui s'accorde avec ce qu'on a vu plus haut.

Je vous ai montré, par des exemples simples, l'usage des formules (A), (B), (C) dans les questions relatives à l'attraction. On peut tirer de ces formules des résultats beaucoup plus étendus. J'y reviendrai dans une autre occasion. Il me resterait à présent aussi à développer, sous divers points de vue, pour en bien faire comprendre la nature, les formules (A), (B), (C), la formule (A) surtout. Mais cette lettre est déjà trop longue, et je me vois forcé de remettre ces nouveaux détails à un autre jour. J'espère du moins, monsieur, que vous regarderez les formules (A), (B), (C) comme bien établies par mon analyse, et que vous comprendrez, dès à présent, comment la même méthode a dû me fournir la solution (pour le cas d'un ellipsoïde quelconque) du problème de M. Gauss dont j'ai fait mention à la page 225 du tome X du *Journal de Mathématiques*. Je me suis servi, pour arriver aux formules (A), (B), (C), de l'équation

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = 0.$$

En formant, avec une seconde équation semblable,

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2} = 0,$$

la combinaison

$$v\frac{d^2u}{dx^2} - u\frac{d^2v}{dx^2} + v\frac{d^2u}{dy^2} - u\frac{d^2v}{dy^2} + v\frac{d^2u}{dz^2} - u\frac{d^2v}{dz^2} = 0,$$

puis multipliant par $dxdydz$, et intégrant, en prenant

$$u = \text{RMN}, \quad v = \frac{1}{\Delta},$$

on obtient encore les formules remarquables que voici :

$$\text{(D)} \qquad \text{U} = \frac{4\pi\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}}{2n+1}\frac{d\text{R}'}{d\rho'}\text{SMN}, \quad \text{pour} \quad \rho > \rho',$$

et

$$\text{(E)} \qquad \text{U} = \frac{4\pi\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}}{2n+1}\frac{d\text{S}'}{d\rho'}\text{RMN}, \quad \text{pour} \quad \rho < \rho',$$

où

$$\text{U} = \int\int \frac{\text{M}'\text{N}'\cos\upsilon'\,d\omega'}{\Delta^2};$$

les notations sont les mêmes que ci-dessus, et de plus υ' désigne l'angle compris entre la perpendiculaire à $d\omega'$, menée extérieurement à l'ellipsoïde (ρ'), et la droite Δ, tirée de cet élément au point (ρ, μ, ν). Vous vérifierez nos formules, dans un cas particulier, en faisant $n = 0$, car on a alors

$$\text{U} = \int\int \frac{\cos\upsilon'\,d\omega'}{\Delta^2},$$

et ces formules donnent

$$\text{U} = 0 \quad \text{pour} \quad \rho > \rho', \qquad \text{et} \qquad \text{U} = -4\pi \quad \text{pour} \quad \rho < \rho';$$

ce qui est exact, d'après un théorème connu qui a lieu pour toute surface fermée.

Veuillez agréer, monsieur, l'expression de mes sentiments d'estime et d'amitié.

J. Liouville.

Paris, 29 mai 1846.