JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

WILLIAM ROBERTS

Démonstration d'un théorème de Poisson

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 11 (1846), p. 210-211.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1846_1_11__210_0>

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME DE POISSON;

PAR M. WILLIAM ROBERTS.

Je vais donner une démonstration que je crois nouvelle du théorème de Poisson bien connu, savoir,

$$\int^{\pi}\int_0^{2\pi} f(m\cos\theta + n\sin\theta\sin\varphi + p\sin\theta\cos\varphi)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$
$$= 2\pi\int_{-1}^{+1} f(u\sqrt{m^2+n^2+p^2})\, du.$$

Considérons un ellipsoïde de révolution autour de son grand axe; on sait que son équation sera, par rapport aux trois axes rectangulaires d'une direction arbitraire qui passent par le foyer,

$$\mathrm{R} = mx + ny + pz + q,$$

R étant le rayon vecteur de l'origine à un point quelconque x, y, z.

Concevons aussi une sphère du rayon 1 décrite autour du foyer, et multiplions chaque élément de la surface sphérique par une fonction quelconque du rayon correspondant de l'ellipsoïde. La somme qu'on obtient en étendant ce procédé à la surface entière s'exprimera par l'intégrale double

$$(1)\qquad \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{F}\left[\frac{q}{1-(m\cos\theta + n\sin\theta\sin\varphi + p\sin\theta\cos\varphi)}\right]\sin\theta\, d\theta\, d\varphi.$$

Maintenant, l'équation de l'ellipsoïde sera, en comptant l'angle polaire θ, à partir de l'axe de révolution,

$$\mathrm{R} = \frac{q}{1-\sqrt{m^2+n^2+p^2}\cos\theta},$$

en sorte que la somme dont il s'agit sera aussi exprimée par l'intégrale simple

$$(2) \qquad 2\pi \int_0^{\pi} \mathrm{F}\left(\frac{q}{1 - \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}\cos\theta}\right) \sin\theta \, d\theta.$$

En égalant les expressions (1) et (2), on retombe évidemment sur le théorème de Poisson.

On pourrait penser qu'on aurait des résultats différents en considérant des surfaces autres que l'ellipsoïde de révolution; mais il n'est pas difficile de prouver que, quelle que soit la surface de révolution que l'on considère, on n'obtiendra jamais que le théorème de Poisson. J'ai choisi le sphéroïde, à cause de sa simplicité.