JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

AOUST

Sur les trajectoires qui coupent, sous un angle constant, les courbes méridiennes des surfaces de révolution

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 11 (1846), p. 184-192.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1846_1_11__184_0>

Sur les trajectoires qui coupent, sous un angle constant, les courbes méridiennes des surfaces de révolution;

Par M. l'abbé AOUST,
Professeur au Collége Stanislas.

I.

Soit r la distance d'un point quelconque de la surface à l'axe de révolution que nous prenons pour axe des z; on aura

$$r = \sqrt{x^2 + y^2};$$

et l'équation de la surface sera

$$z = \psi(r).$$

Soit α l'angle sous lequel la courbe cherchée doit couper les courbes méridiennes; les cosinus des angles qu'une tangente quelconque en l'un de ses points (x, y, z) fait avec les trois axes sont $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, et les cosinus des angles que la tangente à la courbe méridienne au même point fait avec les mêmes axes sont $\frac{dx}{d\sigma}\frac{x}{r}$, $\frac{dy}{d\sigma}\frac{y}{r}$, $\frac{dz}{d\sigma}$, $d\sigma$ étant l'arc différentiel de cette courbe. D'après cela, l'équation qui exprimera que ces deux tangentes font un angle constant sera

$$\cos\alpha = \frac{dr}{d\sigma}\left(\frac{xdx + ydy}{ds}\right) + \frac{dz^2}{d\sigma\, ds}.$$

Cette équation se simplifie, car

$$xdx + ydy = rdr \quad \text{et} \quad dr^2 + dz^2 = d\sigma^2.$$

En ayant égard à ces relations, l'on obtient

$$d\sigma = \cos\alpha . ds, \tag{1}$$

équation évidente par elle-même, et que l'on aurait pu poser immédiatement. En intégrant, on trouve

$$\sigma = s \cos\alpha,$$

la constante étant déterminée par la condition que l'origine des arcs de la trajectoire corresponde à l'origine des arcs de la courbe méridienne.

Si nous rapportons un point quelconque de la trajectoire à des coordonnées curvilignes tracées sur la surface, dont l'une serait l'arc de la courbe méridienne, et l'autre serait l'arc du cercle parallèle passant par ce point, coordonnées que nous appellerons σ et ξ, l'équation (1) deviendra, à cause de la relation $ds^2 = d\sigma^2 + d\xi^2$,

$$d\xi = \operatorname{tang}\alpha . d\sigma, \tag{2}$$

qui, par l'intégration, devient

$$\xi = \operatorname{tang}\alpha . \sigma,$$

l'origine des coordonnées curvilignes se trouvant au point d'intersection de la trajectoire avec le méridien. Ainsi l'équation de la trajectoire en coordonnées curvilignes orthogonales a la même forme que l'équation de la droite en coordonnées rectilignes. Cette trajectoire joue sur la surface de révolution le même rôle que la droite sur le plan.

Si l'on cherche, dans le même système de coordonnées, l'aire interceptée entre un méridien fixe, la trajectoire et le parallèle, on a, pour différentielle de l'aire,

$$du = \xi d\sigma,$$

d'où l'on tire

$$du = \operatorname{tang}\alpha . \sigma d\sigma; \tag{3}$$

et, en intégrant, l'on obtient

$$u = \tfrac{1}{2} \operatorname{tang}\alpha . \sigma^2.$$

II.

Des équations que nous venons de trouver,

$$\sigma = \operatorname{tang}\alpha . s, \quad u = \tfrac{1}{2} \operatorname{tang}\alpha . \sigma^2, \tag{4}$$

on déduit les conséquences suivantes :

1°. Si l'on construit sur un plan un triangle rectangle tel que l'un des côtés de l'angle droit soit égal à la longueur de l'arc du méridien σ, l'un des angles aigus soit l'angle donné α, l'hypoténuse de ce triangle donnera l'hypoténuse du triangle curviligne; et son aire donnera aussi l'aire du même triangle curviligne tracé sur la surface de révolution.

2°. Toutes les fois que la courbe méridienne sera rectifiable, la trajectoire le sera aussi; et l'expression de l'aire du segment de surface intercepté par les trois courbes sera connue.

3°. Les équations (4) subsisteront toujours, quelle que soit la position de l'origine des coordonnées curvilignes, pourvu que la trajectoire passe par cette origine. Donc, quelle que soit la position du triangle curviligne tracé sur une longueur constante d'un arc de méridien, sous l'angle α, le côté formé par l'arc de trajectoire sera constant, ainsi que son aire; on pourra donc tracer des aires équivalentes sur une même surface de révolution.

4°. Les mêmes équations étant indépendantes de la nature de la surface de révolution, quelle que soit la surface de révolution sur laquelle sera tracé le triangle curviligne, si l'un des côtés formé par l'arc de méridien est constant ainsi que l'angle α, le côté formé par l'arc de trajectoire sera constant, et son aire sera aussi constante. On pourra donc tracer des aires équivalentes sur des surfaces de révolution différentes.

Il est aussi évident que toutes les questions relatives aux aires des triangles rectilignes tracés sur un plan sont par cela même résolues pour les triangles curvilignes que nous avons définis, et que l'on aurait tracés sur une surface de révolution.

Il est aisé de voir que la trajectoire coupe les parallèles sous un angle constant, complément de l'angle α, et que les constructions que nous avons faites sur l'arc de méridien auraient pu être faites sur l'arc du parallèle. Tous les triangles curvilignes construits sur une même surface, ou sur des surfaces différentes, ainsi que les triangles rectilignes construits sur un plan, jouiront de cette propriété d'avoir tous leurs éléments égaux, c'est-à-dire trois côtés de même longueur chacun à chacun, mais de différentes courbures, trois angles égaux et même aire, pourvu que la longueur de l'arc de méridien qui forme le côté de l'angle droit soit constante et que l'angle α soit le même.

III.

Il est facile d'obtenir l'équation différentielle de la projection de la trajectoire sur le plan des xy. En effet, appelons θ l'angle que r, projection du rayon vecteur sur le plan des xy, fait avec l'axe des x, on a

$$ds = \sqrt{r^2 d\theta^2 + dr^2 + dz^2} \quad \text{et} \quad d\sigma = \sqrt{dz^2 + dr^2}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (1), en ayant égard à l'équation de la surface $z = \psi(r)$, on trouve, réductions faites,

$$(5) \qquad d\theta = \operatorname{tang}\alpha . \frac{dr}{r} \sqrt{1 + \overline{\psi'(r)}^2},$$

équation dans laquelle les variables sont séparées.

La différentielle de l'arc de la trajectoire est donnée par la formule

$$(6) \qquad ds = \frac{1}{\cos\alpha} . dr \sqrt{1 + \overline{\psi'(r)}^2},$$

qui montre que la trajectoire sera rectifiable lorsque la courbe méridienne le sera; ce que nous avions déjà reconnu.

Enfin, la différentielle de l'aire du segment triangulaire est

$$du = \sin\alpha \cos\alpha . s\,ds.$$

On connaîtra donc l'aire du segment triangulaire lorsque la courbe méridienne sera rectifiable.

Il est inutile de remarquer que l'équation différentielle (5) est aussi propre à résoudre la question inverse de la question proposée.

Ainsi, supposons que l'on demande quelle est la surface de révolution telle, que la trajectoire qui coupe les courbes méridiennes sous un angle constant ait pour projection sur un plan perpendiculaire à l'axe de révolution une courbe donnée. Soit $\theta = \varphi(r)$ l'équation donnée de cette projection, en coordonnées polaires. L'équation de la courbe méridienne inconnue, et par conséquent de la surface de révolution, sera donnée par l'équation différentielle

$$(7) \qquad \operatorname{tang}\alpha . dz = dr \sqrt{r^2 \overline{\varphi(r)}^2 - \operatorname{tang}^2\alpha},$$

qui se déduit facilement de l'équation (5) et où les variables sont encore séparées.

IV.

Comme application des formules précédentes, cherchons :

1°. Quelle est la courbe qui coupe, sous un angle constant, les génératrices d'un cône droit. Si 2β représente l'angle du cône, son équation sera

$$r = \tang\beta . z.$$

L'équation (5) devient

$$d\theta = \frac{\tang\alpha}{\sin\beta} \cdot \frac{dr}{r},$$

dont l'intégrale est la spirale logarithmique

$$r = ce^{\frac{\tang\beta}{\sin\alpha}\theta},$$

c étant la constante introduite par l'intégration. La longueur de l'arc est donnée par la formule

$$s = \frac{r}{\cos\alpha \sin\beta},$$

et l'aire du segment triangulaire est donnée par

$$u = \frac{1}{2} \frac{\tang\alpha}{\sin^2\beta} r^2.$$

2°. Cherchons quelle est la courbe qui coupe, sous un angle constant, les méridiens d'une sphère. L'équation d'un méridien quelconque étant

$$z^2 + r^2 = a^2,$$

on a l'équation

$$d\theta = \tang\alpha . \frac{d.\frac{r}{a}}{\frac{r}{a}\sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}},$$

dont l'intégrale est

$$r^2 = ce^{\frac{-\theta}{\tang\alpha}}\left(ce^{\frac{-\theta}{\tang\alpha}} - 2a\right).$$

3°. Proposons-nous de trouver quelle doit être la surface de révolution pour que la projection sur le plan des xy de la courbe qui coupe les méridiens sous un angle constant soit la spirale $r=a\theta^2$; on doit, dans ce cas, faire usage de la formule (7). On trouve

$$\operatorname{tang}\alpha\, dz = dr\sqrt{\frac{r}{4a}-\operatorname{tang}^2\alpha};$$

en intégrant, on obtient la développée de la parabole

$$\frac{\operatorname{tang}^2\alpha}{9a^2}z^2=\left(\frac{r}{a}-4\operatorname{tang}^2\alpha\right)^3.$$

V.

La courbe donnée par l'équation (5) et l'équation d'une surface de révolution est aussi celle qu'affecte un fil placé sur une surface de révolution, et dont tous les éléments sont attirés par une force agissant suivant la distance de cet élément à l'axe, et à raison inverse du carré de cette distance.

Généralement, quand on cherche quelle est la force sous l'action de laquelle un fil flexible, non élastique, affecte, sur une surface donnée, une courbe d'équilibre donnée, on trouve que l'expression de cette force dépend de sa direction, du genre et de l'espèce de la surface, et de la nature de la courbe tracée sur cette surface; mais, si la surface est de révolution, si la force est dirigée vers l'axe, si enfin la courbe d'équilibre doit couper les méridiens sous un angle constant, on trouve que la force est indépendante de l'espèce de surface de révolution, en sorte que cette force est toujours la même pour une surface de révolution quelconque.

En effet, les équations d'équilibre du fil non élastique sont, dans le cas d'une force quelconque R,

$$\mp \varepsilon ds\mathrm{R}\cos\alpha + d\left(\mathrm{T}\frac{dx}{ds}\right)+\mathrm{N}\varepsilon ds\,\psi'(r)\frac{x}{r}=0,$$
$$\mp \varepsilon ds\mathrm{R}\cos\beta + d\left(\mathrm{T}\frac{dy}{ds}\right)+\mathrm{N}\varepsilon ds\,\psi'(r)\frac{y}{r}=0,$$
$$\mp \varepsilon ds\mathrm{R}\cos\gamma + d\left(\mathrm{T}\frac{dz}{ds}\right)+\mathrm{N}\varepsilon ds=0;$$

$z=\psi(r)$ est l'équation de la surface, N sa résistance, T la tension du fil, ε le produit de l'épaisseur du fil par sa densité, α, β, γ les angles de la force R avec les trois axes. Dans le cas particulier où la force est dirigée vers l'axe de la figure, on déduit facilement

$$(8) \qquad dT = \pm \varepsilon R dr, \qquad T(ydx - xdy) = kds,$$

k étant une constante introduite par l'intégration. Si l'on passe aux coordonnées polaires, la dernière équation devient

$$Tr^2 d\theta = k\sqrt{dr^2 + dz^2 + r^2 d\theta^2}.$$

Mais si l'on veut que le fil coupe sous un angle constant tous les méridiens, il faut porter, dans cette équation, la valeur de dz, tirée de l'équation de la surface, et la valeur de $d\theta$, tirée de l'équation (5). On obtient ainsi, pour l'expression de la tension,

$$T = \frac{k}{\sin\alpha} \cdot \frac{1}{r},$$

et, en portant cette valeur dans la première équation (8), on trouve

$$R = \pm \frac{k}{\sin\alpha} \frac{1}{r^2}.$$

La tension est donc indépendante de l'espèce de surface de révolution, ainsi que la force, et, de plus, la force est inverse du carré de la distance du point à l'axe.

VI.

C'est encore la même courbe que l'on obtient, lorsqu'on cherche la trajectoire décrite sur une surface de révolution par un point matériel, soumis à l'action d'une force dirigée suivant la distance du point à l'axe, et inverse du cube de cette distance, quelle que soit la surface de révolution.

En effet, les équations du mouvement du point matériel sur la surface de révolution sont, dans le cas d'une force dirigée vers l'axe, en admettant la notation précédente,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -R\frac{x}{r} + N\psi'(r)\frac{x}{r},$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = -R\frac{y}{r} + N\psi'(r)\frac{y}{r},$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} = N.$$

L'équation des forces vives donne

$$v^2 = -2\int R\,dr,$$

et le principe des aires, sur le plan des xy, fournit la relation

$$r^2 dt = c\,dt.$$

Si l'on élimine dt entre ces deux équations, on peut déterminer R de manière que la trajectoire soit la courbe qui coupe tous les méridiens sous un angle constant; on trouve alors

$$R = \pm \frac{2c^2}{\sin^2\alpha} \cdot \frac{1}{r^3},$$

expression indépendante de l'espèce de surface de révolution.

VII.

Il est encore un autre problème de Mécanique qui conduit à la même courbe, c'est-à-dire à la trajectoire qui coupe tous les méridiens d'une surface de révolution sous un angle constant, ou du moins une courbe qui en approche indéfiniment.

Cherchons la trajectoire décrite par une petite sphère, enfermée et pouvant glisser sans frottement dans un tube curviligne infiniment mince, lequel tourne autour d'un axe d'un mouvement uniforme, abstraction faite de la pesanteur.

Comme la pression de la petite sphère sur le tube est normale à ce tube, il suffira d'exprimer que l'angle que fait cette pression, en un point quelconque du tube, avec la tangente au tube passant par ce point, est droit; or, les cosinus des angles de la pression avec les trois axes sont proportionnels aux quantités $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$; et, si l'on représente par $z = \psi(r)$ l'équation du tube, les cosinus de la tangente, en un point quelconque, avec les mêmes axes, sont $\psi'(r)\frac{x}{r}$, $\psi'(r)\frac{y}{r}$, $\frac{dz}{dr}$. On aura donc

$$\frac{dz}{dr}\cdot\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{xd^2x + yd^2y}{rdt^2} = 0;$$

ou bien

$$dz\cdot\frac{d^2z}{dt^2}+dr\frac{d^2r}{dt^2}-r\frac{d\theta^2}{dr^2}dr=0;$$

et, comme le mouvement de rotation est uniforme,

$$\frac{d\theta}{dt}=a,$$

a étant une constante. Introduisant cette condition dans l'équation précédente, et intégrant, on trouve

$$\frac{dr^2+dz^2}{dt^2}=a^2(l^2+r^2),$$

a^2l^2 étant le carré de la vitesse pour $r=0$; on en déduit

$$d\theta=dr\frac{\sqrt{1+\overline{\psi'(r)}^2}}{\sqrt{l^2+r^2}};$$

l peut être pris aussi petit qu'on voudra, de sorte que r pourra devenir une quantité très-grande par rapport à l. Donc, à mesure que r augmente, $\frac{d\theta}{dr}$ converge vers $\frac{\sqrt{1+\overline{\psi'(r)}^2}}{r}$, qui représente la courbe qui coupe les méridiens sous un angle de 45 degrés. Lorsque la vitesse initiale de la sphère est très-petite, sa position initiale dans le tube étant sur l'axe de révolution, ou bien, si elle ne se trouve pas sur l'axe de révolution, son éloignement étant très-petit, la constante l sera très-petite, et si le rayon r devient de plus en plus grand, la trajectoire tendra de plus en plus à couper les méridiens sous un angle constant.