JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

WILLIAM ROBERTS

Sur l'évaluation de quelques intégrales définies, par des fonctions elliptiques

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 11 (1846), p. 157-173.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1846_1_11__157_0>

SUR L'ÉVALUATION DE QUELQUES INTÉGRALES DÉFINIES, PAR DES FONCTIONS ELLIPTIQUES;

PAR M. WILLIAM ROBERTS.

1. Dans son *Traité des Fonctions elliptiques*, tome I, chap. 35, Legendre a recueilli un grand nombre d'intégrales définies, dont les valeurs peuvent être assignées par ces transcendantes. Les formules que cet illustre géomètre a rassemblées dans ce chapitre de son grand ouvrage semblent renfermer les solutions de plusieurs problèmes relatifs aux aires et aux volumes de surfaces courbes. On y trouve les expressions pour l'aire de l'ellipsoïde, ou (ce qui est la même chose) pour celle de la surface optique qui s'appelle d'*élasticité* [*], et même encore pour le volume de cette dernière surface, comme on le verra tout à l'heure. La méthode employée par Legendre consiste le plus souvent à identifier les résultats obtenus par l'évaluation d'une intégrale double, en prenant les deux variables dans un ordre différent; ce qui conduit assez simplement aux formules dont il s'agit. Cependant, j'ai remarqué qu'on peut présenter, par une transformation convenable, les démonstrations de l'illustre auteur sous une forme plus directe, conformément aux principes dont on fait ordinairement usage dans la détermination des intégrales définies. Il serait fastidieux de démontrer toutes les formules de Legendre en détail, en sorte que je me contenterai d'indiquer comment ses théorèmes principaux peuvent

[*] L'identité de l'aire de la surface d'élasticité avec celle de l'ellipsoïde fut démontrée pour la première fois par M. D.-B. Tortolini, et ensuite par moi, mais sans avoir eu connaissance des travaux du savant géomètre de Rome. (*Voir* le Journal de M. Crelle, tome XXXI, page 12, où se trouve le Mémoire de M. Tortolini, intitulé : *Nuove applicazioni del calcolo integrale relative alla quadratura delle superficie curve, e cubatura de solidi.*)

être obtenus. J'ajouterai aussi quelques autres résultats analogues à ceux dont on vient de parler, et qui dérivent aisément de l'équation fondamentale pour la comparaison des transcendantes elliptiques.

2. Dans ce qui suit nous désignerons, suivant l'usage, la quantité $\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$ par $\Delta(k, \varphi)$, ou bien simplement par Δ.

Considérons d'abord l'intégrale définie

$$u = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\text{arc}(\text{tang} = m\Delta)}{\Delta}\, d\varphi,$$

d'où, en différentiant par rapport à m, on a

$$\frac{du}{dm} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{(1+m^2)\cos^2\varphi + (1+m^2-m^2k^2)\sin^2\varphi} = \frac{\frac{1}{2}\pi}{\sqrt{(1+m^2)(1+m^2-m^2k^2)}},$$

en sorte que

$$u = \frac{\pi}{2}\int_0^m \frac{dm}{\sqrt{(1+m^2)(1+m^2-m^2k^2)}},$$

et, en faisant

$$m = \text{tang}\,\theta,$$

on trouve

$$(1) \qquad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\text{arc}(\text{tang} = m\Delta)}{\Delta}\, d\varphi = \frac{\pi}{2}\,\text{F}(k, \theta).$$

On peut déduire de là la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\text{arc}(\text{cotang} = m\Delta)}{\Delta}\, d\varphi,$$

car elle est manifestement égale à

$$\frac{\pi}{2}\,\text{F}(k) - \int_0 \frac{\text{arc}(\text{tang} = m\Delta)}{\Delta}\, d\varphi,$$

en sorte que, λ étant un angle donné par la relation

$$m\sqrt{1-k^2}\,\text{tang}\,\lambda = 1,$$

on a

$$(2) \qquad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\text{arc}(\text{cotang} = m\Delta)}{\Delta}\, d\varphi = \frac{\pi}{2}\,\text{F}(k, \lambda).$$

3. Faisons maintenant

$$m = \text{cotang}\,\alpha, \quad k^2 = 1 - \frac{\text{tang}^2\alpha}{\text{tang}^2\beta},$$

et prenons un angle ω tel que

$$\text{cotang}^2\omega = \text{cotang}^2\alpha\cos^2\varphi + \text{cotang}^2\beta\sin^2\varphi,$$

ce qui donnera

$$\frac{d\varphi}{\Delta} = \frac{\sin\beta\cos\alpha\, d\omega}{\sqrt{(\sin^2\omega - \sin^2\alpha)(\sin^2\beta - \sin^2\omega)}}.$$

Substituant ces expressions dans l'équation (2), on trouvera, en se rappelant que les limites de ω sont α et β, et que $\lambda = \beta$,

$$(3) \qquad \int_\alpha^\beta \frac{\omega d\omega}{\sqrt{(\sin^2\omega \sin^2\alpha)(\sin^2\beta - \sin^2\omega)}} = \frac{\pi}{2\sin\beta\cos\alpha}\,\mathrm{F}(k, \beta),$$

formule fondamentale qui se trouve dans le *Traité des Fonctions elliptiques*, tome I, chap. 35, n° 235, et qui est signalée par Legendre comme remarquable.

4. Considérons encore l'intégrale

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\text{arc}(\text{tang} = m\Delta)}{\Delta^3}\, d\varphi;$$

en la désignant par u, on aura

$$\frac{du}{dm} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\Delta^2(1 + m^2\Delta^2)} = \frac{\pi}{2\sqrt{1-k^2}} - \frac{\pi m^2}{2}\,\frac{1}{\sqrt{(1+m^2)(1+m^2-k^2m^2)}};$$

donc, à cause de

$$\int \frac{\text{tang}^2\theta\, d\theta}{\Delta(k,\theta)} = \frac{\text{tang}\,\theta\Delta(k,\theta) - \mathrm{E}(k,\theta)}{1-k^2},$$

on trouvera, en faisant $m = \text{tang}\,\theta$ et en intégrant,

$$(4) \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\text{arc}(\text{tang} = m\Delta)}{\Delta^3} d\varphi = \frac{\pi}{2(1-k^2)}\,\mathrm{E}(k,\theta) - \frac{\pi\,\text{tang}\,\theta}{2(1-k^2)}\left[\Delta(k,\theta) - \sqrt{1-k^2}\right];$$

d'où l'on déduit aisément

$$(5) \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\text{arc}(\text{cotang} = m\Delta)}{\Delta^3}\, d\varphi = \frac{\pi}{2(1-k^2)}\,\mathrm{E}(k,\lambda) - \frac{\pi\,\text{cotang}\,\lambda}{2(1-k^2)}\left[1 - \Delta(k,\lambda)\right],$$

λ étant donné par l'équation

$$m\sqrt{1-k^2}\operatorname{tang}\lambda = 1.$$

5. Transformons l'intégrale

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\operatorname{arc}(\operatorname{tang} = m\Delta)}{\Delta^n}\, d\varphi,$$

en faisant

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\operatorname{cotang}\psi}{\sqrt{1-k^2}},$$

et l'on verra facilement qu'il en résultera la relation suivante

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\operatorname{arc}(\operatorname{cotang} = m\Delta)}{\Delta^{-n+2}}\, d\varphi = (1-k^2)^{\frac{n-1}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\operatorname{arc}(\operatorname{tang} = m'\Delta)}{\Delta^n}\, d\varphi,$$

m et m' étant liés par l'équation

$$mm'\sqrt{1-k^2} = 1,$$

ou bien encore

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\operatorname{arc}(\operatorname{tang} = m\Delta)}{\Delta^{-n+2}}\, d\varphi + (1-k^2)^{\frac{n-1}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\operatorname{arc}(\operatorname{tang} = m'\Delta)}{\Delta^n}\, d\varphi = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \Delta^{n-2}\, d\varphi.$$

Donc, en supposant que $n = 3$, on transformera l'équation (4) dans

$$(6)\quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \operatorname{arc}(\operatorname{cotang} = m\Delta)\,\Delta d\varphi = \frac{\pi}{2}\mathrm{E}(k,\lambda) - \frac{\pi}{2}\operatorname{tang}\lambda\left[\Delta(k,\lambda) - \sqrt{1-k^2}\right],$$

et, si l'on fait $n = -1$, l'équation (5) donnera

$$(7)\quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \operatorname{arc}(\operatorname{tang} = m\Delta)\,\Delta d\varphi = \frac{\pi}{2}\mathrm{E}(k,\theta) - \frac{\pi}{2}\operatorname{cotang}\theta\,[1 - \Delta(k,\theta)].$$

6. Transformons l'équation (6) par les mêmes substitutions dont nous avons déjà fait usage dans le n° **3**, et l'on en déduira

$$\int_\alpha^\beta \frac{\omega d\omega}{\operatorname{tang}^2\omega\sqrt{\sin^2\omega - \sin^2\alpha}\sqrt{\sin^2\beta - \sin^2\omega}} = \frac{\pi}{2\sin\alpha\operatorname{tang}\alpha\sin\beta}\left[\mathrm{E}(k,\beta) + \frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\cos\alpha}\right].$$

Donc, en ajoutant la valeur de

$$\int_\alpha^\beta \frac{\omega d\omega}{\sqrt{(\sin^2\omega - \sin^2\alpha)(\sin^2\beta - \sin^2\omega)}},$$

qu'on tire de la formule (3), on aura

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned}&\int_\alpha^\beta \frac{\omega d\omega}{\sin^2\omega\sqrt{(\sin^2\omega-\sin^2\alpha)(\sin^2\beta-\sin^2\omega)}}\\ &-\frac{\pi}{2}\frac{\sin\beta-\sin\alpha}{\sin^2\alpha\sin\beta}+\frac{\pi}{2}\frac{1}{\cos\alpha\sin\beta}F(k,\beta)+\frac{\pi\cos\alpha}{2\sin^2\alpha\sin\beta}E(k,\beta),\end{aligned}\right.$$

formule donnée par Legendre.

7. Au moyen de l'équation (5) on trouve, de la même manière,

$$\int_\alpha^\beta \frac{\omega\,\mathrm{tang}^2\omega d\omega}{\sqrt{(\sin^2\omega-\sin^2\alpha)(\sin^2\beta-\sin^2\omega)}}$$
$$=\frac{\pi\sin\beta}{2\cos\alpha\cos^2\beta}[E(k,\beta)-\mathrm{cotang}\,\beta+\mathrm{cotang}\,\beta\cos\beta\,\mathrm{s\acute{e}c}\,\alpha],$$

ce qui conduit aisément à la formule suivante

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned}&\int_\alpha^\beta \frac{\omega d\omega}{\cos^2\omega\sqrt{(\sin^2\omega-\sin^2\alpha)(\sin^2\beta-\sin^2\omega)}}\\ &=\frac{\pi}{2}\frac{\cos\beta-\cos\alpha}{\cos^2\alpha\cos\beta}+\frac{\pi}{2}\frac{1}{\cos\alpha\sin\beta}F(k,\beta)+\frac{\pi}{2}\frac{\sin\beta}{\cos\alpha\cos^2\beta}E(k,\beta).\end{aligned}\right.$$

Cette intégrale, que l'on doit à Legendre, exprime, comme il a été déjà montré, l'aire totale d'un ellipsoïde, ou bien celle de la surface optique nommée d'élasticité.

8. L'intégrale générale

$$\int_\alpha^\beta \frac{\omega d\omega}{\cos^{2n}\omega\sqrt{(\sin^2\omega-\sin^2\alpha)(\sin^2\beta-\sin^2\omega)}},$$

que l'on désignera par U_{2n}, ne dépend que de U_2 et U_0 [quantités déjà calculées dans les équations (3) et (9)], comme Legendre l'a prouvé par une formule de réduction [*], laquelle donne, pour le cas de $n=2$,

$$U_4=\frac{\pi}{12}\frac{(\cos\alpha-\cos\beta)^2}{\cos^3\alpha\cos^3\beta}+\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\beta}\right)U_2-\frac{1}{3}\left(\frac{1+\cos^2\alpha+\cos^2\beta}{\cos^2\alpha\cos^2\beta}\right)U_0.$$

---

[*] Voici la formule dont il s'agit:

$$(2n+1)\cos^2\alpha\cos^2\beta\,U_{2n+2}$$
$$=2n(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\alpha\cos^2\beta)U_{2n}-(2n-1)(1+\cos^2\alpha+\cos^2\beta)U_{2n-2}$$
$$+(2n-2)U_{2n-4}+\int_\alpha^\beta\frac{\sin\omega\sqrt{\sin^2\omega-\sin^2\alpha}\sqrt{\sin^2\beta-\sin^2\omega}}{\cos^{2n+1}\omega}d\omega.$$

(*Traité des Fonctions elliptiques*, tome I, page 314.)

Cette intégrale exprime le volume de la surface d'élasticité, comme on le verra aisément de la manière suivante.

9. L'équation de cette surface est, comme l'on sait,

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2,$$

ou, en coordonnées polaires,

$$r^2 = a^2 \sin^2\theta \cos^2\psi + b^2 \sin^2\theta \sin^2\psi + c^2 \cos^2\theta;$$

d'où l'on conclut que la huitième partie (V) de son volume entier aura pour expression l'intégrale double

$$\frac{1}{3}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(a^2 \sin^2\theta \cos^2\psi + b^2 \sin^2\theta \sin^2\psi + c^2 \cos^2\theta)^{\frac{3}{2}} \sin\theta\, d\theta\, d\psi;$$

si l'on intègre par rapport à θ, en faisant, pour abréger,

$$\mathrm{P} = a^2 \cos^2\psi + b^2 \sin^2\psi, \quad \mathrm{Q} = a^2 \cos^2\psi + b^2 \sin^2\psi - c^2,$$

on aura donc

$$\mathrm{V} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\left[\tfrac{1}{12}c^3 + \tfrac{1}{8}c\mathrm{P} + \tfrac{1}{8}\frac{\mathrm{P}^2}{\sqrt{\mathrm{Q}}}\operatorname{arc}\left(\sin = \sqrt{\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{P}}}\right)\right]d\psi.$$

Posant ensuite

$$\sin\omega = \sqrt{\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{P}}},$$

ce qui donne

$$\mathrm{P} = c^2 \operatorname{séc}^2\omega, \quad \mathrm{Q} = c^2 \operatorname{tang}^2\omega,$$

et

$$d\psi = \frac{-c^5}{ab}\,\frac{\operatorname{tang}\omega d\omega}{\sqrt{\left(\frac{a^2 - c^2}{a^2} - \sin^2\omega\right)\left(\sin^2\omega - \frac{b^2 - c^2}{b^2}\right)}},$$

on trouvera, en se rappelant que $\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\mathrm{P}d\psi = \frac{1}{4}\pi(a^2 + b^2)$,

$$8\mathrm{V} = \tfrac{1}{3}\pi c^3 + \tfrac{1}{4}\pi c(a^2 + b^2) + \frac{c^5}{ab}\int_\alpha^\beta \frac{\omega d\omega}{\cos^4\omega\sqrt{(\sin^2\omega - \sin^2\alpha)(\sin^2\beta - \sin^2\omega)}},$$

où

$$\cos\alpha = \frac{c}{b}, \quad \cos\beta = \frac{c}{a}.$$

Donc on a finalement, toutes réductions faites,

$$8V = \frac{\pi bc}{6a}(a^2+2b^2+2c^2) + \frac{\pi}{b}\frac{1}{\sqrt{a^2-c^2}}[(a^2+b^2+c^2)c^2+c^4-a^2b^2]F(k,\beta)$$
$$+\frac{\pi}{3}\sqrt{a^2-c^2}(a^2+b^2+c^2)E(k,\beta),$$

où

$$k^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}.$$

Cette formule s'accorde avec celle donnée par M. Tortolini, dans le Journal de M. Crelle, tome XXXI, page 28.

10. Soit encore

$$u = \int_\alpha^\beta \log\left(\frac{1+m\sin\omega}{1-m\sin\omega}\right)\frac{\cos\omega d\omega}{\sqrt{(\sin^2\omega-\sin^2\alpha)(\sin^2\beta-\sin^2\omega)}},$$

ce qui donne

$$\frac{du}{dm} = \int_\alpha^\beta \frac{2\sin\omega\cos\omega d\omega}{(1-m^2\sin^2\omega)\sqrt{(\sin^2\omega-\sin^2\alpha)(\sin^2\beta-\sin^2\omega)}}$$
$$= \frac{\pi}{\sqrt{(1-m^2\sin^2\alpha)(1-m^2\sin^2\beta)}}.$$

Donc, en faisant $\sin\theta = m\sin\beta$, et en intégrant, on trouve

$$(10) \qquad u = \frac{\pi}{\sin\beta}F\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta},\theta\right).$$

De la même manière, on peut montrer que

$$(11) \qquad \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\log\left(\frac{1+m\Delta}{1-m\Delta}\right)\frac{d\varphi}{\Delta} = \pi F(k',\theta),$$

où

$$k' = \sqrt{1-k}, \quad \text{et} \quad m = \sin\theta.$$

11. La fonction des trois arguments k, θ, φ,

$$\int_0^\varphi \frac{\text{arc}(\text{tang} = \Delta\,\text{tang}\,\theta)}{\Delta}d\varphi,$$

que nous désignerons par $U_k(\theta,\varphi)$, jouit d'une propriété remarquable, dont l'équation (1) n'est qu'un cas particulier, savoir, elle est une fonction symétrique des quantités θ et φ.

Pour le faire voir, il faut seulement différentier U par rapport à θ, ce qui donne

$$\frac{dU}{d\theta} = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi + (1 - k^2\sin^2\theta)\sin^2\varphi} = \frac{\text{arc}\,[\text{tang} = \text{tang}\,\varphi\Delta(k, \theta)]}{\Delta(k, \theta)}.$$

On conclut donc que

$$(12) \qquad U_k(\theta, \varphi) = U_k(\varphi, \theta),$$

et, en particulier,

$$U_k(\theta, \tfrac{1}{2}\pi) = U_k(\tfrac{1}{2}\pi, \theta),$$

ce qui n'est autre chose que l'équation (1).

Semblablement, en désignant l'intégrale

$$\int_0^\varphi \frac{\text{arc}(\text{cotang} = \Delta\,\text{tang}\,\theta)}{\Delta}\,d\varphi$$

par $V_k(\theta, \varphi)$, on peut déduire l'équation suivante,

$$(13) \qquad V_k(\theta, \varphi) - V_k(\varphi, \theta) = \frac{\pi}{2}F(k, \delta),$$

où

$$\delta = amp\,[F(k, \varphi) - F(k, \theta)].$$

Il suit de l'équation (2) que

$$\frac{\pi}{2}F(k, \delta) = V_k(\gamma, \tfrac{1}{2}\pi),$$

la valeur de γ étant celle pour laquelle

$$F(k, \gamma) + F(k, \delta) = F(k);$$

il en résulte

$$(14) \qquad V_k(\theta, \varphi) - V_k(\varphi, \theta) = V_k(\gamma, \tfrac{1}{2}\pi).$$

12. On peut tirer de l'équation (11) deux développements pour une fonction elliptique de première espèce. En effet, on a

$$\frac{1}{\Delta}\log\left(\frac{1 + m\Delta}{1 - m\Delta}\right) = 2\,(m + \tfrac{1}{3}m^3\Delta^2 + \tfrac{1}{5}m^5\Delta^4 + \ldots).$$

En désignant donc par $\frac{\pi}{2}A_{2n}$ la valeur de l'intégrale définie

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(1 - k^2\sin^2\varphi)^n\, d\varphi,$$

on trouve, k' étant le complément de k,

$$(15)\qquad F(k', \theta) = \sin\theta + \tfrac{1}{3}A_2\sin^3\theta + \tfrac{1}{5}A_4\sin^5\theta + \ldots.$$

D'ailleurs, faisons

$$\sin\theta = \sqrt{-1}\,\operatorname{tang}\omega,$$

ce qui donne

$$F(k', \theta) = \sqrt{-1}\, F(k, \omega),$$

et l'on aura

$$(16)\qquad F(k, \omega) = \operatorname{tang}\omega - \tfrac{1}{3}A_2\operatorname{tang}^3\omega + \tfrac{1}{5}A_4\operatorname{tang}^5\omega - \ldots.$$

A l'aide de l'équation (15) on peut déterminer, avec facilité, la somme d'une série donnée par Legendre pour l'évaluation de l'aire de l'ellipsoïde. La huitième partie de l'aire totale de cette surface a pour expression (*voir* le *Traité des Fonctions elliptiques,* tome I, page 351)

$$\tfrac{1}{2}\pi ab\left[1 - \tfrac{1}{3}P' - \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{5}P'' - \tfrac{1}{5}\cdot\tfrac{1}{7}P''' - \tfrac{1}{7}\cdot\tfrac{1}{9}P'''' - \ldots\right],$$

où

$$\frac{\pi}{2}P^{(n)} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\left(\frac{a^2-c^2}{a^2}\sin^2\varphi + \frac{b^2-c^2}{b^2}\cos^2\varphi\right)^n d\varphi,$$

a, b, c étant les demi-axes de l'ellipsoïde.

Maintenant, posons

$$u = m + \tfrac{1}{3}m^3P' + \tfrac{1}{5}m^5P'' + \ldots,$$

et il est clair, d'après ce que l'on vient de montrer, que

$$u = \frac{1}{\sqrt{\delta}}F\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{\delta}}, \theta\right),$$

en faisant, conformément aux notations de Legendre,

$$\delta = \frac{a^2-c^2}{a^2}, \qquad \varepsilon = \frac{b^2-c^2}{b^2},$$

et

$$\sin\theta = m\sqrt{\delta}.$$

On a d'ailleurs, S étant la huitième partie de la surface ellipsoïdale,

$$S = \tfrac{1}{2}\pi ab\left(1 - \int_0^1 \frac{u-m}{m^3}\,dm\right),$$

et

$$\int_0^1 \frac{u-m}{m^3}\,dm = \sqrt{\delta}\int_0^{\mathrm{arc}(\sin=\sqrt{\delta})} \frac{F\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{\delta}},\theta\right) - \sin\theta}{\sin^3\theta}\cos\theta\,d\theta,$$

intégrale qu'il s'agit de déterminer.

Pour cela, on a évidemment

$$2\int \frac{F(k,\theta)\cos\theta}{\sin^3\theta}\,d\theta = \int \frac{d\theta}{\sin^2\theta\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} - \frac{F(k,\theta)}{\sin^2\theta},$$

et

$$\int \frac{d\theta}{\sin^2\theta\,\Delta(k,\theta)} = F(k,\theta) - E(k,\theta) - \mathrm{cotang}\,\theta\,\Delta(k,\theta).$$

Donc, en se rappelant que $\int_0^1 \frac{u-m}{m^3}\,dm$ s'évanouit pour m ou $\theta = 0$, on a, pour la valeur de cette intégrale,

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\delta}\left[\frac{2}{\sin\theta} - \mathrm{cotang}\,\theta\,\Delta(k,\theta) - \mathrm{cotang}^2\theta\,F(k,\theta) - E(k,\theta)\right],$$

où l'on doit prendre $\sin\theta = \sqrt{\delta}$, à cause de $m = 1$; on peut, par conséquent, mettre cette valeur sous la forme

$$1 - \frac{1}{2}\frac{c^2}{ab} - \frac{1}{2\sin\theta}\left[\cos^2\theta\,F(k,\theta) + \sin^2\theta\,E(k,\theta)\right];$$

en sorte que l'on obtient finalement

$$S = \tfrac{1}{4}\pi c^2 + \tfrac{1}{4}\pi\frac{ab}{\sin\theta}\left[\cos^2\theta\,F(k,\theta) + \sin^2\theta\,E(k,\theta)\right],$$

où

$$\cos\theta = \frac{c}{a}, \qquad k^2 = \frac{a^2}{b^2}\,\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}.$$

13. Ayant terminé les remarques que nous nous étions proposé de faire par rapport aux intégrales contenues dans le chap. XXXV du *Traité des Fonctions elliptiques*, nous allons démontrer quelques autres résultats qui ont beaucoup d'analogie avec ceux dont nous venons de nous occuper ; ils dérivent tous de l'équation suivante

$$(17) \qquad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} f(\Delta)\frac{d\varphi}{\Delta} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} f\left(\frac{\sqrt{1-k^2}}{\Delta}\right)\frac{d\varphi}{\Delta},$$

que l'on démontre immédiatement en substituant, au lieu de φ, un angle ψ donné par l'équation

$$\sqrt{1-k^2}\,\mathrm{tang}\,\varphi\,\mathrm{tang}\,\psi = 1.$$

Pour faire application de cette formule, on supposera d'abord que

$$f(\Delta) = \log\left(\frac{1}{\Delta}\right),$$

et l'on aura

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log\left(\frac{1}{\Delta}\right)\frac{d\varphi}{\Delta} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\left[\log\left(\frac{1}{k'}\right) - \log\left(\frac{1}{\Delta}\right)\right]\frac{d\varphi}{\Delta},$$

k' étant égale à $\sqrt{1-k^2}$, en sorte que

$$(18) \qquad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log\left(\frac{1}{\Delta}\right)\frac{d\varphi}{\Delta} = \tfrac{1}{2}\log\left(\frac{1}{k'}\right)\mathrm{F}(k).$$

14. En désignant par $\Lambda(k, \varphi)$ la fonction indéfinie

$$\int_0^{\varphi} \log\left(\frac{1}{\Delta}\right)\frac{d\varphi}{\Delta},$$

on peut trouver une relation entre deux fonctions Λ, qui est une généralisation de la propriété contenue dans la formule (18).

Soit

$$\Lambda(k, \varphi) - \Lambda(k, \psi) + \alpha = \Phi,$$

où α est une constante, et où φ et ψ sont liés par la relation

$$k'\,\mathrm{tang}\,\varphi\,\mathrm{tang}\,\psi = 1,$$

ce qui donne

$$\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} + \frac{d\psi}{\Delta(\psi)} = 0,$$

on aura, par la différentiation,

$$\left\{\log\left[\frac{1}{\Delta(\varphi)}\right] + \log\left[\frac{1}{\Delta(\psi)}\right]\right\}\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} = d\Phi.$$

Maintenant on a

$$\Delta(\varphi)\Delta(\psi) = k';$$

d'où il résulte que

$$\Phi = \log\left(\frac{1}{k'}\right)F(k,\varphi).$$

Pour déterminer la valeur de la constante, soit $\varphi = 0$, ce qui donne

$$\psi = \tfrac{1}{2}\pi,$$

et, par conséquent,

$$\alpha = \Lambda(k, \tfrac{1}{2}\pi);$$

on a donc enfin

$$\Lambda(k,\varphi) - \Lambda(k,\psi) + \Lambda(k,\tfrac{1}{2}\pi) = \log\left(\frac{1}{k'}\right)F(k,\varphi). \tag{19}$$

Si l'on y substitue pour $\Lambda(k, \frac{1}{2}\pi)$ sa valeur tirée de la formule (18), on transformera cette équation dans la suivante

$$\Lambda(k,\varphi) - \Lambda(k,\psi) = \tfrac{1}{2}\log\left(\frac{1}{k'}\right)F(k,\delta), \tag{20}$$

où

$$\delta = \text{amp.}\,[F(k,\varphi) - F(k,\psi)].$$

15. En se reportant à l'équation (18), on verra, par l'intégration par parties, que

$$\log\left(\frac{1}{k'}\right)F(k) - k^2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{F(k,\varphi)\sin\varphi\cos\varphi}{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = \tfrac{1}{2}\log\left(\frac{1}{k'}\right)F(k),$$

en sorte que

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{F(k,\varphi)\sin\varphi\cos\varphi}{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = \frac{1}{2k^2}\log\left(\frac{1}{k'}\right)F(k). \tag{21}$$

On peut encore déduire d'autres intégrales de l'équation (18). Si l'on différentie cette équation par rapport à k, on trouvera

$$2k\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\log\left(\frac{1}{\Delta}\right)\frac{\sin^2\varphi d\varphi}{\Delta^3}+2k\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin^2\varphi d\varphi}{\Delta^3}=\frac{k\mathrm{F}(k)}{k'^2}+\log\left(\frac{1}{k'}\right)\frac{d\mathrm{F}(k)}{dk}.$$

Or on a

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin^2\varphi d\varphi}{\Delta^3}=\frac{1}{k^2k'^2}[\mathrm{E}(k)-k'^2\mathrm{F}(k)],$$

et

$$\frac{d\mathrm{F}(k)}{dk}=\frac{1}{kk'^2}[\mathrm{E}(k)-k'^2\mathrm{F}(k)],$$

en sorte qu'on trouvera, après quelques réductions,

$$(22)\quad\left\{\begin{aligned}&\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\log\left(\frac{1}{\Delta}\right)\frac{\sin^2\varphi d\varphi}{\Delta^3}\\&=\frac{1}{2k^2k'^2}\left\{\left[1+k'^2-k'^2\log\left(\frac{1}{k'}\right)\right]\mathrm{F}(k)-\left[2-\log\left(\frac{1}{k'}\right)\right]\mathrm{E}(k)\right\}.\end{aligned}\right.$$

16. Soient k, k_1 et φ, φ_1, respectivement, les modules et les amplitudes de deux fonctions elliptiques qui satisfont à l'équation

$$\mathrm{F}(k_1,\varphi_1)=(1+k')\mathrm{F}(k,\varphi),$$

et l'on aura, comme on sait,

$$k_1=\frac{1-k'}{1+k'},\quad \operatorname{tang}(\varphi_1-\varphi)=k'\operatorname{tang}\varphi,$$

et

$$\Delta(k,\varphi)\Delta(k_1,\varphi_1)=\cos^2\varphi+k'\sin^2\varphi.$$

D'ailleurs, $\varphi_1=\pi$, lorsque $\varphi=\frac{\pi}{2}$, en sorte que

$$2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\log\left[\frac{1}{\Delta(k_1,\varphi_1)}\right]\frac{d\varphi_1}{\Delta(k_1,\varphi_1)}=(1+k')\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\log\left[\frac{\Delta(k,\varphi)}{\cos^2\varphi+k'\sin^2\varphi}\right]\frac{d\varphi}{\Delta(k,\varphi)}.$$

Mais, d'après la formule (18), le premier membre de cette équation est égal à

$$\log\left(\frac{1}{k'_1}\right)\mathrm{F}(k_1),\quad \text{ou à}\quad \frac{1+k'}{2}\log\left(\frac{1+k'}{2\sqrt{k'}}\right)\mathrm{F}(k),$$

et le second est égal à

$$(1+k')\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\log\left(\frac{1}{\cos^2\varphi+k'\sin^2\varphi}\right)\frac{d\varphi}{\Delta(k,\ \varphi)}-\frac{1+k'}{2}\log\left(\frac{1}{k'}\right)F(k);$$

on trouve donc

$$(23)\qquad \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\log\left(\frac{1}{\cos^2\varphi+k'\sin^2\varphi}\right)\frac{d\varphi}{\Delta}=\tfrac{1}{2}\log\left(\frac{1+k'}{2k'\sqrt{k'}}\right)F(k).$$

A l'aide de l'intégration par parties, on peut déduire de la formule (23) l'intégrale suivante :

$$(24)\qquad \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{F(k,\ \varphi)\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi}{\cos^2\varphi+k'\sin^2\varphi}=\frac{1}{4(1-k')}\log\left[\frac{2}{(1+k')\sqrt{k'}}\right]F(k).$$

17. Transformons l'équation (17) par les mêmes substitutions que nous avons employées dans le n° **3**, c'est-à-dire posons

$$k^2=1-\frac{\operatorname{tang}^2\alpha}{\operatorname{tang}^2\beta},\quad \cot^2\omega=\cot^2\alpha\,(1-k^2\sin^2\varphi),$$

et il en résultera

$$\int_\alpha^\beta\frac{f(\operatorname{tang}\alpha\cot\omega)\,d\omega}{\sqrt{(\sin^2\omega-\sin^2\alpha)(\sin^2\beta-\sin^2\omega)}}=\int_\alpha^\beta\frac{f(\cot\beta\operatorname{tang}\omega)\,d\omega}{\sqrt{(\sin^2\omega-\sin^2\alpha)(\sin^2\beta-\sin^2\omega)}}.$$

Dans cette équation, soit $f(\operatorname{tang}\alpha\cot\omega)$ une fonction elliptique de première espèce, d'un module arbitraire c, et d'une amplitude ξ qui satisfasse à l'équation

$$\operatorname{tang}\xi=\left(\frac{\operatorname{tang}\beta}{\operatorname{tang}\alpha}\right)^n\frac{(\operatorname{tang}\alpha\cot\omega)^{2n}}{\sqrt[4]{1-c^2}},$$

n étant un nombre quelconque. On aura donc

$$\int_\alpha^\beta\frac{F(c,\ \xi)\,d\omega}{\sqrt{(\sin^2\omega-\sin^2\alpha)(\sin^2\beta-\sin^2\omega)}}=\int_\alpha^\beta\frac{F(c,\ \xi')\,d\omega}{\sqrt{(\sin^2\omega-\sin^2\alpha)(\sin^2\beta-\sin^2\omega)}},$$

ξ' étant donné par l'équation

$$\operatorname{tang}\xi'=\left(\frac{\operatorname{tang}\beta}{\operatorname{tang}\alpha}\right)^n\frac{(\cot\beta\operatorname{tang}\omega)^{2n}}{\sqrt[4]{1-c^2}},$$

en sorte que

$$\sqrt{1-c^2}\,\mathrm{tang}\,\xi\,\mathrm{tang}\,\xi' = 1,$$

et, par conséquent,

$$F(c,\xi) + F(c,\xi') = F(c);$$

d'après cela, en se rappelant que

$$\int_\alpha^\beta \frac{d\omega}{\sqrt{(\sin^2\omega - \sin^2\alpha)(\sin^2\beta - \sin^2\omega)}} = \frac{1}{\cos\alpha\sin\beta}\,F(k),$$

où

$$k^2 = 1 - \frac{\mathrm{tang}^2\alpha}{\mathrm{tang}^2\beta},$$

on trouve

$$(25)\qquad \int_\alpha^\beta \frac{F(c,\xi)\,d\omega}{\sqrt{(\sin^2\omega - \sin^2\alpha)(\sin^2\beta - \sin^2\omega)}} = \frac{1}{2\cos\alpha\sin\beta}\,F(c)\,F(k).$$

Si l'on fait, dans l'équation pour ξ,

$$n = -\tfrac{1}{2} \quad \text{et} \quad c^2 = 1 - \cot^2\alpha\cot^2\beta,$$

on aura

$$\xi = \omega,$$

et, par conséquent,

$$(26)\qquad \int_\alpha^\beta \frac{F(c,\omega)\,d\omega}{\sqrt{(\sin^2\omega - \sin^2\alpha)(\sin^2\beta - \sin^2\omega)}} = \frac{1}{2\cos\alpha\sin\beta}\,F(c)\,F(k),$$

où α et β sont liés avec c par l'équation

$$\sqrt{1-c^2}\,\mathrm{tang}\,\alpha\,\mathrm{tang}\,\beta = 1,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$F(c,\alpha) + F(c,\beta) = F(c).$$

18. Maintenant, supposons que $f(\mathrm{tang}\,\alpha\cot\omega)$ soit une fonction elliptique de l'espèce seconde $E(c,\omega)$, c^2 étant égale à $1 - \cot^2\alpha\cot^2\beta$, et l'on aura

$$\int_\alpha^\beta \frac{E(c,\omega)\,d\omega}{\sqrt{(\sin^2\omega - \sin^2\alpha)(\sin^2\beta - \sin^2\omega)}} = \int_\alpha^\beta \frac{E(c,\omega')\,d\omega}{\sqrt{(\sin^2\omega - \sin^2\alpha)(\sin^2\beta - \sin^2\omega)}},$$

où

$$\sqrt{1-c^2}\,\operatorname{tang}\omega\,\operatorname{tang}\omega' = 1,$$

ce qui donne

$$E(c,\omega) + E(c,\omega') - E(c) = c^2 \sin\omega \sin\omega',$$

et, par conséquent,

$$\int_\alpha^\beta \frac{E(c,\omega)\,d\omega}{\sqrt{(\sin^2\omega - \sin^2\alpha)(\sin^2\beta - \sin^2\omega)}} = \frac{1}{2\cos\beta\sin\beta}\,E(c)\,F(k)$$

$$+ \tfrac{1}{2}c^2 \int_\alpha^\beta \frac{\sin\omega\sin\omega'\,d\omega}{\sqrt{(\sin^2\omega - \sin^2\alpha)(\sin^2\beta - \sin^2\omega)}}.$$

Or on a

$$\sin\omega' = \frac{\cos\omega}{\sqrt{1-c^2\sin^2\omega}};$$

substituant cette expression dans la dernière intégrale, et mettant ensuite pour ω sa valeur en φ, on trouve qu'elle sera transformée dans cette autre,

$$\operatorname{tang}\alpha \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-k^2\cos^2\alpha\sin^2\varphi)(1-k^2\sin^2\beta\sin^2\varphi)}}.$$

Si l'on y fait encore

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\operatorname{tang}\psi,$$

on aura

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-k^2\cos^2\alpha\sin^2\varphi)(1-k^2\sin^2\beta\sin^2\varphi)}} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\psi}{\sqrt{1-\left(1-\frac{\sin^2 2\beta}{\sin^2 2\alpha}\right)\sin^2\psi}};$$

donc

$$\int_\alpha^\beta \frac{\sin\omega\sin\omega'\,d\omega}{\sqrt{(\sin^2\omega - \sin^2\alpha)(\sin^2\beta - \sin^2\omega)}} = \frac{\sin\beta}{\cos\alpha}\,F(h),$$

où

$$h^2 = 1 - \frac{\sin^2 2\beta}{\sin^2 2\alpha}.$$

Il est évident que h^2 est une fraction positive, à cause de

$$\frac{\sin^2 2\beta}{\sin^2 2\alpha} = \frac{1-c^2\sin^2\beta}{1-c^2\sin^2\alpha}.$$

On conclut donc finalement (la même relation ayant lieu entre c, α, β, que dans le numéro précédent)

$$(27)\quad \int_\alpha^\beta \frac{E(c,\omega)\,d\omega}{\sqrt{(\sin^2\omega-\sin^2\alpha)(\sin^2\beta-\sin^2\omega)}}=\frac{1}{2\cos\alpha\sin\beta}E(c)F(k)+\tfrac{1}{2}c^2\frac{\sin\beta}{\cos\alpha}F(h).$$

Si dans les équations (26) et (27) on fait $c=0$, on aura

$$\alpha+\beta=\tfrac{1}{2}\pi,$$

et elles seront réduites à

$$\int_\alpha^\beta \frac{\omega\,d\omega}{\sqrt{(\sin^2\omega-\sin^2\alpha)(\sin^2\beta-\sin^2\omega)}}=\frac{\pi}{4\cos\alpha\sin\beta}F(k),$$

qui n'est qu'un cas particulier de l'équation (3), parce que

$$F(k,\beta)=\tfrac{1}{2}F(k),$$

lorsque les angles α et β sont complémentaires.