JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

BRETON

Note sur les centres des lignes et des surfaces algébriques

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 11 (1846), p. 153-156.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1846_1_11__153_0>

NOTE

SUR

LES CENTRES DES LIGNES ET DES SURFACES ALGÉBRIQUES;

PAR M. BRETON (DE CHAMP),
Ingénieur des Ponts et Chaussées.

Les géomètres savent qu'une ligne ou une surface ne peut offrir plus d'un centre sans en avoir un nombre infini. Les lois qui régissent leur distribution dans l'espace sont bien connues, mais elles ne s'appliquent qu'aux centres *généraux*, c'est-à-dire à des points C tels que, menant du point quelconque M du lieu géométrique le rayon MC, et portant sur son prolongement $CM' = CM$, le point M' ainsi obtenu soit aussi au lieu géométrique. Or, on conçoit sans peine des centres qui n'appartiendraient qu'à une seule nappe de surface ou branche de courbe, et ne jouiraient pas de la propriété qu'on vient de rappeler. Tel serait le cas de la courbe représentée par l'équation

$$(y^2 + x^2 - r^2)(y^2 - 2px + q^2) = 0,$$

laquelle se décompose en

$$y^2 + x^2 - r^2 = 0 \quad \text{et} \quad y^2 - 2px + q^2 = 0,$$

et donne un cercle associé à une conique. La première de ces courbes a son centre *particulier* qui échappe à la définition précédente, et la seconde, qui est une parabole, n'en a point. Rien de si facile que de former de toutes pièces des équations de ce genre; elles auront pour caractère commun d'être décomposables en équations plus simples.

Cela posé, je dis que *réciproquement, si un lieu géométrique, surface ou ligne, est doué d'un centre particulier à quelqu'une de ses parties, nappe ou branche, son équation sera décomposable en équations plus simples.* Il est bien entendu qu'on ne veut parler ici que d'équations ramenées à la forme rationnelle et entière par rapport aux variables qu'elles renferment, hypothèse qu'il est toujours permis de faire.

Soit donc, s'il se peut, un lieu géométrique renfermant un centre particulier, représenté par une équation

$$F(x, y, z) = 0,$$

ramenée à la forme rationnelle et entière par rapport à x, y, z. Ce sera une surface, mais le raisonnement que je vais faire s'appliquera également aux lignes.

Si $F(x, y, z)$ est irréductible, il le sera encore en transportant l'origine des coordonnées au centre particulier, c'est-à-dire en changeant x, y, z en $x + a$, $y + b$, $z + c$, a, b, c étant les coordonnées de ce centre. Ayant donc l'équation

$$F(x + a,\ y + b,\ z + c) = 0,$$

le problème à résoudre se réduit à savoir si l'origine des coordonnées peut être un centre particulier. Pour qu'il en fût ainsi, il faudrait qu'en menant un rayon quelconque, on trouvât sur sa direction deux segments égaux et opposés, parmi tous ceux déterminés par la rencontre de la surface entière. En d'autres termes, posant

$$x = mz, \quad y = nz,$$

équations d'un rayon qui passe par l'origine, la transformée à une inconnue

$$F(mz + a,\ nz + b,\ z + c) = 0,$$

que, pour plus de simplicité, nous écrirons, en supprimant la parenthèse, $F = 0$, aura au moins deux racines égales et de signes contraires, et le nombre de ces racines sera inférieur au degré de $F(x, y, z)$, sans quoi le centre considéré, au lieu d'être *particulier*, serait un centre *général*, contrairement à l'hypothèse. Si donc nous changeons le signe de z dans

$$F(mz + a, nz + b, z + c) = 0,$$

nous aurons une nouvelle équation

$$F(-mz + a,\ -nz + b,\ -z + c) = 0,$$

dont quelques racines, et non toutes, appartiendront à la précédente. D'où il suit que leurs premiers membres auront un commun diviseur rationnel qui, égalé à zéro, donnerait toutes les racines égales et de signes contraires dont il s'agit, et ne donnerait que celles-là. L'algèbre nous apprend que ce plus grand commun diviseur ne peut qu'être entier en z; donc en le séparant, par la division, de $F=0$, l'équation restante ne pourra plus donner de racines relatives au centre particulier supposé, c'est-à-dire égales deux à deux et de signes contraires.

Ceci bien compris, je nomme φ le commun diviseur, et ψ le quotient de la division de F par φ, de manière que $F=\varphi.\psi$. On sait que φ et ψ ne peuvent qu'être *rationnels* en m et n; je dis, de plus, qu'ils sont *entiers* par rapport à ces quantités. Car on peut supposer que les coefficients des diverses puissances de z dans F sont premiers entre eux, et que de φ et ψ on ait fait disparaître tous les facteurs indépendants de z, ce qui comprend les dénominateurs. Comme $F=0$ doit donner toutes les racines de $\varphi=0$ et de $\psi=0$, et n'en doit donner ni plus ni moins, il est bien évident que F sera du même degré en z que le produit $\varphi.\psi$. Toute la différence, s'il y en avait une, proviendrait de quelque facteur indépendant de z. Or, par hypothèse, aucun facteur de cette espèce ne subsiste plus dans F, φ, ψ; donc on a identiquement

$$F=\varphi.\psi,$$

φ et ψ étant entiers en z, m, n.

Il s'ensuit que le degré des fonctions φ et ψ, pris non-seulement par rapport à z, mais aussi par rapport à m et n, sera moindre que celui de F, car le degré du produit $\varphi.\psi$ est égal à la somme de ceux de φ et de ψ; or le degré de F ainsi considéré n'est autre que celui de l'équation du lieu géométrique proposé en x, y et z; donc, en remplaçant enfin m et n par $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$, F reproduira $F(x+a, y+b, z+c)$, et φ et ψ deviendront des polynômes d'un degré moindre. Comme la même décomposition subsiste à quelque origine que les coordonnées soient rapportées, je conclus que *le lieu représenté par l'équation*

$$F(x, y, z)=0,$$

supposée irréductible, ne saurait avoir un centre particulier.

On voit par là que les centres généraux sont les seuls qu'il soit nécessaire de considérer dans les lieux géométriques, lorsque leurs équations ont reçu la forme la plus simple; et si la discussion vient à faire reconnaître un centre particulier, c'est qu'il y a d'autres réductions possibles, auxquelles on parviendrait par le procédé qui ressort de la démonstration précédente, et qui consiste, après avoir transporté l'origine des coordonnées au centre particulier, à faire tour à tour

$$x = mz,\ y = nz \quad \text{et} \quad x = -mz,\ y = -nz,$$

puis à chercher l'équation

$$\varphi = 0,$$

d'où dépendent les racines communes aux deux transformées ainsi obtenues. On réduira par ce moyen la proposée à deux autres équations

$$\varphi = 0, \quad \psi = 0,$$

dont la première, après substitution de $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ au lieu de m et n, appartiendra exclusivement au lieu géométrique décrit autour du centre.