JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ERNEST LAMARLE

Note sur le théorème de M. Cauchy relatif au développement des fonctions en séries

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 11 (1846), p. 129-141.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1846_1_11__129_0>

NOTE

SUR LE THÉORÈME DE M. CAUCHY

RELATIF

AU DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS EN SÉRIES;

PAR M. ERNEST LAMARLE,

Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur à l'Université de Gand.

M. Cauchy a démontré [*] que la série de Maclaurin est convergente tant que le module de la variable reste moindre que la plus petite des valeurs pour lesquelles la fonction ou sa dérivée cesse d'être continue.

Après avoir appliqué ce théorème à quelques cas particuliers, M. Cauchy ajoute [**] :

« Nous remarquerons en finissant que les fonctions ci-dessus, prises » pour exemples, et leurs dérivées du premier ordre, deviennent tou- » jours infinies ou discontinues pour les mêmes valeurs du module de » la variable indépendante. Si l'on était assuré qu'il en fût toujours » ainsi, on pourrait, dans le théorème énoncé, se dispenser de par- » ler de la fonction dérivée; mais, comme on n'a point à cet égard » une certitude suffisante, il est plus rigoureux d'énoncer le théorème » dans les termes dont nous nous sommes servis plus haut. »

Le but de cette Note est de montrer, relativement à la condition de continuité,

1°. Qu'elle peut toujours être omise, en ce qui concerne la dérivée;

2°. Qu'elle est d'ailleurs insuffisante, à moins qu'elle n'implique une certaine périodicité de la fonction.

---

[*] *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, années 1840 et 1841.

[**] Même ouvrage, tome I, page 32.

Précisons d'abord ce que nous entendons par fonction continue.

Étant donnée une fonction quelconque $f(x)$, remplaçons x par [*] $re^{\theta\sqrt{-1}}$, et, mettant en évidence les parties réelles et imaginaires, effectuons leur séparation dans l'équation symbolique

$$(1)\qquad f\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right) = \varphi(r,\theta) + \sqrt{-1}\,\psi(r,\theta).$$

Concevons, en outre, que l'argument θ varie de zéro à 2π.

Cela posé, si les fonctions $\varphi(r,\theta)$, $\psi(r,\theta)$ restent finies et réelles, et qu'elles ne changent point brusquement de détermination numérique, pour toutes valeurs du module comprises entre deux limites choisies comme on voudra, $f(x)$ est et demeure continue entre ces mêmes limites. Dans le cas contraire [**], il y a discontinuité, sinon pour les valeurs réelles, du moins pour les valeurs imaginaires.

La séparation effectuée dans l'équation (1) peut offrir quelque difficulté. Néanmoins, il n'est pas douteux qu'elle ne soit toujours possible. S'agit-il seulement des fonctions développables en série convergente suivant la formule de Maclaurin? rien de plus simple que de constater à priori la possibilité de la séparation. On a, en effet,

$$(2)\qquad f(x) = a + bx + cx^2 + \ldots;$$

de là résulte

$$f\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right) = a + bre^{\theta\sqrt{-1}} + cr^2e^{2\theta\sqrt{-1}} + \ldots,$$

c'est-à-dire, en remplaçant $e^{n\theta\sqrt{-1}}$ par $\cos n\theta + \sqrt{-1}\sin n\theta$,

$$\begin{aligned} f\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right) &= a + br\cos\theta + cr^2\cos 2\theta + \ldots \\ &\quad + \sqrt{-1}\,(br\sin\theta + cr^2\sin 2\theta + \ldots). \end{aligned}$$

Il vient donc, en ce cas,

$$(3)\qquad \varphi(r,\theta) = a + br\cos\theta + cr^2\cos 2\theta + \ldots,$$

$$(4)\qquad \psi(r,\theta) = br\sin\theta + cr^2\sin 2\theta + \ldots.$$

---

[*] Le module r est, par hypothèse, essentiellement positif.

[**] On pourrait appeler *continuité relative* celle qui subsiste pour les valeurs réelles, et *continuité absolue* celle qui s'étend à la fois aux valeurs réelles et imaginaires.

On voit, d'ailleurs, que la convergence de la série (2), où x est supposée réelle, entraîne [*] celle des séries (3) et (4), et, par conséquent, la continuité des fonctions $\varphi(r, \theta)$, $\psi(r, \theta)$ pour toute l'étendue de l'intervalle précédemment indiqué.

Cette simple remarque suffit pour établir à priori que la continuité doit subsister à partir de $r = 0$ dans toute fonction développable en série convergente, ordonnée suivant les puissances entières et positives de la variable.

Constatons, en outre, que, pour toute fonction de cette nature, on a toujours et nécessairement

$$\varphi(r, 0) = \varphi(r, 2\pi), \quad \psi(r, 0) = \psi(r, 2\pi).$$

Voilà donc une condition nouvelle, reconnue tout d'abord indispensable. Elle consiste en ce que les fonctions $\varphi(r, \theta)$, $\psi(r, \theta)$ sont assujetties à reprendre les mêmes valeurs aux deux limites $\theta = 0$, $\theta = 2\pi$. Réduite à ces termes, elle n'offre rien de surabondant et qui ne soit essentiellement distinct des caractères propres à la continuité.

Dans le cas de $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$, l'on a

$$\varphi(r, \theta) = r^{\frac{3}{2}} \cos \tfrac{3}{2}\theta, \quad \psi(r, \theta) = r^{\frac{3}{2}} \sin \tfrac{3}{2}\theta,$$

et, bien que la fonction soit continue, ainsi que sa dérivée, pour toute valeur du module, néanmoins le développement demeure impossible. La première condition n'est donc pas suffisante.

Faisons $\theta = 0$, puis $\theta = 2\pi$, nous aurons

$$\varphi(r, 0) = + r^{\frac{3}{2}}, \quad \varphi(r, 2\pi) = - r^{\frac{3}{2}},$$

et, comme ces valeurs sont différentes, l'impossibilité du développement se trouve démontrée.

En restreignant au plus petit nombre possible les conditions que doit remplir une fonction pour être développable en série convergente

---

[*] La démonstration de cette propriété est tout élémentaire. Elle fait partie d'un travail que nous nous proposons de publier prochainement. Nous avons cru inutile de la reproduire ici, le lecteur pouvant y suppléer sans difficulté.

suivant la formule de Maclaurin, nous voyons, d'après ce qui précède, qu'il en faut au moins deux.

La première, c'est que la continuité subsiste à partir de $r = 0$ pour toute valeur du module inférieure à R.

La seconde, que dans cet intervalle chacune des fonctions $\varphi(r, \theta)$, $\psi(r, \theta)$ prenne pour $\theta = 0$ même valeur que pour $\theta = 2\pi$.

Ces conditions nécessaires étant supposées remplies, il nous reste à démontrer qu'elles sont suffisantes.

Soit

$$f(x) = f\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right) = \varphi(r, \theta) + \sqrt{-1}\,\psi(r, \theta).$$

Admettons d'abord qu'entre deux valeurs de r, convenablement choisies, la continuité subsiste, et que l'on ait en même temps pour toute valeur du module comprise dans cet intervalle,

$$\varphi(r, 0) = \varphi(r, 2\pi), \quad \psi(r, 0) = \psi(r, 2\pi). \tag{5}$$

La dérivée de la fonction $f\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right)$, prise par rapport à l'argument θ, est $r\sqrt{-1}\,e^{\theta\sqrt{-1}} f'\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right)$; il vient donc [*]

$$\begin{aligned} r\sqrt{-1}\int_0^{2\pi} e^{\theta\sqrt{-1}} f'\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right) d\theta &= \varphi(r, 2\pi) - \varphi(r, 0) \\ &\quad + \sqrt{-1}\,[\psi(r, 2\pi) - \psi(r, 0)], \end{aligned}$$

et, eu égard aux équations (5),

$$\int_0^{2\pi} e^{\theta\sqrt{-1}} f'\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right) d\theta = 0.$$

Mais, d'un autre côté,

$$e^{\theta\sqrt{-1}} f'\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right) = \frac{df\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right)}{dr}.$$

---

[*] Voir notre *Essai sur les principes fondamentaux de l'Analyse transcendante*, page 53.

On a donc aussi

$$\int_0^{2\pi} \frac{df\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right)}{dr}\, d\theta = \frac{d\int_0^{2\pi} f\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right) d\theta}{dr} = 0.$$

De là résulte immédiatement

$$(6) \qquad \int_0^{2\pi} f\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right) d\theta = \text{constante}.$$

S'agit-il maintenant de la question que nous avons principalement en vue, le module r pouvant varier à partir de zéro jusqu'à la limite R sans qu'il y ait solution de continuité, ni que les équations (5) cessent d'avoir lieu. En ce cas, l'on peut, sans altérer le résultat général fourni par l'équation (6), y poser $r = 0$. Il vient donc, *quel que soit* r, pourvu qu'il reste moindre que R,

$$(7) \qquad \int_0^{2\pi} f\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right) d\theta = f(0)\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi f(0).$$

Considérons en particulier la fonction

$$\frac{x}{x-z} = \frac{re^{\theta\sqrt{-1}}}{re^{\theta\sqrt{-1}} - z} = \frac{r^2 - rz\cos\theta}{r^2 + z^2 - 2rz\cos\theta} - \sqrt{-1}\,\frac{rz\sin\theta}{r^2 + z^2 - 2rz\cos\theta}.$$

Cette fonction satisfait évidemment aux équations (5), et elle est continue pour tout intervalle qui ne comprend pas la valeur $r = z$. Si donc on donne à r une valeur quelconque moindre que z, l'on a, de même que pour $r = 0$,

$$(8) \qquad \int_0^{2\pi} \frac{re^{\theta\sqrt{-1}}}{re^{\theta\sqrt{-1}} - z}\, d\theta = 0.$$

Suppose-t-on, au contraire, que la valeur quelconque assignée à r soit plus grande que z, il vient

$$\frac{x}{x-z} = \frac{e^{\theta\sqrt{-1}}}{e^{\theta\sqrt{-1}} - \frac{z}{r}}.$$

Sous cette forme, on reconnaît que l'intégrale ne peut être indépendante de r sans l'être aussi de z; on peut dès lors poser $z = 0$, et en déduire pour valeur générale

$$(9) \qquad \int_0^{2\pi} \frac{re^{\theta\sqrt{-1}}}{re^{\theta\sqrt{-1}} - z}\, d\theta = 2\pi.$$

Replaçons-nous, par rapport à $f(x)$, dans les hypothèses en vertu desquelles l'équation (7) subsiste. Si, prenant z moindre que R, nous faisons

$$F(x) = \frac{f(x) - f(z)}{x - z}\, x,$$

il est clair:

1°. Que les équations (5) sont satisfaites par $F(x)$ en même temps que par $f(x)$;

2°. Que, continue à partir de $r = 0$, $F(x)$ ne cesse pas de l'être pour toute valeur de r moindre que z;

3°. Que si la valeur z peut être atteinte par le module, sans qu'il y ait solution de continuité, il en est de même des valeurs supérieures à z et moindres que R.

Le dénominateur $x - z$ ne s'annulant qu'autant que l'on fait à la fois r égal à z, et θ égal à zéro ou 2π, il y a lieu d'observer, *qu'en vertu des conditions remplies par* $f(x)$, le résultat qui répond à ces substitutions est nécessairement le même que celui qui, dans le système des valeurs exclusivement réelles, répond à l'hypothèse $x = z$. Or, dans ce système, la vraie valeur de $F(x)$ est alors exprimée par $zf'(z)$, et quand même elle prendrait la forme $\frac{1}{0}$, *cette forme ne pouvant qu'être accidentelle et non permanente,* il suffirait, pour la faire disparaître, d'attribuer à z une autre valeur prise arbitrairement plus grande ou plus petite.

Il suit de là qu'en excluant, *pour le moment,* parmi les valeurs de z inférieures à R, celles qui rendraient (*s'il en est qui le puissent*) $f'(z)$ infinie, la fonction $F(x)$ ne cesse pas de remplir les conditions de l'équation (7), alors même qu'on y fait r supérieur à z, et z aussi rapproché qu'on voudra de R. Or $F(0) = 0$. Il vient donc, en général, quel que soit r, plus petit ou plus grand que z, mais moindre que R,

$$(10) \qquad \int_0^{2\pi} \frac{f\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right) - f(z)}{re^{\theta\sqrt{-1}} - z}\, re^{\theta\sqrt{-1}}\, d\theta = 0.$$

Parmi les valeurs du module inférieures à R, ne considérons plus dès à présent que celles qui sont supérieures à z. Nous aurons

$$r > z.$$

Or, en ce cas, l'on déduit de l'équation (9),

$$\int_0^{2\pi} f(z) \frac{re^{\theta\sqrt{-1}}}{re^{\theta\sqrt{-1}} - z}\, d\theta = 2\pi f(z);$$

il vient donc, en vertu de l'équation (10),

$$(11) \qquad 2\pi f(z) = \int_0^{2\pi} f\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right) \frac{re^{\theta\sqrt{-1}}}{re^{\theta\sqrt{-1}} - z}\, d\theta.$$

Cela posé, r étant plus grand que z, l'on a, en série convergente,

$$\frac{re^{\theta\sqrt{-1}}}{re^{\theta\sqrt{-1}} - z} = 1 + \frac{z}{r} e^{-\theta\sqrt{-1}} + \frac{z^2}{r^2} e^{-2\theta\sqrt{-1}} + \frac{z^3}{r^3} e^{-3\theta\sqrt{-1}} + \ldots.$$

Il vient donc aussi

$$(12) \qquad \left\{ \begin{aligned} 2\pi f(z) = {} & \int_0^{2\pi} f\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right) d\theta + \frac{z}{r} \int_0^{2\pi} f\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right) e^{-\theta\sqrt{-1}}\, d\theta \\ & + \frac{z^2}{r^2} \int_0^{2\pi} f\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right) e^{-2\theta\sqrt{-1}}\, d\theta + \ldots, \end{aligned} \right.$$

c'est-à-dire le développement de $f(z)$ en série convergente ordonnée suivant les puissances entières et positives de la variable.

Pour ne laisser aucun doute à cet égard, prenons le terme général

$$\begin{aligned} f\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right) e^{-n\theta\sqrt{-1}} = {} & \varphi(r, \theta) \cos n\theta + \psi(r, \theta) \sin n\theta \\ & + \sqrt{-1}\, [\psi(r, \theta) \cos n\theta - \varphi(r, \theta) \sin n\theta]. \end{aligned}$$

Si nous désignons par k et k' les plus grandes valeurs absolues que prennent $\varphi(r, \theta)$ et $\psi(r, \theta)$ dans l'intervalle compris entre zéro et 2π, nous aurons, tant pour la partie réelle que pour la partie imaginaire, qui d'ailleurs est nécessairement nulle,

$$\int_0^{2\pi} f\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right) e^{-n\theta\sqrt{-1}}\, d\theta < 2\pi(k+k');$$

or cela suffit pour qu'il y ait évidemment convergence.

Les termes de la série (12) étant irréductibles entre eux, chacun d'eux doit être indépendant de r. Il faut donc que l'intégrale $\int_0^{2\pi} f\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right) e^{-n\theta\sqrt{-1}}\, d\theta$, qui peut être accidentellement nulle, se réduise, en général, au produit d'une constante par le facteur r^n. Posons, en conséquence,

$$\mathrm{C}r^n = \int_0^{2\pi} f\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right) e^{-n\theta\sqrt{-1}}\, d\theta.$$

De là résulte, en prenant les dérivées de l'ordre n par rapport à r,

$$1.2.3\ldots n.\mathrm{C} = \int_0^{2\pi} f^n\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right) d\theta,$$

puis, faisant $r = 0$, ce qui est permis, puisque la valeur du second membre est indépendante de r,

$$\mathrm{C} = \frac{1}{1.2\ldots n}\int_0^{2\pi} f^n(0)\, d\theta = \frac{2\pi f^n(0)}{1.2\ldots n}.$$

En transportant cette valeur dans l'équation (12), on trouve immédiatement

$$f(z) = f(0) + \frac{z}{1} f'(0) + \frac{z^2}{1.2} f''(0) + \frac{z^3}{1.2.3} f'''(0) + \ldots$$

Le même résultat s'obtient avec une égale facilité lorsqu'on applique à l'équation (12) le procédé d'une suite de dérivations effectuées sur la variable z.

La série (12) étant démontrée convergente pour une valeur de z aussi rapprochée qu'on voudra de R, il en résulte qu'elle ne peut cesser de l'être pour aucune valeur plus petite. Il n'est donc pas de valeurs inférieures à R qui puisse rendre $f'(z)$ infinie, car la convergence de la série implique celle de sa dérivée.

Résumant ce qui précède, nous sommes en droit de conclure que les deux conditions reconnues à priori nécessaires pour la possibilité du développement sont en même temps suffisantes.

En conséquence, nous énoncerons comme il suit le théorème qui fait l'objet de cette Note :

Toute fonction est développable en série convergente, suivant la formule de Maclaurin, tant que le module de la variable reste moindre que la plus petite des valeurs, pour laquelle la fonction cesse d'être continue, ou de prendre même valeur aux deux limites $\theta = 0$, $\theta = 2\pi$. Hors de là, la série devient divergente.

Ce théorème s'étend de lui-même au développement des fonctions suivant la série de Taylor. En effet, si l'on a

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{12} f''(x) + \ldots,$$

et que, considérant h comme variable, l'on pose

$$F(h) = f(x+h),$$

il en résulte immédiatement

$$F(h) = F(0) + hF'(0) + \frac{h^2}{12} F''(0) + \ldots,$$

c'est-à-dire la formule de Maclaurin. On voit donc que, pour appliquer l'énoncé précédent à la série de Taylor, il suffit de substituer $f(x+h)$ à $f(x)$ et d'y traiter h comme variable.

La condition relative aux limites $\theta = 0$, $\theta = 2\pi$ étant supposée remplie, il peut arriver que la continuité cesse alors que le module s'annule. En ce cas, si l'on prend, au lieu de la fonction, le produit de cette fonction par une certaine puissance *entière* de la variable, et que l'on pose, par exemple,

$$x^n f(x) = \varphi(x),$$

la première condition ne cessera pas d'être remplie. On voit, en outre, que $\varphi(x)$ sera continue en même temps que $f(x)$ et pourra l'être encore pour $r = 0$. Il viendra donc, en admettant que l'exposant n soit convenablement déterminé,

$$z^n f(z) = \varphi(0) + z\varphi'(0) + \ldots + \frac{z^n}{1.2\ldots n}\varphi^n(0) + \ldots,$$

d'où l'on déduit

$$f(z) = z^{-n}\varphi(0) + \frac{z^{-(n-1)}}{1}\varphi'(0) + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots n}\varphi^n(0)$$
$$+ \frac{z}{1.2\ldots(n+1)}\varphi^{n+1}(0) + \ldots.$$

Si les fonctions $\varphi(r, \theta)$, $\psi(r, \theta)$ ne prennent point même valeur respective aux deux limites $\theta = 0$, $\theta = 2\pi$, cette condition peut avoir lieu aux deux limites $\theta = 0$, $\theta = 2m\pi$. En ce cas, tous les calculs, tous les raisonnements qui précèdent demeurent applicables, pourvu qu'on remplace 2π par $2m\pi$, $\frac{x}{x-z}$ par $\frac{x^{\frac{1}{m}}}{x^{\frac{1}{m}} - z^{\frac{1}{m}}}$, et, *au besoin*, fx par le produit $x^{\frac{n}{m}} f(x) = \varphi(x)$.

On a donc, en série convergente,

$$2m\pi z^{\frac{n}{m}} f(z) = \int_0^{2m\pi} \varphi\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right) d\theta + \left(\frac{z}{r}\right)^{\frac{1}{m}} \int_0^{2m\pi} \varphi\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right) e^{-\frac{\theta}{m}\sqrt{-1}} d\theta$$
$$+ \left(\frac{z}{r}\right)^{\frac{2}{m}} \int_0^{2m\pi} \varphi\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right) e^{-\frac{2\theta}{m}\sqrt{-1}} d\theta + \ldots.$$

Soit d'ailleurs $z = u^m$, d'où

$$z^{\frac{n}{m}} f(z) = u^n f(u^m) = \chi(u),$$

il vient nécessairement

$$\chi(u) = \chi(0) + \frac{u}{1}\chi'(0) + \frac{u^2}{1.2}\chi''(0) + \ldots,$$

et, par suite,

$$f(z) = z^{-\frac{n}{m}}\chi(0) + \frac{z^{-\frac{n-1}{m}}}{1}\chi'(0) + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots n}\chi^n(0)$$
$$+ \frac{z^{\frac{1}{m}}}{1.2\ldots(n+1)}\chi^{n+1}(0) + \ldots.$$

Le théoreme se trouvant ainsi généralisé, nous dirons maintenant:

Toute fonction est développable en série convergente, suivant un des types réductibles aux formules de Taylor ou de Maclaurin, tant que le module de la variable reste moindre que la plus petite des valeurs, pour laquelle le produit de la fonction par une certaine puissance de la variable cesse d'être continu, ou de prendre même valeur aux deux limites $\theta = 0$, $\theta = 2m\pi$.

Est-il nécessaire d'ajouter que le nombre quelconque m se détermine par la condition des limites, et la puissance $\frac{n}{m}$ de la variable par la condition de continuité à l'origine des valeurs du module.

Les mêmes considérations s'appliquent au développement des fonctions en séries convergentes, ordonnées suivant les puissances descendantes de la variable. Bornons-nous au cas le plus simple, $f(x)$ étant supposée continue, et satisfaisant, en outre, aux équations (5), pour toute valeur du module supérieure à R.

De la relation

$$f\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right) = \varphi(r, \theta) + \sqrt{-1}\,\psi(r, \theta)$$

on déduit

$$f\left(re^{-\theta\sqrt{-1}}\right) = \varphi(r, \theta) - \sqrt{-1}\,\psi(r, \theta).$$

Si donc on pose $\frac{1}{x} = u$, et que, considérant u comme variable, on lui donne pour module $r' = \frac{1}{r}$, l'on aura pour toute valeur de ce module inférieure à R,

$$f\left(\frac{1}{u}\right) = \xi(u) + \xi(0) + \frac{u}{1}\xi'(0) + \frac{u^2}{1.2}\xi''(0) + \ldots;$$

de là résulte, en série convergente,

$$f(x) = \xi(0) + \frac{x^{-1}}{1}\xi'(0) + \frac{x^{-2}}{1.2}\xi''(0) + \ldots.$$

Terminons par une application particulière et proposons-nous, pour exemple, de rechercher dans quels cas la fonction $(1+x)^m$ peut être développée suivant la formule de Maclaurin.

On a

$$(1+x)^m = \left(1+re^{\theta\sqrt{-1}}\right)^m = (1+r\cos\theta+\sqrt{-1}\,r\sin\theta)^m;$$

faisons

$$1+r\cos\theta = \rho\cos\alpha,$$
$$r\sin\theta = \rho\sin\alpha.$$

Nous pouvons en déduire

$$\rho = +\sqrt{1+r^2+2r\cos\theta},$$

et, par suite,

$$(1+x)^m = (1+r^2+2r\cos\theta)^{\frac{m}{2}}(\cos m\alpha+\sqrt{-1}\sin m\alpha).$$

Cela posé, soit d'abord $m > 0$.

La continuité subsiste quel que soit r, la valeur 1 exceptée pour le cas de m fractionnaire. Quant à l'angle α, deux cas se présentent :

1°. Pour $r < 1$, α s'annule aux deux limites $\theta = 0$, $\theta = 2\pi$;

2°. Pour $r > 1$, α et θ passent en même temps par les valeurs zéro et 2π.

Dans le premier cas, la condition des limites est satisfaite quel que soit αm. Dans le second, elle ne l'est qu'autant que m reste entier.

Soit ensuite $m < 0$.

Rien ne change par rapport à α. Quant à la continuité, elle ne subsiste à partir de zéro que jusqu'à la limite $R = 1$.

Il suit de là que le développement est possible quel que soit m pour toute valeur du module inférieure à l'unité, et quel que soit le module pour toute valeur de m entière et positive. Hors de ces cas, la série ne peut subsister sauf pour $r = 1$ et $m > 0$.

La valeur $r = 1$, considérée en elle-même et par rapport aux valeurs plus petites ou plus grandes, mérite un examen tout particulier.

Tant que r est inférieur ou égal à l'unité, α s'annule aux deux limites $\theta = 0$, $\theta = 2\pi$. Pour $r = 1$ et $\theta = \pi$, il y a changement brusque, α passant tout à coup de $+\frac{\pi}{2}$ à $-\frac{\pi}{2}$. Néanmoins, comme le facteur $1+r^2+2r\cos\theta$ s'évanouit en même temps que le changement a lieu, la continuité persiste pour toute valeur positive de l'exposant m.

On voit ainsi que le développement suivant la série de Maclaurin ne cesse pas d'être convergent pour $r = 1$ et $m > 0$.

Lorsque r est supérieur à l'unité et m positif, les angles α et θ passent en même temps par les mêmes multiples de la circonférence. Si l'exposant m est une fraction irréductible de la forme $\frac{p}{q}$, l'on ne peut satisfaire à la condition des limites pour aucun intervalle moindre que $2q\pi$. Cet intervalle, ou tout autre plus grand, comprend la valeur $\theta = 2\pi$. Or on a

1°. Pour $r = 1$,

$$\psi(r, 2\pi) = 0;$$

2°. Pour $r > 1$,

$$\psi(r, 2\pi) = (1 + r)^{\frac{p}{q}} \sin 2\frac{p}{q}\pi.$$

Il y a donc changement brusque de détermination numérique, et impossibilité de franchir la valeur $r = 1$ sans solution de continuité.

En ce cas, le développement peut s'effectuer en série convergente ordonnée suivant les puissances descendantes et fractionnaires de la variable. La même conséquence s'applique aux valeurs négatives de l'exposant m, non plus à partir de $r = 1$, mais pour toute valeur de r supérieure à l'unité.

Bien que la considération de la dérivée soit superflue et indirecte, on observera qu'il peut être quelquefois plus simple d'y recourir. Il importe peu, d'ailleurs, qu'on opère sur la fonction ou sur sa dérivée, puisque l'une ne peut être développable en série convergente sans que l'autre ne le soit aussi, entre les mêmes limites. Nous citerons, comme exemples, les fonctions $l(1 + x)$, arc tang x, auxquelles on substitue avec avantage leurs dérivées respectives $(1+x)^{-1}$, $(1+x^2)^{-1}$.

En opérant directement et comme tout à l'heure, on aurait

$$\begin{aligned} l(1 + x) &= l(1 + r\cos\theta + \sqrt{-1}\, r\sin\theta) \\ &= \tfrac{1}{2}\, l(1 + r^2 + 2r\cos\theta) + \alpha\sqrt{-1}; \end{aligned}$$

la transformation serait plus compliquée pour

$$\begin{aligned} \text{arc tang}\, x = \beta = \sqrt{-1}\, l e^{-\beta\sqrt{-1}} &= \sqrt{-1}\, l(\cos\beta - \sqrt{-1}\sin\beta) \\ &= \sqrt{-1}\, l\frac{1 - x\sqrt{-1}}{\sqrt{1 + x^2}}. \end{aligned}$$